Pr. (властивості $\nabla, B, A, \nabla^{\perp}$)

1. ∇ – ріманова зв'язність індукованої метрики g (першої ф.ф. (M, r)), тобто

a. $\nabla_{fX+hY}Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z,$

b. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

c. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

d. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$

e. $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$

2. B – білінійна (відносно множення на функції на M) симетрична ''форма'' (зі значеннями у нормальних полях), тобто

a. $B(fX + hY, Z) = fB(X, Z) + hB(Y, Z),$

b. $B(X, fY + hZ) = fB(X, Y) + hB(X, Z),$

c. $B(X, Y) = B(Y, X).$

3. A – лінійне за обома аргументами (відносно множення на функції на M), і для будь-якого ξ A_ξ – ''самоспряжений оператор'' відносно g, тобто

$$\begin{aligned}
&\underline{a.}\quad A_{f\xi+h\eta}X = fA_\xi X + hA_\eta X,\\
&\underline{b.}\quad A_\xi(fX+hY) = fA_\xi X + hA_\xi Y,\\
&\underline{c.}\quad g(A_\xi X, Y) = g(X, A_\xi Y).
\end{aligned}$$

4. $\nabla^\perp$ – ''зв'язність на розшаруванні NM'', що ''узгоджена з $\overline{g}$'', тобто

$$\begin{aligned}
&\underline{a.}\quad \nabla^\perp_{fX+hY}\xi = f\nabla^\perp_X\xi + h\nabla^\perp_Y\xi,\\
&\underline{b.}\quad \nabla^\perp_X(\xi+\eta) = \nabla^\perp_X\xi + \nabla^\perp_X\eta,\\
&\underline{c.}\quad \nabla^\perp_X(f\xi) = f\nabla^\perp_X\xi + X(f)\xi,\\
&\underline{d.}\quad X(\overline{g}(\xi,\eta)) = \overline{g}(\nabla^\perp_X\xi,\eta) + \overline{g}(\xi,\nabla^\perp_X\eta).
\end{aligned}$$

<u>5.</u> A і B узгоджені наступним чином:

$$\overline{g}(B(X,Y),\xi) = g(A_\xi X, Y).$$

Це все повинне виконуватися для будь-яких полів X, Y, Z, нормальних полів ξ, η і функцій f, h на M відповідних гладкостей.

▶ Використаємо властивості $\overline{\nabla}$.

Нехай X, Y, Z – поля на M, $p \in M$, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ – продовження $dr(X), dr(Y), dr(Z)$ відповідно на деякий окіл V точки $r(p)$. Нехай також f, h – функції на M, а $\overline{f}, \overline{h}$ – їхні відповідні продовження на V, тобто для будь-якої $q \in r^{-1}(V)$

$$\overline{f}(r(q)) = f(q), \quad \overline{h}(r(q)) = h(q).$$

(Впр. Такі продовження існують.) Тоді на V виконується властивість $\overline{\nabla}$:

$$\overline{\nabla}_{\overline{f}\,\overline{X}+\overline{h}\,\overline{Y}}\overline{Z} = \overline{f}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} + \overline{h}\,\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}.$$

Зауважимо, що поле $\overline{f}\,\overline{X} + \overline{h}\,\overline{Y}$ продовжує $f\,dr(X) + h\,dr(Y) = dr(fX + hY)$ на V: для будь-якої $q \in r^{-1}(V)$

$$(\overline{f}\,\overline{X} + \overline{h}\,\overline{Y})_{r(q)} = \overline{f}(r(q))\overline{X}_{r(q)} + \overline{h}(r(q))\overline{Y}_{r(q)} =$$

$$f(q)d_q r(X_q) + h(q)d_q r(Y_q) = (f\,dr(X) + h\,dr(Y))_q,$$

тому можна записати $\overline{f}\,\overline{X} + \overline{h}\,\overline{Y} = \overline{fX + hY}$. Отже, для будь-якої $p \in M$ за означенням $\overline{\nabla}_X Y$ та з властивості $\overline{\nabla}$ вище маємо

$$\left(\overline{\nabla}_{fX+hY}Z\right)_p = \left(\overline{\nabla}_{\overline{fX+hY}}\overline{Z}\right)_{r(p)} = \left(\overline{f}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} + \overline{h}\,\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z}\right)_{r(p)} =$$

$$= \overline{f}(r(p))(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})_{r(p)} + \overline{h}(r(p))(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})_{r(p)} =$$

$$= f(p)(\overline{\nabla}_X Z)_p + h(p)(\overline{\nabla}_Y Z)_p.$$

Тобто

$$\overline{\nabla}_{fX+hY} Z = f\overline{\nabla}_X Z + h\overline{\nabla}_Y Z.$$

У кожній точці $p \in M$ спроєктуємо цю рівність на $d_p r(T_p M)$. Тоді за розкладенням Гаусса

$$dr(\nabla_{fX+hY} Z) = f\,dr(\nabla_X Z) + h\,dr(\nabla_Y Z).$$

Оскільки $d_p r$ – ін'єкція для будь-якої p, звідси маємо

$$\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z,$$

тобто 1.a. Тепер для кожної $p \in M$ спроєктуємо на $N_p M$. За розкладенням Гаусса

$$B(fX + hY, Z) = fB(X, Z) + hB(Y, Z).$$

Це <u>2.a.</u> Далі діємо аналогічно. З властивості $\overline{\nabla}$

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y}+\overline{Z}) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}$$

