347 - див. 983 далі

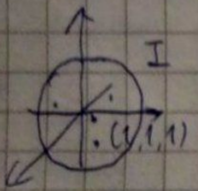
351. - ан-но 350

944(1) Знайти рівняння сфери радіуса 1, що дотикається площин Oxy, Oyz, Oxz

Якщо центр сфери у (a, b, c), то відстані до цих площин дор. 1:

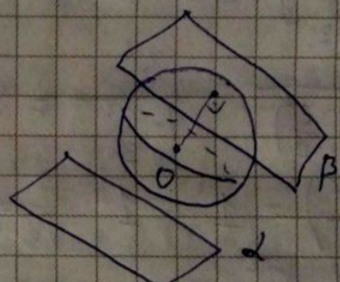
$$|c| = |a| = |b| = 1$$

Тобто $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$ – це 8 сфер, по 1 у кожному октанті.



948. Дані сфера $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ і пл. $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$

1 Знайти площину $\beta \parallel \alpha$, що дотична до σ і таку, що центр σ – між α і β.



$\sigma: (x+3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 + z^2 + 1 = 0$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 24$$

Центр $O(-3, -4, 0)$, радіус $2\sqrt{6}$.

$\alpha \parallel \beta$, тому $\beta: 2x - y + z + C = 0$

σ дотикається до $\beta \Leftrightarrow d(O, \beta) = R = 2\sqrt{6}$:

$$\frac{|2(-3) - (-4) + 0 + C|}{\sqrt{4+1+1}} = 2\sqrt{6}$$

$$|C - 2| = 12$$

$C - 2 = 12$, $C = 14$, $\beta: 2x - y + z + 14 = 0$. Відх. $O: -6 + 4 + 14 = 12 > 0$

$C - 2 = -12$, $C = -10$, $\beta: 2x - y + z - 10 = 0$. Відх. $O: -12 < 0$.

Для α це $-6 + 4 - 1 = -3 < 0$. За умовою знаки різні, тому

$\beta: 2x - y + z + 14 = 0$.

954. Знайти рівняння сфери, що прох. через коло ω

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-40=0 & (\sigma) \\ 2x+2y-z+4=0 & (\alpha) \end{cases}$$

і $O(0,0,0)$

I спосіб – Знайти центр A і радіус R сфери σ

– знайти центр B кола ω як ортог. проекцію A на α

і радіус $r=\sqrt{R^2-AB^2}$

– Шукати центр потрібної сфери σ' як точку A' на прямій l, що прох. через B ортог. до α таку, що $A'O^2 = A'B^2 + r^2 \; (=R'^2)$.

II спосіб Використати рівняння пучка σ і α:

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-40+\lambda(2x+2y-z+4)=0$$

Це пов-на II порядку, що містить усі точки кола ω. Згідно з 942, тоді це сфера (бо не $\varnothing$ і не точка). Прох. через O:

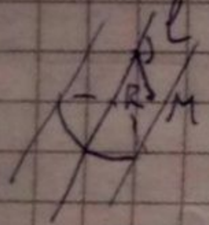
$$-40+4\lambda=0, \quad \lambda=10$$

Отже, рівн. σ': $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-40+10(2x+2y-z+4)=0$

$$x^2+y^2+z^2+22x+16y-6z=0$$

975. Знайти рівняння кругового циліндра радіуса R з віссю

$$l: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$



Це ГМТ M : $d(M, l) = R$. За ф-лою відстані:

$$\frac{\|[r-r_0, (a,b,c)]\|}{\underbrace{\|(a,b,c)\|}_{=\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = R, \quad \text{де} \quad r = (x,y,z), \quad r_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right\|^2 = R^2(a^2+b^2+c^2)$$

976. Знайти рівн. кругового циліндра з віссю $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$, що містить $(1, -2, 1)$.

