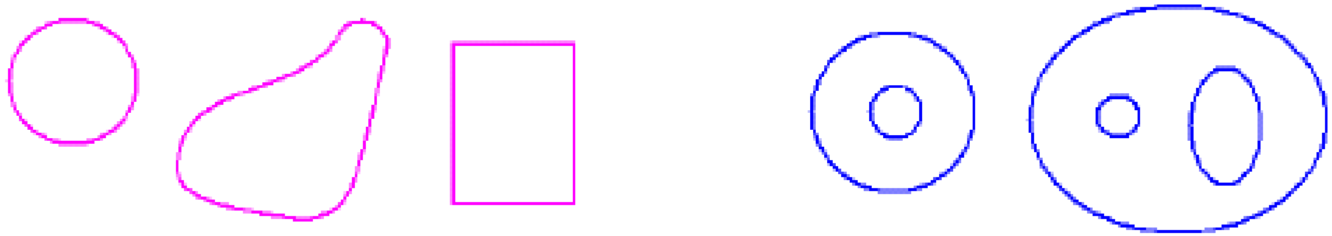
gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 9. Поверхні – визначення і способи задавання

9.1. Топологічні поняття про поверхню

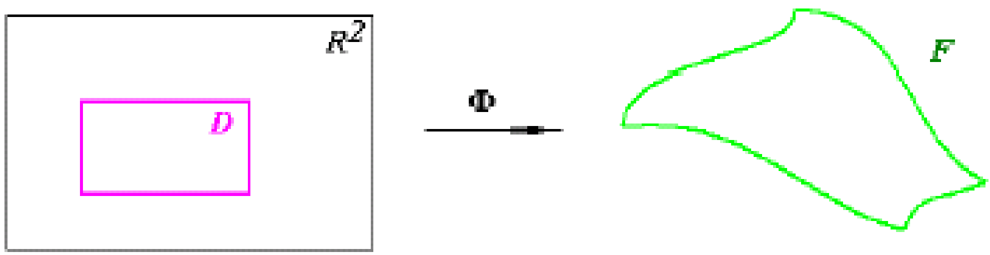
Визначення. *Областю* в $\mathbb{R}^2$ називається підмножина, топологічно еквівалентна відкритому диску (кругу) в $\mathbb{R}^2$.

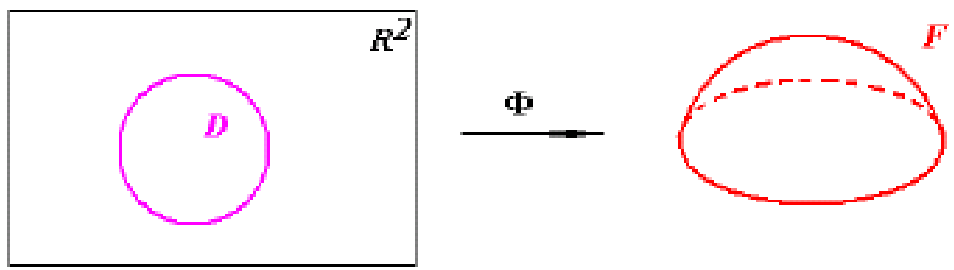


Визначення. *Елементарною поверхнею* F в $\mathbb{R}^3$ називається образ області D в $\mathbb{R}^2$ при її відображенні в $\mathbb{R}^3$, що є гомеоморфізмом (на образ):