і спостереження $\overline{Y}+\overline{Z} = \overline{Y+Z}$ (бо $\overline{Y}+\overline{Z}$ продовжує $dr(Y)+dr(Z) = dr(Y+Z)$) аналогічно отримуємо

$$\overline{\nabla}_X(Y+Z) = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z.$$

проєктуючи у кожній точці на дотичний і нормальний компоненти, отримуємо відповідно

$$dr(\nabla_X(Y+Z)) = dr(\nabla_X Y) + dr(\nabla_X Z),$$

звідки випливає властивість <u>1.b.</u>

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

і

$$B(X, Y+Z) = B(X,Y) + B(X,Z),$$

тобто ”половину” властивості 2.b. Використаємо наступну властивість $\overline{\nabla}$:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{f}\,\overline{Y}) = \overline{f}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y}.$$

Впр. $\overline{X}(\overline{f})(r(p)) = X(f)(p)$ (доводиться схоже на один з етапів доведення Lem. вище).

Крім того, $\overline{f}\,\overline{Y} = \overline{fY}$. Тому аналогічно до міркувань вище маємо

$$\overline{\nabla}_X(fY) = f\overline{\nabla}_X Y + X(f)dr(Y).$$

проєктуючи на дотичні і нормальні компоненти, маємо відповідно

$$dr(\nabla_X(fY)) = f\,dr(\nabla_X Y) + X(f)dr(Y),$$

звідки випливає <u>1.c.</u>

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

і

$$B(X, fY) = fB(X, Y) + 0,$$

що завершує доведення <u>2.b.</u>

Тепер скористаємося тим, що $\overline{\nabla}$ має нульовий скрут:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} = [\overline{X}, \overline{Y}].$$

Покажемо, що

$$[\overline{X}, \overline{Y}]_{r(p)} = d_p r([X, Y]_p).$$

Дійсно, введемо в околах p і $r(p)$ локальні координати $(u^1, \dots, u^n)$ і $(x^1, \dots, x^{n+q})$ відповідно, як у доведенні <u>Lem.</u> вище. Нехай $[\overline{X}, \overline{Y}] = [\overline{X}, \overline{Y}]^b \frac{\partial}{\partial x^b}$ (коефіцієнти для інших полів позначаємо як у <u>Lem.</u>) Тоді за локальною формулою для дужки Лі у точках образу підмноговида маємо для будь-якого індекса b від 1 до $n+q$

$$[\overline{X},\overline{Y}]^b(u^1,\ldots,u^n,0,\ldots,0)=$$

$$=\overline{X}^a(u^1,\ldots,u^n,0,\ldots,0)\frac{\partial\overline{Y}^b}{\partial x^a}(u^1,\ldots,u^n,0,\ldots,0)-$$

$$-\overline{Y}^a(u^1,\ldots,u^n,0,\ldots,0)\frac{\partial\overline{X}^b}{\partial x^a}(u^1,\ldots,u^n,0,\ldots,0).$$

Використовуючи умови продовження і міркування з доведення Lem., отримуємо, що це дорівнює

$$X^i(u^1,\ldots,u^n)\frac{\partial\overline{Y}^b}{\partial x^i}(u^1,\ldots,u^n,0,\ldots,0)-$$

$$-Y^i(u^1,\dots,u^n)\frac{\partial\overline{X}^b}{\partial x^i}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \left(X^i\,\frac{\partial Y^b}{\partial u^i} - Y^i\,\frac{\partial X^b}{\partial u^i}\right)(u^1,\dots,u^n), b = \overline{1,n}, \\ 0, b = \overline{n+1,n+q}. \end{array}\right. =$$

$$= (dr([X,Y]))^b(u^1,\dots,u^n),$$

що й потрібно було показати.

Використовуючи цю рівність, отримуємо

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = dr([X,Y]).$$

проєктуючи на дотичні і нормальні компоненти, отримуємо відповідно

$$dr(\nabla_X Y) - dr(\nabla_Y X) = dr([X,Y]),$$

звідки маємо 1.d.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

і

$$B(X, Y) - B(Y, X) = 0,$$

тобто 2.c.

Нарешті, маємо умову узгодження $\overline{\nabla}$ з метрикою $\overline{g}$:

$$\overline{X}(\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z})) = \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}) + \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}).$$

Це рівність функцій на V. Перш за все, зауважимо, що функція $\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z})$ продовжує $g(Y, Z)$, бо для будь-якої $q \in r^{-1}(V)$

$$\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z})(r(q)) = \overline{g}_{r(q)}\left(\overline{Y}_{r(q)}, \overline{Z}_{r(q)}\right) =$$

$$= \overline{g}_{r(q)} \left(d_q r(Y_q), d_q r(Z_q)\right) = g_q(Y_q, Z_q) = g(Y, Z)(q)$$

за означенням першої ф.ф. Тому з Впр. вище маємо

$$\overline{X}(\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z}))(r(p)) = X(g(Y, Z))(p).$$

