**Задача 0.1.1.** Побудуйте еволюти наступних кривих в $\mathbb{R}^2$:

1) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = \cosh t \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

2) $\begin{cases} x^1 = t^3 \\ x^2 = t^6 \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

3) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$

Розв'язання:

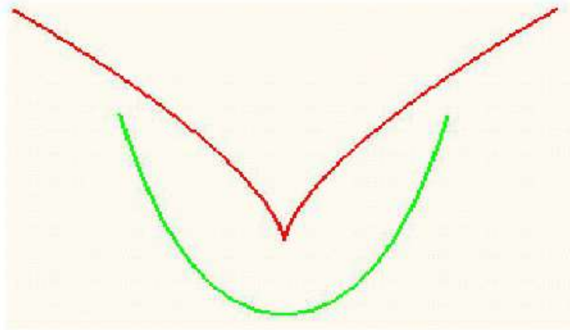
| Крива | Еволюта |
|---|---|
| $x^1 = f^1(t)$ <br> $x^2 = f^2(t)$; | $x^1 = f^1 - \dfrac{(f^{1\prime})^2 + (f^{2\prime})^2}{f^{1\prime} \cdot f^{2\prime\prime} - f^{2\prime} \cdot f^{1\prime\prime}} \cdot f^{2\prime}$ <br> $x^2 = f^2 + \dfrac{(f^{1\prime})^2 + (f^{2\prime})^2}{f^{1\prime} \cdot f^{2\prime\prime} - f^{2\prime} \cdot f^{1\prime\prime}} \cdot f^{1\prime}$ |

1) Крива

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = \cosh t \end{cases}$$

Еволюта

$$\begin{cases} x^1 = t - \sinh t \cosh t \\ x^2 = 2\cosh t \end{cases}$$

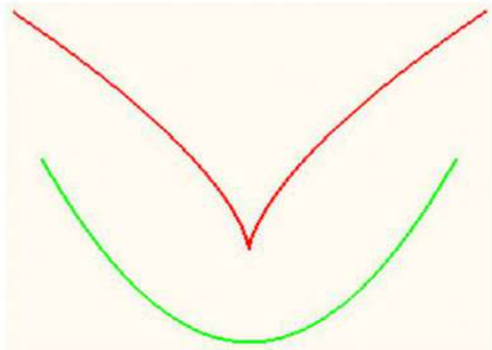


2) Крива

$$\begin{cases} x^1 = t^3 \\ x^2 = t^6 \end{cases}$$

Еволюта

$$\begin{cases} x^1 = -4t^9 \\ x^2 = 3t^6 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

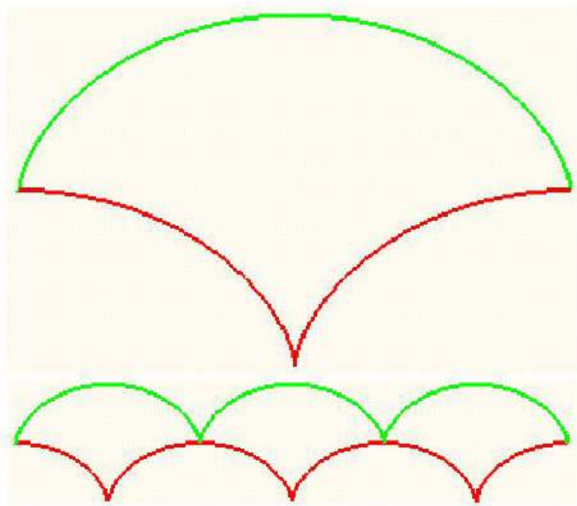


3) Крива

$$\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}$$

Еволюта

$$\begin{cases} x^1 = -4t^9 \\ x^2 = 3t^6 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



**Задача 0.1.2.** Запишіть рівняння еволюти для явно заданої кривої $y=F(x)$. Побудуйте еволюти для наступних явно заданих кривих