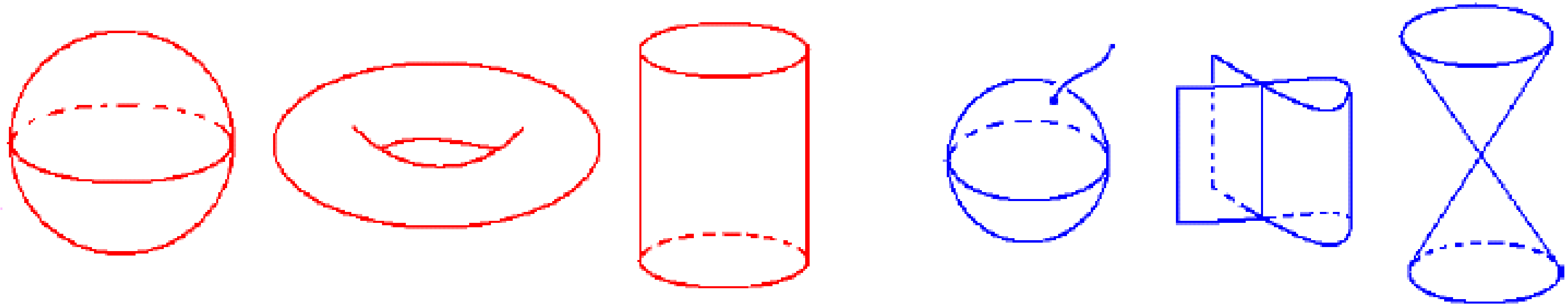
$$\Phi : \ D \subset \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(D) \ = \ F$$

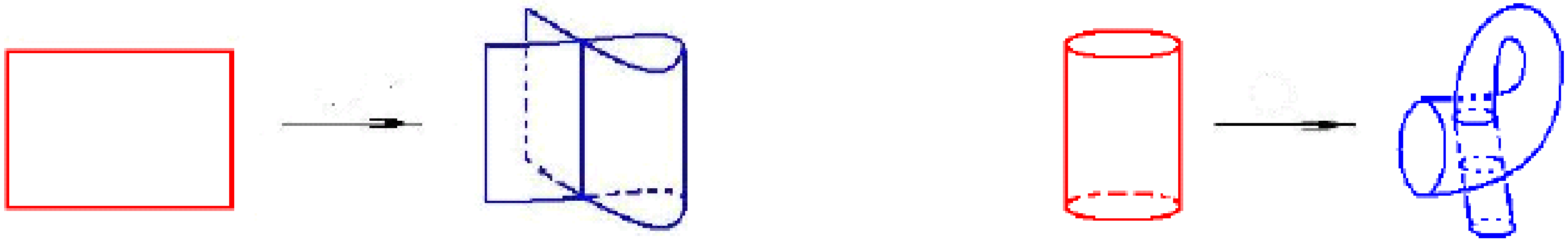




Визначення. *Простою поверхнею* F в $\mathbb{R}^3$ називається зв'язна підмножина в R^3, що є локально елементарною поверхнею: для будь-якої точки P на F існує окіл U в $\mathbb{R}^3$ такий, що перетин $U \cap F$ є елементарною поверхнею.



Визначення. *Загальною поверхнею* в $\mathbb{R}^3$ називається образ простої поверхні при її неперервному відображенні в $\mathbb{R}^3$, що є локальним гомеоморфізмом.



Ілюстрації

9.2. Параметрично задані поверхні

Нехай F - елементарна поверхня в $\mathbb{R}^3$. Вона задається відображенням

$$\Phi: \ D \subset \mathbb{R}^2 \ \to \ \mathbb{R}^3$$

деякої області $D \subset \mathbb{R}^2$ при її відображенні в $\mathbb{R}^3$, тобто,

$$F = \Phi(D).$$

Якщо ввести координати (u^1, u^2) в $\mathbb{R}^2$ і координати (x^1, x^2, x^3) в $\mathbb{R}^3$, то відображення Φ задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

тобто, у векторній формі

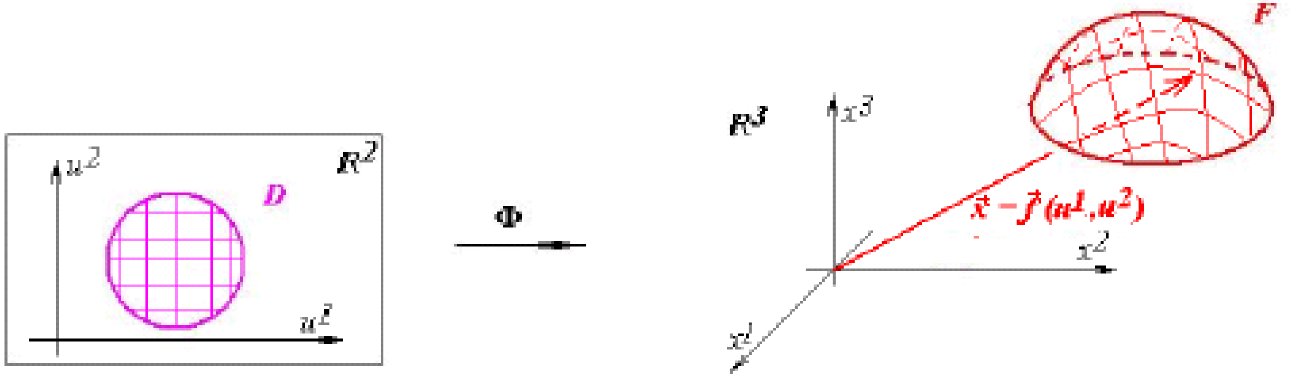
$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