Для першого доданку правої частини з означень випливає

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z})(r(p)) = \overline{g}_{r(p)} \Big((\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})_{r(p)}, \overline{Z}_{r(p)} \Big) =$$

$$= \overline{g}_{r(p)} \Big((\overline{\nabla}_X Y)_p, d_p r(Z_p) \Big) = [\text{розкладення Гаусса}] =$$

$$= \overline{g}_{r(p)} \left(d_p r\left((\nabla_X Y)_p\right) + B(X, Y)_p, d_p r(Z_p)\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} B(X, Y)_p \in N_p M, \\ d_p r(Z_p) \in d_p r(T_p M) \end{array} \right] = \overline{g}_{r(p)} \left(d_p r\left((\nabla_X Y)_p\right), d_p r(Z_p)\right) =$$

$$= g_p\left((\nabla_X Y)_p, Z_p\right) = g(\nabla_X Y, Z)(p)$$

згідно з означенням першої ф.ф. Аналогічно перетворюючи другий доданок, отримуємо, що у кожній $p \in M$ вірно

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

тобто 1.е.

Аналогічно використовуємо властивості $\overline{\nabla}$ для нормальних полів ξ, η та їхніх продовжень $\overline{\xi}, \overline{\eta}$ відповідно. Так, з

$$\overline{\nabla}_{\overline{f}\,\overline{X}+\overline{h}\,\overline{Y}}\overline{\xi} = \overline{f}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\xi} + \overline{h}\,\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\xi}$$

отримуємо

$$\overline{\nabla}_{fX+hY}\xi = f\overline{\nabla}_X\xi + h\overline{\nabla}_Y\xi,$$

і згідно з розкладенням Вейнгартена відповідні проєкції мають вигляд

$$-dr(A_\xi(fX + hY)) = -fdr(A_\xi X) - hdr(A_\xi Y),$$

звідки маємо 3.b.

$$A_\xi(fX + hY) = fA_\xi X + hA_\xi Y,$$

та 4.a.

$$\nabla^\perp_{fX+hY}\xi = f\nabla^\perp_X\xi + h\nabla^\perp_Y\xi.$$

З

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\bar{\xi} + \overline{\eta}) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\xi} + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\eta}$$

маємо

$$\overline{\nabla}_X(\xi + \eta) = \overline{\nabla}_X\xi + \overline{\nabla}_X\eta.$$

проєкції:

$$-dr(A_{\xi+\eta}X) = -dr(A_\xi X) - dr(A_\eta X),$$

що дає частину <u>3.a.</u>

$$A_{\xi+\eta}X = A_\xi X + A_\eta X,$$

і <u>4.b.</u>

$$\nabla^\perp_X(\xi+\eta) = \nabla^\perp_X\xi + \nabla^\perp_X\eta.$$

Рівність

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{f}\,\overline{\xi}) = \overline{f}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\xi + \overline{X}(\overline{f})\overline{\xi}$$

дає

$$\overline{\nabla}_X(f\xi) = f\overline{\nabla}_X\xi + X(f)\xi,$$

і проєкції мають вигляд

$$-dr(A_{f\xi}X) = -fdr(A_\xi X) + 0,$$

що завершує доведення <u>3.a.</u>:

$$A_{f\xi}X = fA_\xi X,$$

та <u>4.c.</u>

$$\nabla^\perp_X(f\xi) = f\nabla^\perp_X\xi + X(f)\xi.$$

Тепер ще раз використаємо узгодженість $\overline{\nabla}$ з $\overline{g}$:

$$\overline{X}(\overline{g}(\bar{\xi},\overline{\eta})) = \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\xi},\overline{\eta}) + \overline{g}(\bar{\xi},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\eta}).$$

Оскільки функція $\overline{g}(\bar{\xi},\overline{\eta})$ продовжує $\overline{g}(\xi,\eta)$, з <u>Впр.</u> вище маємо у кожній $p \in M$ для лівої частини

$$\overline{X}(\overline{g}(\bar{\xi},\overline{\eta}))(r(p)) = X(\overline{g}(\xi,\eta))(p),$$

а для першого доданку правої –

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\xi},\overline{\eta})(r(p)) = \overline{g}_{r(p)}\left((\overline{\nabla}_{\overline{X}}\bar{\xi})_{r(p)},\overline{\eta}_{r(p)}\right) =$$

$$= \overline{g}_{r(p)}\left((\overline{\nabla}_X \xi)_p, \eta_p\right) = [\text{розкладення Вейнгартена}] =$$

$$= \overline{g}_{r(p)}\left(-d_p r\left((A_\xi X)_p\right) + (\nabla^{\perp}_X \xi)_p, \eta_p\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} (\nabla^{\perp}_X \xi)_p \in N_p M, \\ -d_p r\left((A_\xi X)_p\right) \in d_p r(T_p M) \end{array}\right] = \overline{g}_{r(p)}\left((\nabla^{\perp}_X \xi)_p, \eta_p\right) =$$

$$= \overline{g}(\nabla^{\perp}_X \xi, \eta)(p).$$

І аналогічно для другого доданку, звідки маємо 4.d.

$$X(\overline{g}(\xi, \eta)) = \overline{g}(\nabla^{\perp}_X \xi, \eta) + \overline{g}(\xi, \nabla^{\perp}_X \eta).$$

Запишемо умову узгодженості ще раз, тепер для дотичного і нормального полів:

$$\overline{X}(\overline{g}(\overline{Y}, \overline{\xi})) = \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{\xi}) + \overline{g}(\overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\xi}).$$