1) $y=\cos x$, 2) $y = \operatorname{tg} x$ 3) $y = x^2$

Розв'язання:

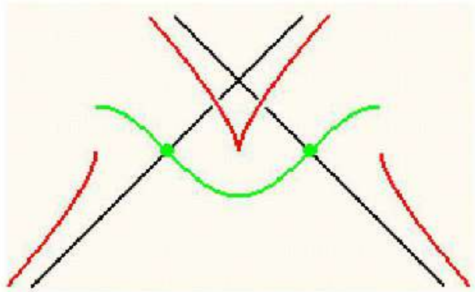
| Крива | Еволюта |
|---|---|
| $x^1 = f^1(t)$, $x^2 = f^2(t)$, | $x^1 = f^1 - \dfrac{(f^{1\prime})^2 + (f^{2\prime})^2}{f^{1\prime} \cdot f^{2\prime\prime} - f^{2\prime} \cdot f^{1\prime\prime}} \cdot f^{2\prime}$, $x^2 = f^2 + \dfrac{(f^{1\prime})^2 + (f^{2\prime})^2}{f^{1\prime} \cdot f^{2\prime\prime} - f^{2\prime} \cdot f^{1\prime\prime}} \cdot f^{1\prime}$ |
| $\begin{cases} x = t \\ y = F(t) \end{cases}$ | $\begin{cases} x = t - \dfrac{1+(F')^2}{F''} F' \\ y = F + \dfrac{1+(F')^2}{F''} \end{cases}$ |

1) Крива

$$y=\cos x$$

Еволюта

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{1+\sin^2 t}{\cos t}\sin t \\ y = \cos t - \dfrac{1+\sin^2 t}{\cos t} \end{cases}$$

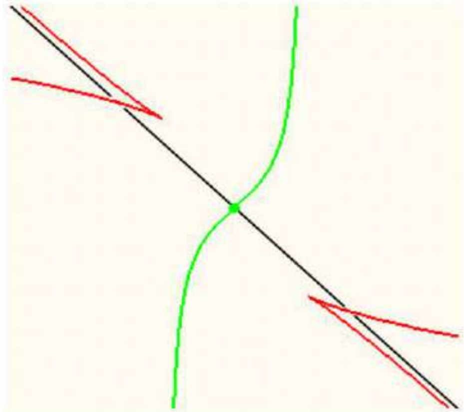


2) Крива

$$y = \operatorname{tg} x$$

Еволюта

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{1+\cos^4 t}{2\sin t\cos^3 t} \\ y = \dfrac{2+\sin^4 t}{2\sin t\cos t} \end{cases}$$

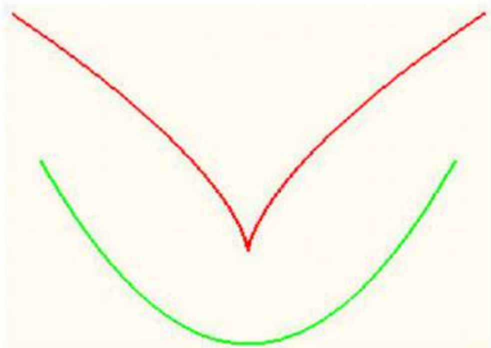


3) Крива

$$y = x^2$$

Еволюта

$$\begin{cases} x = -4t^3 \\ y = 3t^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



**Задача 0.3.** Як зміниться еволюта кривої $\gamma$, якщо до кривої $\gamma$ застосувати наступні перетворення в площині $I\!R^2$:

1) паралельний перенос, 2) обертання, 3) гомотетію.