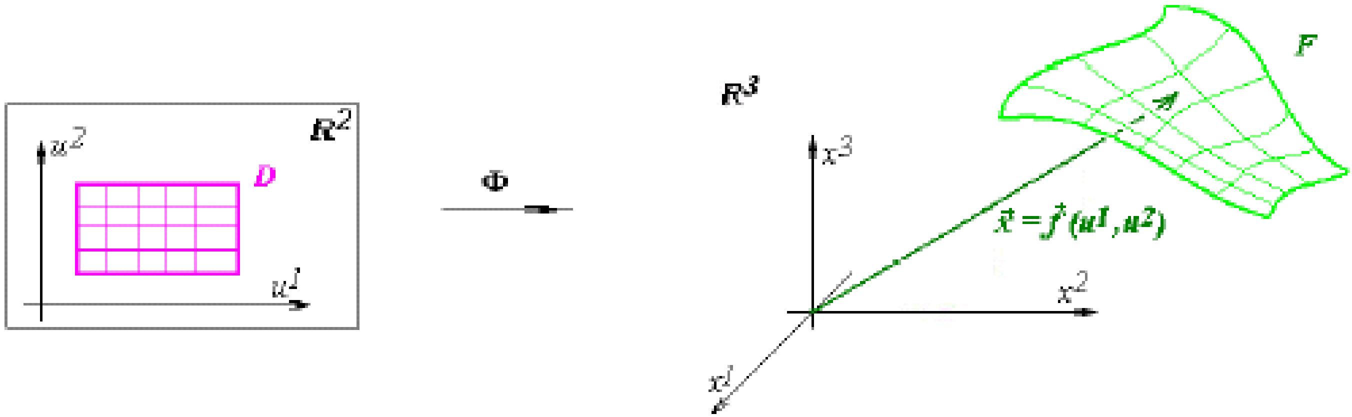
Вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ називається *радіус-вектором* поверхні F.

Область D називається *областю параметрів* (*областю визначення*) поверхні F.

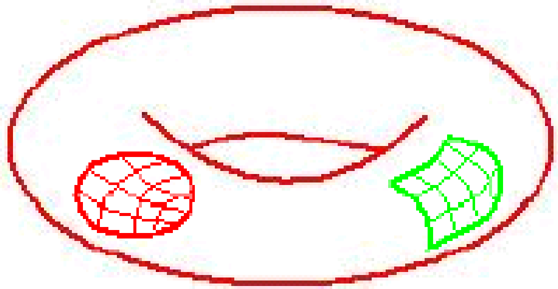
Величини (u^1, u^2) називаються *координатами* на поверхні F.

У сукупності, говорять про *параметризацію* поверхні F.