Знову ж $\overline{g}(\overline{Y},\overline{\xi})$ продовжує $\overline{g}(dr(Y),\xi)$, тому з <u>Впр.</u> вище маємо у кожній $q \in r^{-1}(V)$

$$\overline{X}(\overline{g}(\overline{Y},\overline{\xi}))(r(q)) = X(\overline{g}(dr(Y),\xi))(q) = 0,$$

бо це ортогональні у кожній точці поля. Отже, ліва частина у умові узгодженості нульова. Перепишемо праву, використавши ті ж міркування, що і раніше:

$$0 = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \xi) + \overline{g}(dr(Y), \overline{\nabla}_X \xi).$$

Підставимо сюди розкладення Гаусса і Вейнгартена:

$$0 = \overline{g}\left(dr(\nabla_X Y) + B(X,Y), \xi\right) + \overline{g}\left(dr(Y), -dr(A_\xi X) + \nabla^{\perp}_{X}\xi\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} dr(\nabla_X Y) \perp \xi, \\ dr(Y) \perp \nabla^{\perp}_{X}\xi \end{array}\right] = \overline{g}\left(B(X,Y), \xi\right) - \overline{g}\left(dr(Y), dr(A_\xi X)\right) =$$

$$= [\underline{\text{def.}}\ \text{першої ф.ф.}] = \overline{g}\left(B(X,Y), \xi\right) - g\left(Y, A_\xi X\right).$$

Це 5. Разом з 2.с. воно дає 3.с. ◀

Запис розкладень Гаусса і Вейнгартена у локальних координатах

Зафіксуємо стандартні позначення: у околі точки $p \in M$ для підмноговида (M, r) у $(\overline{M}, \overline{g})$ будемо розглядати локальні координати $(u^1, \dots, u^n)$, у околі $r(p)$ – $(x^1, \dots, x^{n+q})$ (але без усяких додаткових умов, на відміну від доведення Lem. вище). Домовимось, що $i, j, k, \dots = \overline{1, n}$, $a, b, c, \dots = \overline{1, n+q}$, $\alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{1, q}$. Нехай $\{\overline{g}_{ab}\}$ і $\{g_{ij}\}$ – коефіцієнти метрик $\overline{g}$ і g (першої ф.ф. підмноговида) відповідно.

Згадаємо також, що поля

$$\left\{ r_i = dr\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = r_i^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right\}_{i=1}^{n},$$

де $r_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}$ – частинні похідні координатних функцій локального задання r, утворюють базис $d_o r(T_o M)$ у кожній точці o, де діють відповідні координати.

Lem. Для k-гладкого (M, r) на деякому околі кожної $p \in M$ існують $(k-1)$-гладкі нормальні поля $\{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$, що утворюють у кожній точці цього околу ортонормований базис нормального простору, тобто

$$\overline{g}(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

на цьому околі для будь-яких α, β.

▶ Нехай $U \ni p$, $V \ni r(p)$ – відповідні координатні околи. Будемо шукати нормальні поля на відкритому околі $U \cap r^{-1}(V) \ni p$ вигляду $\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Умови нормальності мають вигляд $\overline{g}(r_i, \xi) = 0$, тобто

$$\overline{g}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \xi^b = 0$$

для будь-якого i від 1 до n. У кожній точці $U \cap r^{-1}(V)$ це система з n лінійних рівнянь від $n+q$ невідомих $\xi^1, \ldots, \xi^{n+q}$, невироджена, бо $\{r_i\}_{i=1}^n$ – лінійно незалежна система, а матриця $\overline{g}$ додатно визначена. Отже, ця система має q-вимірний простір розв'язків. Знайдемо у кожній точці базис цього простору:

– виберемо фундаментальну систему розв'язків методом Гаусса;

– ортогоналізуємо її (відносно $\overline{g}$ у точці) методом Грама – Шмідта.

Отримаємо $\left\{\xi_\alpha = \xi_\alpha^a \frac{\partial}{\partial x^a}\right\}_{\alpha=1}^q$. Оскільки на обох етапах, щоб знайти $\{\xi_\alpha^a\}$, ми застосовували однозначно визначені ∞-гладкі перетворення до $(k-1)$-гладких $\left\{\overline{g}_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right\}$ (Впр.), такі поля $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ коректно визначені, $(k-1)$-гладкі та задовольняють умові. ◀

Ex. Для $n=2$, $q=1$ і евклідового $(\overline{M}, \overline{g}) = E^3$ з декартовими координатами маємо $\xi = \xi_1 = \frac{[r_1, r_2]}{|[r_1, r_2]|}$.

Впр. Записати явну локальну формулу для одиничного нормального поля $\xi = \xi_1$ гіперповерхні у E^{n+1} для довільного n, узагальнивши векторний добуток.

Отже, запишемо розкладення Гаусса локально для базисних полів $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$. Щоб знайти його ліву частину $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j}$, треба продовжити $dr\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = r_i$, $dr\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = r_j$ на окіл $r(p)$ полями $\overline{X} = \overline{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ і $\overline{Y} = \overline{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ відповідно. Це означає, що у точках $r(M)$ $\overline{X}^a = r_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}$ для будь-якого a, і аналогічно для $\overline{Y}$.