Розв'язання. 0) Крива $\vec{x} = \vec{f}(t) \ \rightarrow$ Еволюта $\vec{x} = \vec{f} + \dfrac{1}{k}\vec{v}$

1) Крива $\vec{x} = \vec{f}_{tr}(t) = \vec{f}(t) + \vec{c}$ , $k_{tr} = k$ , $\vec{v}_{tr} = \vec{v} \ \rightarrow$

$$\text{Еволюта } \vec{x} = \vec{f}_{tr} + \frac{1}{k_{tr}}\vec{v}_{tr} = \vec{f} + \vec{c} + \frac{1}{k}\vec{v} = (\ \vec{f} + \frac{1}{k}\vec{v}\ ) + \vec{c}$$

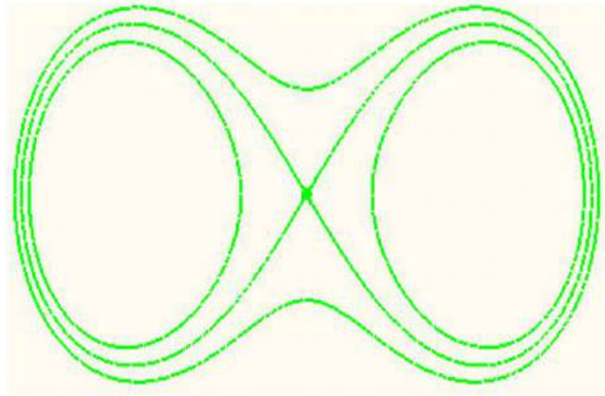
2) Крива $\vec{x} = \vec{f}_r(t) = A\ \vec{f}(t)$ , $k_r = k$ , $\vec{v}_r = A\vec{v} \ \rightarrow$

$$\text{Еволюта } \vec{x} = \vec{f}_r + \frac{1}{k_r}\vec{v}_r = A\vec{f} + \frac{1}{k}A\,\vec{v} = A(\ \vec{f} + \frac{1}{k}\vec{v}\ )$$

3) Крива $\vec{x} = \vec{f}_d(t) = \lambda\ \vec{f}(t)$ , $k_d = \dfrac{1}{\lambda}k$ , $\vec{v}_d = \vec{v} \ \rightarrow$

$$\text{Еволюта } \vec{x} = \vec{f}_d + \frac{1}{k_d}\vec{v}_d = \lambda\vec{f} + \frac{1}{\frac{1}{\lambda}k}\vec{v} = \lambda(\ \vec{f} + \frac{1}{k}\vec{v}\ )$$

***Задача 0.4.** Розглянемо сім'ю овалів Кассіні



$$((x^1-1)^2 + (x^2)^2)\cdot((x^1+1)^2 + (x^2)^2) - c = 0 \ ,$$

яке при $c=1$ включає лемніскату Бернуллі.

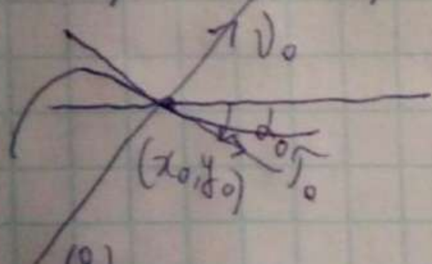
Не проводячи обчислень, зобразіть на малюнку ескіз еволюти овалу Кассіні окремо при $c>1$, $c=1$, $c<1$, та проаналізуйте якісну поведінку еволюти, коли параметр $c$ змінюється в невеликому околі значення $c=1$.

***Задача 0.5.** Проаналізуйте поведінку еволюти кривої $\gamma$, якщо на кривій $\gamma$ є точка перегину (дивись приклади із задач 1.1.2, 1.2.1).

5. Нехай $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ – крива з нат. параметром $s$, $k(s_0) = 0$ – точка перегину. Нехай $\alpha$ – кут від $Ox$ до дотичного $(x'(s), y'(s))$, $(x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0)$, $\alpha(s_0) = \alpha_0$.

$\forall s$ $\tau(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, $\nu(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$.