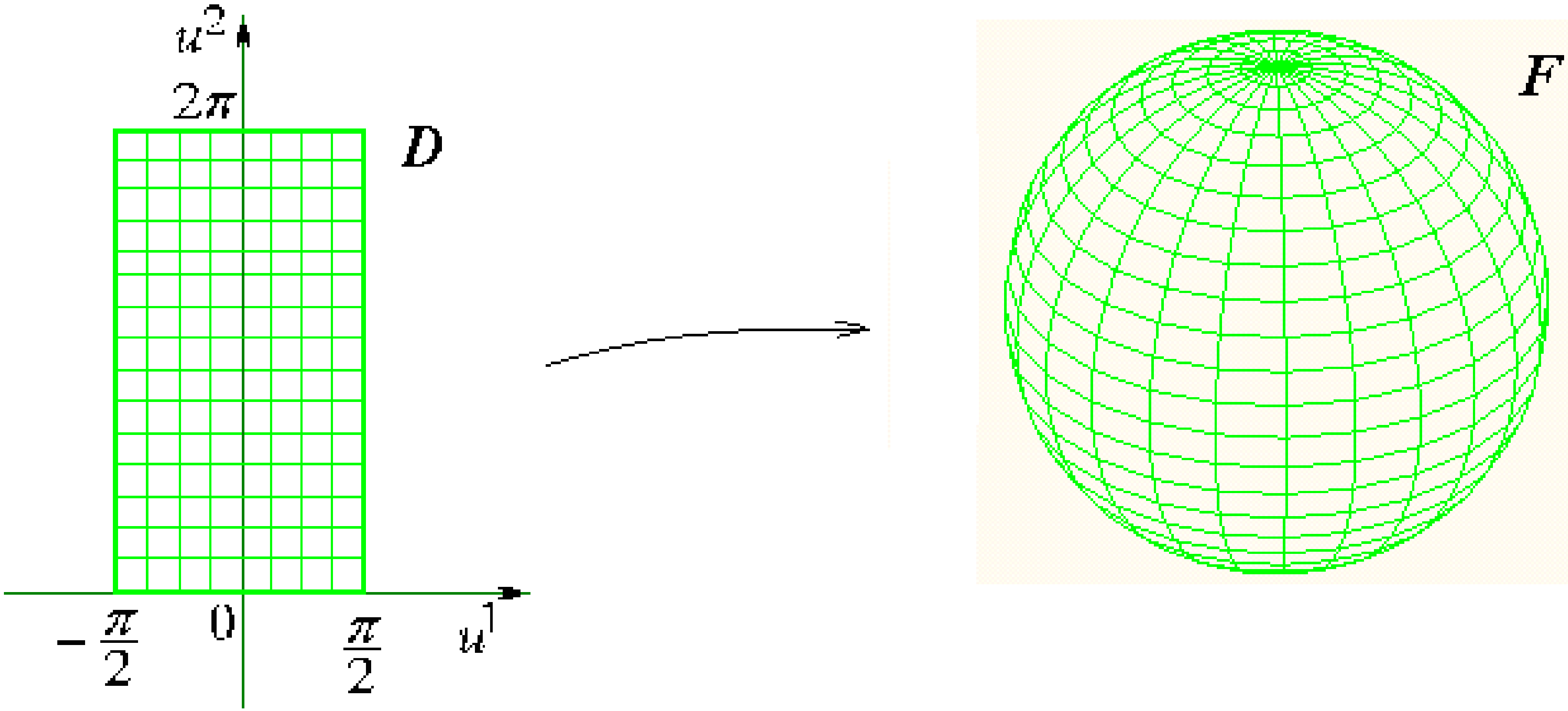


Якщо F - проста або загальна поверхня в R^3, то використовуються ті ж конструкції і поняття, що і для елементарних поверхонь, але - з додаванням терміну *локальний*. Наприклад - *локальні координати*, *локальна параметризація*, *заміна локальних координат* і т.д.



Приклад. Сфера

$$\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 + c^1 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 + c^2 \\ x^3 = r\sin u^1 + c^3 \end{cases}, \qquad D: \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$



Нехай задано неперервне відображення

$$\Phi : \ D \subset \mathbb{R}^2 \to \ \mathbb{R}^3$$

Якщо ввести координати (u^1, u^2) в $\mathbb{R}^2$ і координати (x^1, x^2, x^3) в $\mathbb{R}^3$, то відображення Φ задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

тобто, у векторній формі

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2).$$

Питання. Чи можна, аналізуючи якісь властивості неперервної вектор-функції $\vec{f}(u^1, u^2)$, прийти до висновку, що відображення Φ є гомеоморфізмом (локальним гомеоморфізмом) між D та $F = \Phi(D)$, і таким чином задає елементарну (просту, загальну) поверхню F в $\mathbb{R}^3$?