Як і раніше, будемо позначати через $\left\{\overline{\Gamma}_{ab}^c\right\}$ символи Кристоффеля рімановоï зв'язності $\overline{\nabla}$ метрики $\overline{g}$. Локальна формула коваріантного диференціювання:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = \overline{X}^a \left(\frac{\partial \overline{Y}^c}{\partial x^a} + \overline{\Gamma}_{ab}^c \overline{Y}^b\right) \frac{\partial}{\partial x^c}.$$

У точках $r(M)$ маємо:

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \overline{Y}^c}{\partial x^a} + \overline{\Gamma}_{ab}^c \frac{\partial x^b}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^c}.$$

Зауважимо, що тут за ланцюговим правилом перша з сум за індексом a дає похідні композицій $\overline{Y}^c \circ r = r^c_j = \frac{\partial x^c}{\partial u^j}$ (умова продовження), тому

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{\partial(\overline{Y}^c \circ r)}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^c} + \overline{\Gamma}^c_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial x^c} =$$

$$= \left(r^c_{ij} + \overline{\Gamma}^c_{ab} r^a_i r^b_j \right) \frac{\partial}{\partial x^c},$$

де будемо позначати $r_{ij} := r^c_{ij} \frac{\partial}{\partial x^c} := \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial}{\partial x^c}$. У цьому виразі $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ – це насправді композиції $\overline{\Gamma}^c_{ab} \circ r$, але явно ми це писати не будемо. Усю суму $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j}$ позначимо через $r_{j,i} = r_{i,j}$ (в силу симетрій, оскільки гладкість $k \geqslant 2$) – коваріантна похідна r_j за u^i (або r_i за u^j). Вона збігається з r_{ij} для плаского зв'язності $\overline{\nabla}$ і локальних координат, у яких $\overline{\Gamma}^c_{ab} = 0$.

Першим доданком у правій частині розкладення Гаусса буде

$$dr\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = dr\left(\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \Gamma^k_{ij} r_k,$$

де через $\left\{\Gamma^k_{ij}\right\}$ будемо позначати символи Кристоффеля індукованої зв'язності ∇ підмноговида (вона ж ріманова зв'язність першої ф.ф. g).

Аналогічно до "справжніх" форм на многовиді, з властивостей лінійності другої ф.ф. B підмноговида у Pr.2. вище випливає, що B однозначно визначає у кожній точці $p \in M$ білінійне відображення

$$B_p \colon T_pM \times T_pM \to N_pM$$

таке, що $(B(X,Y))_p = B_p(X_p, Y_p)$ для будь-яких гладких полів X і Y на M (Впр.)

Зокрема, можна для $i, j = \overline{1,n}$ у кожній точці координатного околу підрахувати $B\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ і розкласти отримане локальне нормальне поле за базисом з Lem. (на, можливо, меншому околі p):

$$B\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = b_{ij}^{\alpha}\, \xi_\alpha.$$

def. Назвемо отримані функції $\left\{b_{ij}^{\alpha}\right\}_{i,j=\overline{1,n},\, \alpha=\overline{1,q}}$ (локальними) коефіцієнтами другої ф.ф. B відносно координат $(u^1, \ldots, u^n)$ і локального базиса нормальних полів $\{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$.

Впр. Як вони змінюються при заміні локальних координат? Базиса?

Cor. (Локальний запис розкладення Гаусса)

$$r_{i,j} = \Gamma_{ij}^{k} r_k + b_{ij}^{\alpha}\, \xi_\alpha$$

для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$.

Rem. Локальний вираз розкладення для довільних полів X і Y можна вивести з цього.

Тепер аналогічним чином знайдемо локальний вигляд розкладення Вейнгартена для базисних полів $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\xi = \xi_\alpha$, де $i = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, q}$. Для цього оберемо продовження $\overline{X} = \overline{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (як раніше) і $\overline{\xi} = \overline{\xi}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$

відповідно. Для другого поля умова продовження має вигляд просто $\overline{\xi}^a = \xi^a_\alpha$ у точках $r(M)$. Похідна:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\xi} = \overline{X}^a \left(\frac{\partial \overline{\xi}^c}{\partial x^a} + \overline{\Gamma}^c_{ab}\, \overline{\xi}^b \right) \frac{\partial}{\partial x^c}.$$

Аналогічно до розкладення Гаусса маємо, що у точках $r(M)$ це перетворюється на

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \xi_\alpha = \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \overline{\xi}^c}{\partial x^a} + \overline{\Gamma}^c_{ab}\, \xi^b_\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x^c} =$$

$$= \frac{\partial(\overline{\xi}^c \circ r)}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^c} + \overline{\Gamma}^c_{ab}\, \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\, \xi^b_\alpha\, \frac{\partial}{\partial x^c} =$$

$$= \left(\frac{\partial \xi^c_\alpha}{\partial u^i} + \overline{\Gamma}^c_{ab}\, r^a_i\, \xi^b_\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x^c}.$$

Будемо позначати це через $\xi_{\alpha,i}$ (коваріантна похідна

ξ_α за u^i). Зауважимо, що тут, як і у розкладенні Гаусса, під $\overline{\Gamma}^c_{ab}$ маються на увазі композиції $\overline{\Gamma}^c_{ab} \circ r$.

Як і для форми B, з властивостей лінійності оператора Вейнгартена A підмноговида у Pr.3. вище можна вивести, що у кожній точці $p \in M$ він однозначно визначає білінійне відображення

$$A_p \colon N_pM \times T_pM \to T_pM \colon \nu, v \mapsto (A_p)_\nu v$$

таке, що $(A_\xi X)_p = (A_p)_{\xi_p} X_p$ для будь-яких гладких ξ та X (Впр.)