Просто підставимо вісь у ф-лу з 975:

$$\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y-1 & z+3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right\|^2 = R^2(1+4+4)$$

$$\|(-2y+2-2z-6,\ 2x+z+3,\ 2x-y+1)\|^2 = 9R^2$$

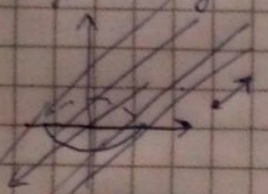
$$(2y+2z+4)^2 + (2x+z+3)^2 + (2x-y+1)^2 = 9R^2$$

Підставляємо точку $(1,-2,1)$:

$$(2)^2 + 6^2 + 5^2 = 9R^2$$

Тобто рівн. $(2y+2z+4)^2 + (2x+z+3)^2 + (2x-y+1)^2 = 65$

979. Знайти рівн. циліндричної поверхні з напрямною $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ (коло), твірні якого утворюють рівні кути з осями коорд.



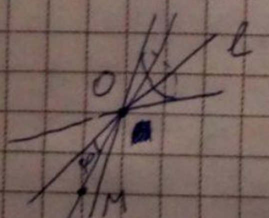
Якщо $a=(\lambda,\mu,\nu)$ – напр. вектор твірних, то його кут з Ox: $\cos\alpha = \frac{\langle a,(1,0,0)\rangle}{|a|\,|(1,0,0)|} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$, ан-но з Oy: $\cos\beta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$ і з Oz: $\cos\gamma = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$ (або просто згадати про напрямні косинуси). Вони рівні $\Rightarrow$ $\lambda=\mu=\nu$. Тому можна взяти $(1,1,1)$. У 975. знаходили рівн. такого циліндра:

$$\left(x-\frac{\lambda z}{\nu}\right)^2 + \left(y-\frac{\mu z}{\nu}\right)^2 = r^2 = 1$$

$$(x-z)^2+(y-z)^2=1$$

$$x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1=0.$$

983. Знайти рівняння кругового конуса з вершиною $O(x_0,y_0,z_0)$, віссю $l \parallel (a,b,c)$ і твірними, що мають з віссю кут φ.



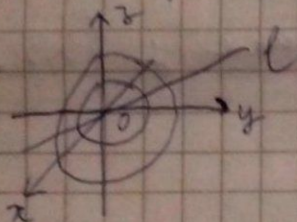
$M \in$ конусу $\Leftrightarrow$ OM – твірна $\Leftrightarrow$ кут між $\overline{OM}$ і (a,b,c) дор. φ або $\pi-\varphi$:

$$\pm\cos\varphi = \frac{\langle \overline{OM},(a,b,c)\rangle}{|\overline{OM}|\,|(a,b,c)|}$$

Для $M(x,y,z)$: $\overline{OM} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$$\cos^2\varphi = \frac{\left(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\right)^2}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)(a^2+b^2+c^2)}$$

986 Знайти круговий конус такий, що Ox, Oy, Oz є твірними, а вісь l проходить у I та VII октантах.



Тобто для напр. вектора (a, b, c) осі l знаки a, b, c рівні. (можемо вважати $a, b, c > 0$) φ - це кут між l і Ox, Oy, Oz, тоді ан-но 979 маємо $a = b = c$, $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, і

$\cos\varphi = \dfrac{\langle (1,1,1), (1,0,0) \rangle}{|(1,1,1)|\,|(1,0,0)|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Вершина O - це точка перетину твірних, тобто $\underset{(x_0, y_0, z_0)}{(0,0,0)}$. Підставимо у ф-лу з 983:

$$\frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)\,3} = \frac{1}{3}$$

$$(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

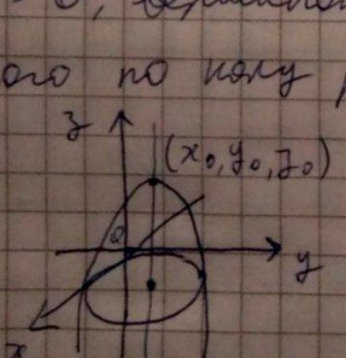
$$xy + yz + xz = 0. \quad \text{(поділили на 2)}$$

987 Показати, що лінія перетину параболічних циліндрів $y^2 = x$, $z^2 = 1 - x$ лежать на круговому циліндрі.

$\forall$ точки M цього перетину $y^2 = x, z^2 = 1 - x \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$.