Визначення. Образ F відображення Φ, представленого вектор-функцією $\vec{f}(u^1,u^2)$, називається *регулярно параметризованою поверхнею*, якщо виконані наступні умови (умови регулярності):

1) вектор-функція $\vec{f}(u^1,u^2)$ є C^m-гладкою, $m \geq 1$;

2) $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ та $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ є лінійно незалежними, тобто $\left[\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right] \neq 0$.

В координатній формі *умови регулярності* мають наступний вигляд:

1) координатні функції $f^1(u^1,u^2), f^2(u^1,u^2), f^3(u^1,u^2)$ є C^m-гладкими,

2) матриця Якобі відображення Φ має ранг 2:

$$Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv 2$$

Приклад. Нехай відображення

$$\Phi: \ D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \varphi(u^1, u^2) \end{cases}$$

тобто, у векторній формі

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1, u^2) \end{pmatrix}.$$

Тоді F називається *явно заданою* поверхнею і представляє собою графік функції $x^3 = \varphi\,(x^1, x^2)$.

Припустимо, що функція $\varphi\,(x^1, x^2)$ є гладкою.

Очевидно, що в цьому випадку маємо

$$Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = Rank\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv 2$$

Отже, явно задана поверхня F є регулярно параметризованою поверхнею, а її клас гладкості відповідає класу гладкості функції φ.

Зауважимо, що явно задана поверхня F є елементарною.

Твердження. *Нехай відображення Φ: $D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, представлене вектор-функцією $\vec{x}=\vec{f}(u^1,u^2)$, задає регулярно параметризовану поверхню F в $\mathbb{R}^3$. Для любої точки p в області визначення D існує окіл U такий, що звуження $\Phi|_U : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ визначає явно задану поверхню в $\mathbb{R}^3$.*

Інакше кажучи, кожна *регулярно параметризована* поверхня локально представляє собою *явно задану* поверхню.

Схема доведення. Оскільки вектор-функція $\vec{f}(u^1,u^2)$ задовольняє умовам регулярності, маємо

$$Rank\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial f^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv 2$$

Тому в кожній точці області D хоча б один з мінорів 2x2 матриці J є ненульовим.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що в точці p має місце

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Застосовуючи теорему про обернену функцію, можемо для функцій $x^1=f^1(u^1,u^2)$, $x^2=f^2(u^1,u^2)$ побудувати (локально!) обернені функції $u^1=v^1(x^1,x^2)$, $u^2=v^2(x^1,x^2)$. Підставляючи в радіус-вектор поверхні F , отримуємо

$$\begin{cases} x^1 = f^1(\nu^1(x^1,x^2),\nu^2(x^1,x^2)) = x^1 \\ x^2 = f^2(\nu^1(x^1,x^2),\nu^2(x^1,x^2)) = x^2 \\ x^3 = f^3(\nu^1(x^1,x^2),\nu^2(x^1,x^2)) = \varphi(x^1,x^2) \end{cases}$$

Таким чином, поверхня F локально представляє собою графік функції $x^3 = \varphi\,(x^1, x^2)$ і є явно заданою поверхнею. ■

Як наслідок, кожна регулярно параметризована поверхня в $\mathbb{R}^3$ представляє собою локально елементарну поверхню.

Висновок. В рамках класичної теорії поверхонь основним об'єктом вивчення є саме регулярно параметризовані поверхні в $\mathbb{R}^3$.

Кожна така поверхня F представляється радіус-вектором $\vec{x}=\vec{f}(u^1,u^2)$, що задовольняє умови регулярності.

Геометричні властивості поверхні F досліджуються саме в термінах вектор-функції $\vec{f}(u^1,u^2)$ із застосуванням методів математичного аналізу.

9.3. Неявно задані поверхні

Визначення. *Неявно заданою* поверхнею в $\mathbb{R}^3$ називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню

$$\Theta(x^1,x^2,x^3) = 0 ,$$

де $\Theta(x^1,x^2,x^3)$ - деяка функція.

Визначення. *Регулярною неявно заданою* поверхнею класу C^m, $m\geq 1$, в $\mathbb{R}^3$ називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню

$$\Theta(x^1,x^2,x^3) = 0 ,$$

де $\Theta(x^1,x^2,x^3)$ - деяка функція, що задовольняє наступні умови:

1) функція $\Theta(x^1,x^2,x^3)$ є гладкою класу C^m, $m\geq 1$,

2) $\mathrm{grad}\,\Theta = (\frac{\partial\Theta}{\partial x^1},\frac{\partial\Theta}{\partial x^2},\frac{\partial\Theta}{\partial x^3}) \neq 0$ в усіх точках, де $\Theta(x^1,x^2,x^3) = 0$.