Зокрема, можна у кожній точці околу p розкласти:

$$A_{\xi_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = a^j_{\alpha i}\,\frac{\partial}{\partial u^j}.$$

Знайдемо коефіцієнти (функції) $\left\{a^j_{\alpha i}\right\}$. Для цього запишемо рівність з <u>Pr.5.</u> вище (для $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$):

$$g\left(A_{\xi_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \overline{g}\left(B\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right), \xi_\alpha\right),$$

$$g\left(a^k_{\alpha i}\,\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \overline{g}\left(b^\beta_{ij}\,\xi_\beta, \xi_\alpha\right),$$

$$a^k_{\alpha i}\,g_{kj} = b^\alpha_{ij},$$

де справа використали ортонормованість. Будемо позначати через $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ локальну матрицю Грама g, через $(g^{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = G^{-1}$ – компоненти оберненої до неї (як і вона, симетричної та додатно визначеної) матриці. Для кожного $j = \overline{1,n}$ домножимо обидві частини виразу вище на g^{jl} і додамо за j:

$$a^{k}_{\alpha i}\, g_{kj}\, g^{jl} = b^{\alpha}_{ij}\, g^{jl}.$$

Оскільки $GG^{-1} = I$ (одинична матриця), $g_{kj}\, g^{jl} = \delta^{l}_{k}$ (компоненти одиничної матриці, тобто символи Кронекера) для будь-яких l, k:

$$a^{l}_{\alpha i} = a^{k}_{\alpha i}\, \delta^{l}_{k} = b^{\alpha}_{ij}\, g^{jl}$$

для будь-яких i, l, α.

Отже, у першому доданку правої частини розкладення Вейнгартена маємо

$$dr\left(A_{\xi_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right) = dr\left(b^{\alpha}_{ij}\, g^{jk}\, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = b^{\alpha}_{ij}\, g^{jk}\, r_k.$$

Нарешті, розкладемо другий доданок правої частини $\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \xi_\alpha$ за локальним базисом нормальних полів:

$$\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \xi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{q} \mu_{\alpha\beta|i}\, \xi_\beta.$$

<u>def.</u> Будемо називати функції $\left\{\mu_{\alpha\beta|i}\right\}_{i=\overline{1,n},\, \alpha,\beta=\overline{1,q}}$ коефіцієнтами скрута нормальної зв'язності $\nabla^{\perp}$ відносно координат $(u^1, \ldots, u^n)$ і локального базиса нормальних полів $\{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$.

<u>Rem.</u> По суті, це символи Кристоффеля нормальної зв'язності.

Впр. Що відбувається при заміні локальних координат або базиса?

Rem. Для будь-яких α, β, i продиференціюємо умову ортонормованості $\overline{g}(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ за u^i, використавши узгодженість Pr.4.d.:

$$\overline{g}\left(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \xi_\alpha, \xi_\beta\right) + \overline{g}\left(\xi_\alpha, \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \xi_\beta\right) = 0,$$

$$\overline{g}\left(\sum_\gamma \mu_{\alpha\gamma|i}\,\xi_\gamma, \xi_\beta\right) + \overline{g}\left(\xi_\alpha, \sum_\gamma \mu_{\beta\gamma|i}\,\xi_\gamma\right) = 0,$$

$$\mu_{\alpha\beta|i} + \mu_{\beta\alpha|i} = 0,$$

тобто $\left\{\mu_{\alpha\beta|i}\right\}$ кососиметричні за α, β. Зокрема, $\mu_{\alpha\alpha|i} = 0$ для будь-яких α, i.

Cor. (Локальний запис розкладення Вейнгартена)

$$\xi_{\alpha,i} = -b^{\alpha}_{ij}\, g^{jk}\, r_k + \sum_{\beta=1}^{q} \mu_{\alpha\beta|i}\, \xi_\beta$$

для будь-яких $i = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,q}$.

Rem. Локальний вираз для довільних X та ξ можна отримати з цього.

Rem. Як уже зазначалося, для (принаймні, локально) пласкої зв'язності $\overline{\nabla}$ існують локальні координати, у яких усі $\overline{\Gamma}^c_{ab} = 0$, а тому $r_{i,j} = r_{ij}$, $\xi_{\alpha,i} = \frac{\partial \xi^a_\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a}$ (останній вираз також можемо позначати просто $\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial u^i}$). Зокрема, так виглядають ліві частини розкладень для $(\overline{M}, \overline{g}) = E^{n+q}$ і декартових координат.

Rem. Домноживши обидві частини розкладення Гаусса на ξ_α, отримаємо

$$\overline{g}(r_{i,j}, \xi_\alpha) = 0 + b^\alpha_{ij},$$

тобто формулу для b^α_{ij}:

$$b^\alpha_{ij} = \overline{g}(r_{i,j}, \xi_\alpha) = \overline{g}_{ab} \left(r^a_{ij} + \overline{\Gamma}^a_{cd}\, r^c_i\, r^d_j \right) \xi^b_\alpha.$$

Зокрема, при $(\overline{M}, \overline{g}) = E^{n+q}$ це буде просто $b^\alpha_{ij} = \langle r_{ij}, \xi_\alpha \rangle$.