Це круговий циліндр з віссю Ox радіуса 1.

996 Знайти рівн. параболоїда обертання з параметром $p = 6$, вершиною у I октанті, якщо Oxy перетинає його по колу радіуса 3, що дотикається Ox і Oy.



Oxy перетинає по колу $\Rightarrow$ вісь параболоїда $\parallel Oz$.

Коло має рівн. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ (оскільки вершина (x_0, y_0, z_0) в I окт. $\Rightarrow x_0, y_0, z_0 \geq 0$, і вона проектується у центр. (x_0, y_0) кола).

Тобто $x_0=y_0=3$ => вершина $(3,3,z_0)$.

Канонічний параболоїд: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.

Для пар. обертання $p=q$. У нас вершина у $(3,3,z_0)$, $p=q=6$, і він "дивиться" вниз:

$$\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{6}=-2(z-z_0)$$

~~Підставимо точку (3,0,0) маємо~~ Перетин з Oxy: $z=0$:

$$\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{(y-3)^2}{6}=2z_0$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2=12z_0.$$

Це повинно бути коло $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ => $12z_0=9$, $z_0=\frac{3}{4}$.

Рівн. $(x-3)^2+(y-3)^2=-12\left(z-\frac{3}{4}\right)=-12z+9$

1003. Знайти лінію перетину гіперболоїда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{2}=1$ і площини $x=9$.

Підставимо: $\frac{9^2}{9}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{2}=1$

$$\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{2}=1-9=-8.$$

Тобто це гіпербола $\begin{cases}\frac{y^2}{64}-\frac{z^2}{16}=-1\\ x=9\end{cases}$

1006. Знайти рівн. площини, що $\parallel Oyz$ і перетинає гіперболоїд $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ за гіперболою з дійсною піввіссю 1.

Площина має рівн. $x=C$. Перетнемо:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1\\ x=C\end{cases}$$

$$\frac{y^2}{4}-z^2=1-\frac{C^2}{9}$$

Це гіпербола або пара прямих (при $C=\pm 3$) у площині $x=C$.

При $1-\frac{C^2}{9}>0$ її дійсна вісь $\parallel Oy$:

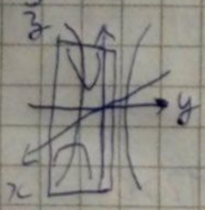
$$\frac{y^2}{4\left(1-\frac{C^2}{9}\right)}-\frac{z^2}{1-\frac{C^2}{9}}=1$$

$$4\left(1-\frac{C^2}{9}\right)=1^2=1,\quad 1-\frac{C^2}{9}=\frac{1}{4},\quad \frac{C^2}{9}=\frac{3}{4},\quad C=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

При $1-\frac{C^2}{9}<0$ дійсна вісь $\parallel Oz$:

$$-\frac{y^2}{4\left(\frac{C^2}{9}-1\right)}+\frac{z^2}{\frac{C^2}{9}-1}=1$$

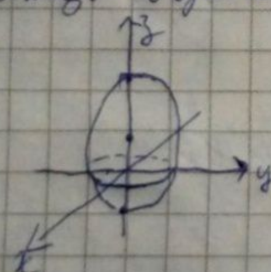
$$\frac{C^2}{9}-1=1,\quad \frac{C^2}{9}=2,\quad C=\pm 3\sqrt{2}.$$



Тобто при $C=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$ перетини $\begin{cases}y^2-4z^2=1\\ x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

при $C=\pm 3\sqrt{2}$: $\begin{cases}-4y^2+z^2=1\\ C=\pm 3\sqrt{2}\end{cases}$

1012. Знайти рівн. еліпсоїда з вершинами $(0,0,6)$ і $(0,0,-2)$, якщо відомо, що Oxy перетинає його по колу радіуса 3.