Приклади:

1) алгебраїчні поверхні першого порядку (площини)

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + c = 0,$$

2) алгебраїчні поверхні другого порядку (еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, циліндри, конуси,...)

$$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 +$$
$$+ a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + c = 0.$$

Твердження. *Нехай F - регулярна неявно задана поверхня класу C^m, $m \geq 1$, в $\mathbb{R}^3$. Для довільної точки P поверхні F існує окіл $W \subset F$, який представляє собою явно задану поверхню класу C^m в $\mathbb{R}^3$.*

Схема доведення. Поверхня F є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють рівнянню

$$\Theta(x^1, x^2, x^3) = 0\,,$$

де $\Theta(x^1, x^2, x^3)$ - деяка гладка функція класу C^m, що задовольняє умові

$$\operatorname{grad}\Theta = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x^1}, \frac{\partial\Theta}{\partial x^2}, \frac{\partial\Theta}{\partial x^3}\right) \neq 0$$

в усіх точках поверхні. Тобто, в точці P хоча б одна з перших похідних функції $\Theta(x^1, x^2, x^3)$ є ненульовою. Нехай $\frac{\partial\Theta}{\partial x^3} \neq 0$.

Застосовуючи *теорему про неявну функцію*, в деякому околі точки P рівняння $\Theta(x^1,x^2,x^3) = 0$ можна розв'язати відносно змінної x^3 і переписати у вигляді $x^3 = \varphi(x^1,x^2)$, де $\varphi(x^1,x^2)$ - деяка функція, клас гладкості якої співпадає з класом гладкості функції $\Theta(x^1,x^2,x^3)$.

Як наслідок, поверхня F буде представлятися, в деякому досить малому околі точки P, як графік функції $\varphi(x^1,x^2)$, тобто, буде явно заданою поверхнею класу C^m.

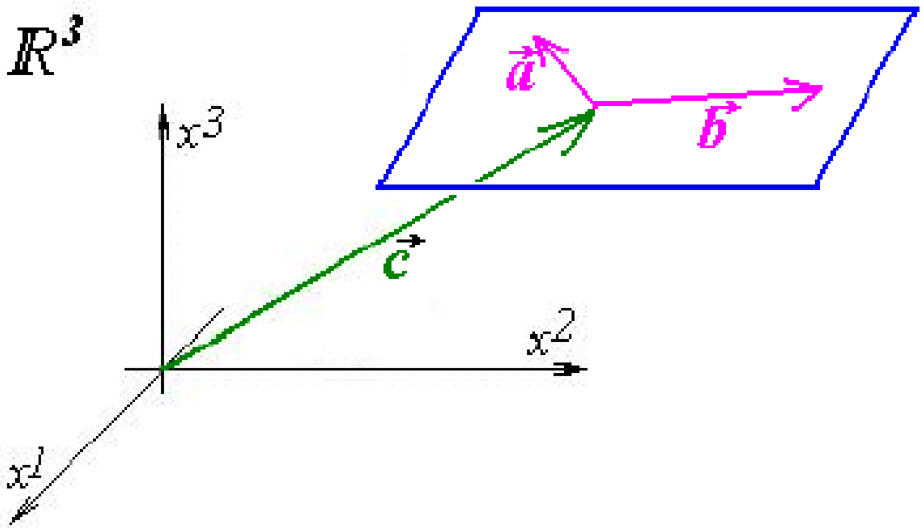
Висновок. Кожна регулярна неявно задана поверхня в $\mathbb{R}^3$ локально представляє собою явно задану поверхню. А явно задані поверхні є частковим випадком регулярно параметризованих поверхонь в $\mathbb{R}^3$. Тому вивчення регулярних неявно заданих поверхонь , з локальної точки зору, зводиться до дослідження регулярно параметризованих поверхонь .

9.4. Конкретні приклади. Спеціальні класи поверхонь.