Випадок гіперповерхні

Якщо ковимірність дорівнює 1, то $\dim N_pM = 1$ для будь-якої $p \in M$, причому у простору N_pM існують два протилежних одиничних (відносно $\overline{g}_{r(p)}$) базисних вектора. В силу Lem. вище, в околі будь-якої точки M можна побудувати $(k-1)$-гладке одиничне нормальне поле ξ (ξ_1 у позначеннях вище), що у кожній точці околу приймає одне з цих двох значень. При цьому, якщо таке поле існує на деякій зв'язній підмножині M, то їх там існує рівно два: ξ і $-\xi$ (Впр.)

Rem. Існування глобального (тобто визначеного на всьому M) неперервного одиничного нормального поля для орієнтовного $\overline{M}$ еквівалентне орієнтовності многовида M.

Фіксувавши ξ і взявши ξ_p у якості одиничного базисного вектора N_pM для кожної p, можемо (принаймні, локально на околі U) записати для довільних $(k-1)$-гладких полів X і Y

$$B(X,Y)_p = b(X,Y)(p)\,\xi_p,$$

визначивши на U таким чином $(k-1)$-гладку функцію $b(X, Y)$. Тобто маємо форму b: $X, Y \mapsto b(X, Y)$.

def. Форма b зветься (скалярною) другою фундаментальною формою гіперповерхні.

Rem. З властивостей B випливає, що b – симетрична білінійна $(k-1)$-гладка 2-форма, що визначена локально або ''з точністю до знака'' (або глобально у випадку орієнтовних M і $\overline{M}$), і $B = b\xi$. Зокрема, знак b визначається вибором ξ.

Rem. Поле ξ одиничне: $\overline{g}(\xi, \xi) = 1$. Продиференціювавши цю рівність у напрямку довільного гладкого поля X на M і використавши узгодженість, отримаємо $2\overline{g}(\nabla_X^{\perp}\xi, \xi) = 0$. Оскільки $\{\xi\}$ утворює базис нормального простору у кожній точці, це означає, що $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$.

<u>Cor.</u> (Розкладення Гаусса і Вейнгартена для гіперповерхні) Нехай (M, r) – гіперповерхня у $(\overline{M}, \overline{g})$ із (взагалі кажучи, локальним) одиничним нормальним полем ξ. Тоді для будь-яких гладких полів X, Y на M

$$\overline{\nabla}_X Y = dr(\nabla_X Y) + b(X, Y)\, \xi,$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -dr(A_\xi X).$$

<u>Rem.</u> Локально: залишається лише один набір коефіцієнтів $\{b_{ij}\} := \{b^1_{ij}\}$. За побудовою, це коефіцієнти форми b: $b_{ij} = b\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ для будь-яких i, j.

Cor. (Локальний запис розкладень Гаусса і Вейнгартена для гіперповерхні)

$$r_{i,j} = \Gamma^k_{ij} r_k + b_{ij}\,\xi,$$

$$\xi_{,i} = -b_{ij}\,g^{jk}\,r_k$$

для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$.

Rem. Рівність другої суми у правій частині розкладення Вейнгартена нулю випливає і з кососиметричності коефіцієнтів скрута ($\mu_{11|i} = 0$ для усіх i).

Rem. Для пласкої зв'язності (зокрема, для $(\overline{M}, \overline{g}) = E^{n+1}$) і відповідних координат маємо тут зліва r_{ij}, $\frac{\partial \xi}{\partial u^i}$ відповідно і отримуємо звичні "деривації́ні формули Гаусса і Вейнгартена".

Середня кривина

def. Нехай (M, r) – n-вимірний підмноговид у $(\overline{M}, \overline{g})$. Його полем середньої кривини зветься

$$H := \frac{1}{n} \mathsf{Tr}_g B := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i),$$

де $\{E_1, \ldots, E_n\}$ – поля, що утворюють у кожній точці своєї області визначення ортонормований базис дотичного простору M (відносно значення першої ф.ф. g у цій точці).

Rem. Аналогічно нормальним полям у Lem. вище, такі поля максимальної гладкості існують в околі кожної точки, але, взагалі кажучи, тільки локально (це теж випливає з методу Грама – Шмідта або можна використати паралельне перенесення – Впр.) Отже, друга формула визначає H локально, у околі кожної точки M.

Rem. Потрібно перевірити коректність. Введемо локальні координати (усі позначення як вище) і розкладемо $E_i = E_i^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ для кожного i. Умова ортонормованості $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ дає для будь-яких i, j

$$g_{kl}\, E_i^k\, E_j^l = \delta_{ij}.$$

Побудуємо матрицю $E = (E_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ (і G як вище), тоді ці умови означають, що

$$E^T G E = I.$$

Зокрема, звідси випливає, що E невироджена (чому?). Домножимо зліва на $(E^T)^{-1}$ і справа на E^{-1}:

$$G = (E^T)^{-1} E^{-1} = (E E^T)^{-1},$$

$$EE^T = G^{-1},$$

тобто для будь-яких i, j

$$\sum_{k=1}^{n} E_k^i \, E_k^j = g^{ij}.$$

Тоді локально

$$H = \frac{1}{n} \sum_k B(E_k, E_k) = \frac{1}{n} \sum_k b_{ij}^{\alpha} \, E_k^i \, E_k^j \, \xi_\alpha = \frac{1}{n} \, b_{ij}^{\alpha} \, g^{ij} \, \xi_\alpha.$$

Цей вираз не залежить від вибору $\{E_1, \ldots, E_n\}$ (але й від локальних координат теж в силу означення).