Центр лежить на Oz: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$

Центр — посередині між вершинами: $z_0 = \frac{6-2}{2} = 2$, $c = 6-2 = 4$
(або отримаємо $c=4$, підставивши $(0,0,6)$).   піввісь

Перетин з Oxy: $z=0$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(0-2)^2}{c^2=16}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

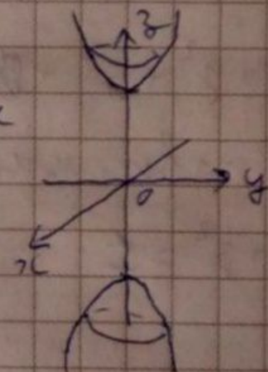
Це коло при $a=b$:

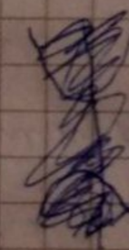
$$x^2+y^2=\frac{3}{4}a^2$$

Радіус 3: $\frac{3}{4}a^2=9 \Rightarrow a^2=12$. Отже, рівн.

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{12}+\frac{(z-2)^2}{16}=1$$

1013. Знайти рівн. двопорожнинного гіперболоїда з вершинами $(0,0,\pm6)$, якщо Oxz і Oyz – його площини симетрії і перетинають його по гіперболах, асимптоти яких утв. кути $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{\pi}{3}$ відп. з Oz.

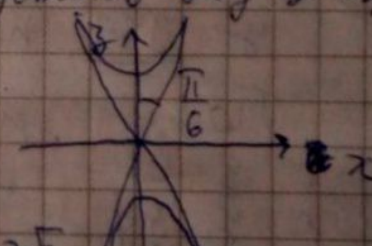




Оскільки центр у $\left(0,0,\frac{6-6}{2}\right)=(0,0,0)$, а Oxz і Oyz – пл. симетрії, це канонічний 2-порожн. гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

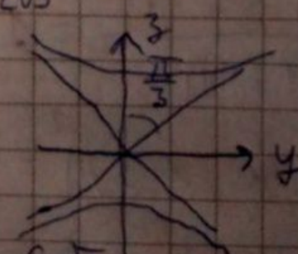
Оскільки вершини $(0,0,\pm6)$, $c=6$ (відстань від центру до верш.)



Переріз з Oxz: $y=0$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{36}=-1$.

Асимптоти $z=\pm\frac{6}{a}x \Leftrightarrow x=\pm\frac{a}{6}z$,

тобто $\frac{a}{6}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt3}$ за умовою $\Rightarrow a=2\sqrt3$



Переріз з Oyz: $x=0$: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{36}=-1$

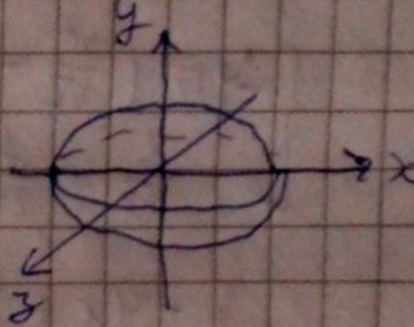
Асимптоти $z=\pm\frac{6}{b}y \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{6}z$,

тобто $\frac{b}{6}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt3$ за умовою $\Rightarrow b=6\sqrt3$.

Отже, рівн. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{108}-\frac{z^2}{36}=-1$.

1018. Знайти рівн. еліпсоїда, якщо його осі збігаються з осями координат, він проходить через коло

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x=z \end{cases}$$ і точку $(3,1,1)$.



Умови означає, що еліпсоїд наступний:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Підставимо точку: $\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$.

Перетин з площиною $x=z$: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=z \end{cases}$

Повинен бути такий же, що у сфери $x^2+y^2+z^2=9$: $\begin{cases} 2x^2+y^2=9 \\ x=z \end{cases}$

Тобто $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{b^2}=\frac{1}{9} \Rightarrow b=3$ і $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{2}{9}$.

Підставимо $b=3$ і $\frac{1}{c^2}=\frac{2}{9}-\frac{1}{a^2}$ у попер. рівн.:

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{a^2}=1$$

$$\frac{8}{a^2}=\frac{2}{3}$$

$$a^2=12.$$

$\frac{1}{c^2}=\frac{2}{9}-\frac{1}{12}=\frac{5}{36}$. Рівн. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}+\frac{5z^2}{36}=1$.