1. Площина в $\mathbb{R}^3$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{a}\,u^1 + \vec{b}\,u^2 + \vec{c},$$

де $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - базисні вектори у площині, а $\vec{c}$ - радіус-вектор якоїсь точки у площині. Величини u^1, u^2 - координати на площині.



Координати u^1, u^2 визначені в області $D=\mathbb{R}^2$

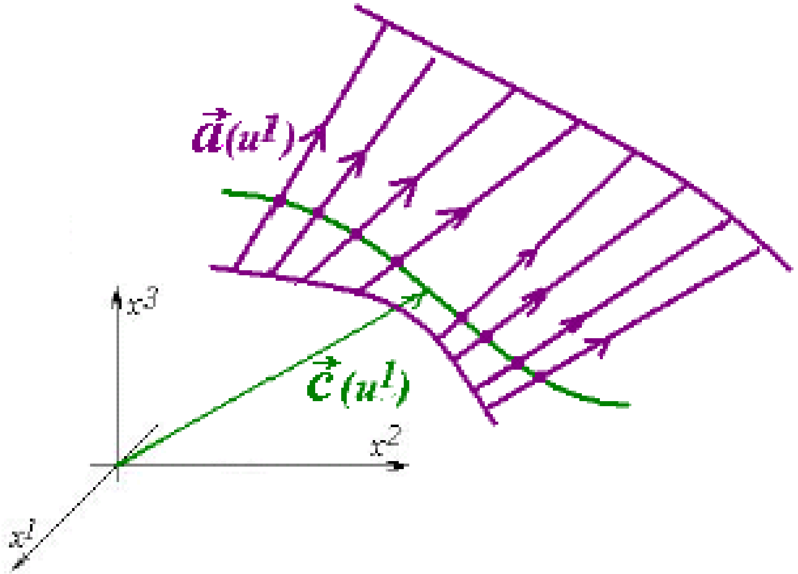
В неявному вигляді площина задається лінійним рівнянням

$$n^1(x^1 - c^1) + n^2(x^2 - c^2) + n^3(x^3 - c^3) = 0$$

2. *Лінійчата поверхня* в $\mathbb{R}^3$ - це поверхня, утворена однопараметричним сімейством прямих в $\mathbb{R}^3$, вона задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{a}(u^1)\, u^2 + \vec{c}(u^1),$$

де $\vec{a}(u^1)$ - напрямний вектор прямих сімейства, $\vec{c}(u^1)$ - радіус-вектор точок на прямих сімейства (по одній точці на кожній прямій).

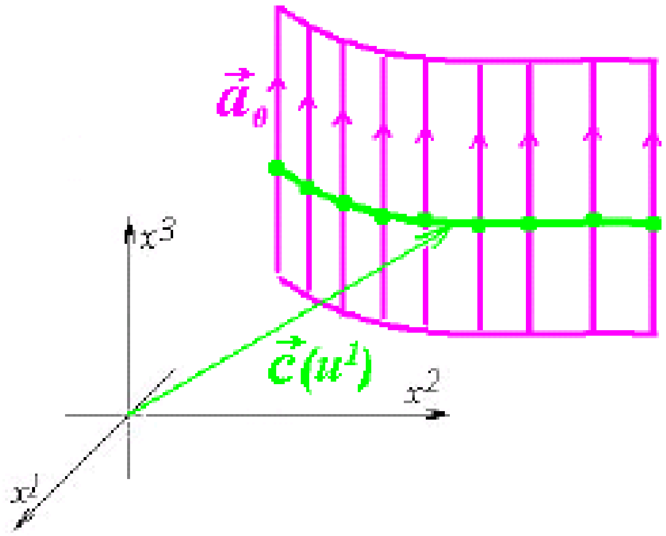


Крива з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{c}(u^1)$ називається *базовою кривою* лінійчатої поверхні.