Cor. H – коректно визначене нормальне поле на M, $(k-1)$-гладке для k-гладкого підмноговида.

Rem. У випадку гіперповерхні з (локальним) одиничним нормальним полем ξ можемо аналогічно до другої ф.ф. записати поле середньої кривини у вигляді $H\,\xi$, де тепер H – функція.

def. У цьому випадку H зветься середньою кривиною гіперповерхні.

Rem. Функція H визначена, взагалі кажучи, лише локально (і є $(k-1)$-гладкою), причому її знак залежить від вибору ξ. Але модуль H коректно і однозначно визначений завжди. За побудовою,

$$H = \frac{1}{n}\,\mathsf{Tr}_g b := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b(E_i, E_i).$$

Локально поле середньої кривини у випадку гіперповерхні має вигляд $\frac{1}{n}\,b_{ij}\,g^{ij}\,\xi$, тому $H = \frac{1}{n}\,b_{ij}\,g^{ij}$.

Ex.1. Тор Кліфборда у E^4: $r \in C^{\infty}(T^2, E^4)$, де $T^2 = S^1 \times S^1$, тому у якості локальних координат (u^1, u^2) можна брати кутові параметри відповідних кіл. Отже, визначимо (коректність очевидна):

$$r(u^1, u^2) := (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2).$$

Диференціюємо:

$$r_1 = (-\sin u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2),$$

$$r_2 = (-\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2).$$

Знаходимо коефіцієнти першої ф.ф.:

$$g_{11} = \langle r_1, r_1 \rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle r_1, r_2 \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle r_2, r_2 \rangle = 1.$$

Тобто метрика пласка (поверхня локально ізометрична E^2; зауважимо, що ізометричне вкладення плаского двовимірного тора у E^4 повинне існувати за теоремою Неша – Кейпера). Зокрема, невиродженість матриці Грама (у даному випадку одиничної) означає, що r_1 і r_2 дійсно утворюють базис образу дотичної площини у кожній точці, тобто лінійно незалежні, а отже r – занурення. Воно є вкладенням, бо T^2 компактний, а r – ін'єкція.

Оберемо ортонормований базис нормальних полів (тут глобальний):

$$\xi_1 = r = (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2),$$

$\xi_2 = (\sin u^1 \sin u^2, -\sin u^1 \cos u^2, -\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2)$.

Дійсно, це нормальні поля, бо

$$\langle r_1, \xi_1 \rangle = \langle r_1, \xi_2 \rangle = \langle r_2, \xi_1 \rangle = \langle r_2, \xi_2 \rangle = 0,$$

і базис ортонормований, бо

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = 1, \quad \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0.$$

Другі похідні:

$$r_{11} = r_{22} = (-\cos u^1 \cos u^2, -\cos u^1 \sin u^2,$$

$$-\sin u^1 \cos u^2, -\sin u^1 \sin u^2) = -r = -\xi_1,$$

$$r_{12} = (\sin u^1 \sin u^2, -\sin u^1 \cos u^2,$$

$$-\cos u^1 \sin u^2, \cos u^1 \cos u^2) = \xi_2.$$

Тому коефіцієнти другої ф.ф.:

$$b^1_{11} = \langle r_{11}, \xi_1 \rangle = -1,$$

$$b^2_{11} = \langle r_{11}, \xi_2 \rangle = 0,$$

$$b^1_{12} = \langle r_{12}, \xi_1 \rangle = 0,$$

$$b^2_{12} = \langle r_{12}, \xi_2 \rangle = 1,$$

$$b^1_{22} = \langle r_{22}, \xi_1 \rangle = -1,$$

$$b^2_{22} = \langle r_{22}, \xi_2 \rangle = 0.$$

У нас

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{одинична, тому} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

теж одинична, і $g^{ij} = \delta^{ij}$. Поле середньої кривини $H = H^\alpha \xi_\alpha = \frac{1}{2}\, b^\alpha_{ij}\, g^{ij}\, \xi_\alpha$. У нас це буде

$$H = \frac{1}{2}\, b^\alpha_{ij}\, \delta^{ij}\, \xi_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} b^\alpha_{ii}\, \xi_\alpha,$$

тобто

$$H^1 = \frac{1}{2}(b^1_{11} + b^1_{22}) = -1,$$

$$H^2 = \frac{1}{2}(b^2_{11} + b^2_{22}) = 0,$$

і отже

$$H = H^1 \xi_1 + H^2 \xi_2 = -\xi_1 = -r.$$

Rem. Зауважимо, що сума квадратів координатних функцій r дорівнює 1, тобто $r(T^2) \subset S^3 \subset E^4$: тор

Кліфforda – (гіпер)поверхня у сфері S^3. Якщо ототожнити TS^3 з підмножиною TE^4, можна вважати ξ_2 нормальним полем цього тора у S^3 (оскільки воно ортогональне радіусу-вектору r у E^4, отже, є дотичним до S^3, див. нижче). Проекція H на це поле дорівнює 0, отже середня кривина тора Кліфforda у S^3 нульова (чому?) – це мінімальна поверхня.