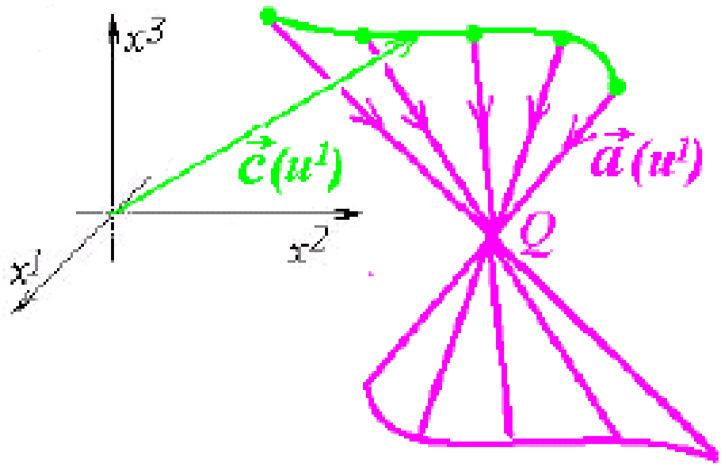
Прямі, що утворюють лінійчату поверхню, називаються *твірними*.

Питання. Як задається лінійчата поверхня неявно?

Частковий випадок 2.1. Якщо $\vec{a}(u^1) \equiv \vec{a}_0$ сталий вектор, тобто, усі твірні мають один і той же напрямний вектор (є паралельними), то відповідна лінійчата поверхня називається *циліндричною*.



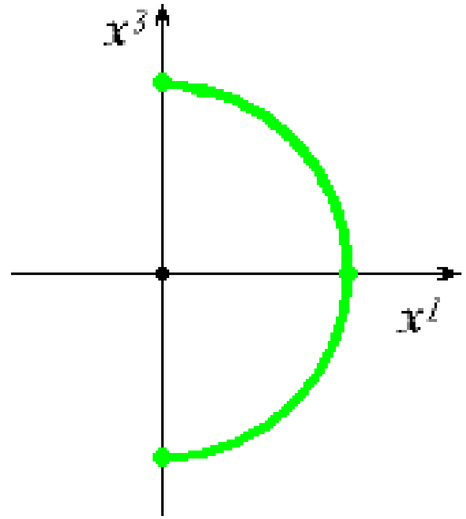
Частковий випадок 2.2. Якщо усі твірні проходять через деяку фіксовану точку Q, то лінійчата поверхня називається *конічною*, а точка Q - її *вершиною*.



Задача. За яких умов на вектор-функції $\vec{a}(u^1)$ і $\vec{c}(u^1)$ лінійчата поверхня буде конічною?

Задача. Як задати циліндричні і конічні поверхні в неявному вигляді?

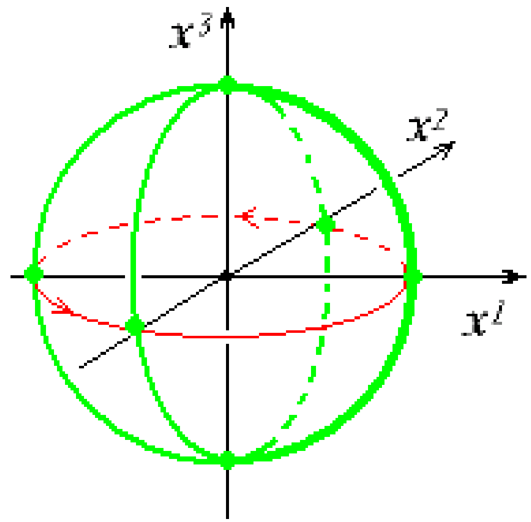
3. *Поверхня обертання* в $\mathbb{R}^3$ – це поверхня, утворена обертанням кривої γ відносно деякої прямої. Якщо система координат в $\mathbb{R}^3$ обрана так, що вісь обертання співпадає з координатною віссю x^3, а крива γ лежить в координатній площині $x^1\, x^3$ і задається параметрично



$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^3 = h(t) \end{cases}, \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^2 = 0 \\ x^3 = h(t) \end{cases}, \quad a < t < b,$$

то відповідна поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix},$$



тобто,

$$\begin{cases} x^1 = r(t)\cos\varphi \\ x^2 = r(t)\sin\varphi \\ x^3 = h(t) \end{cases}, \quad a < t < b, \;\; \alpha < \varphi < \beta.$$

Задача. Зобразити поверхні обертання, утворені обертанням зображених кривих навколо вертикальної координатної осі x^3