Нормаль при $s = s_0$ прох. через $(x_0, y_0)$ ортогонально до $\tau$:




$$\cos\alpha_0 (x - x_0) + \sin\alpha_0 (y - y_0) = 0.$$

Еволюта: $\gamma^*(s) = \gamma(s) + \frac{\nu(s)}{k(s)}$. Відстань до нормалі:

$$d(s) = \left[\cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_0 = 1\right] = \left|\cos\alpha_0\left(x(s) - \frac{\sin\alpha(s)}{k(s)} - x_0\right) + \sin\alpha_0\left(y(s) + \frac{\cos\alpha(s)}{k(s)} - y_0\right)\right| \underset{s\to s_0}{\sim} \left|\frac{-\cos\alpha_0 \sin\alpha(s) + \sin\alpha_0 \cos\alpha(s)}{k(s)}\right| = \left|\frac{\sin(\alpha(s) - \alpha_0)}{k(s)}\right|_{s\to s_0} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Якщо при $s \to s_0$ $k(s) \to +0$, $\alpha(s) \to \alpha_0 + 0$ (або $\to -0$, $\to \alpha_0 - 0$) за правилом Лопіталя $d(s) \underset{s\to s_0}{\sim} \frac{\cos(\alpha(s) - \alpha_0)\, k(s)}{k'(s)} \underset{s\to s_0}{\to} 0$ при $k'(s_0) \neq 0$,

і ан-но для різних знаків.

Що робити, коли $k'(s_0) = 0$?

**Задача 0.6.** Побудуйте евольвенти наступних кривих в $I\!R^2$:

1) $\begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

2) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$

*Розв'язання.* 1) Запишемо радіус-вектор кривої $\gamma$: $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Обчислимо похідну: $\dfrac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

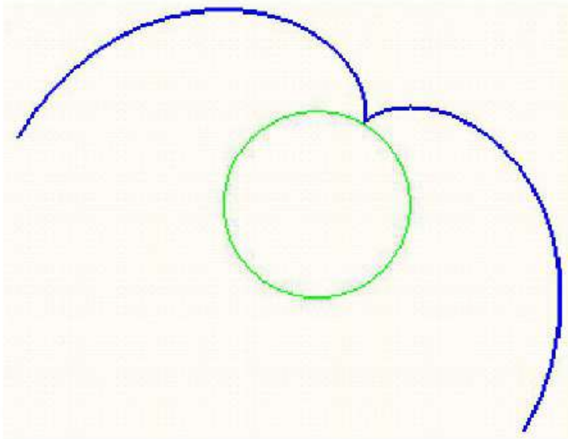
Знайдемо одиничний дотичний вектор: $\vec{\tau} = \dfrac{1}{\left|\dfrac{d\vec{f}}{dt}\right|}\dfrac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Знайдемо натуральний параметр на кривій $\gamma$:

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Запишемо радіус-вектор евольвенти:

$$\vec{f}^{\bullet} = \vec{f} - s\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - (t - t_0)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + (t - t_0)\sin t \\ \sin t - (t - t_0)\cos t \end{pmatrix}$$



Зауваження. Застосуємо обертання

$$A\vec{f}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t + (t - t_0)\sin t \\ \sin t - (t - t_0)\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+\alpha) + (t - t_0)\sin(t+\alpha) \\ \sin(t+\alpha) - (t - t_0)\cos(t+\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\tilde{t} + (\tilde{t} - \alpha - t_0)\sin\tilde{t} \\ \sin\tilde{t} - (\tilde{t} - \alpha - t_0)\cos\tilde{t} \end{pmatrix} = \left|\alpha = -t_0\right| = \begin{pmatrix} \cos\tilde{t} + \tilde{t}\sin\tilde{t} \\ \sin\tilde{t} - \tilde{t}\cos\tilde{t} \end{pmatrix}$$

Різні евольвенті, породжені вибором різних початкових точок на колі, є конгруентними і переводяться одна в одну обертаннями навколо центру кола.

*2*) Запишемо радіус-вектор кривої $\gamma$: $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$

Обчислимо похідну: $\dfrac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

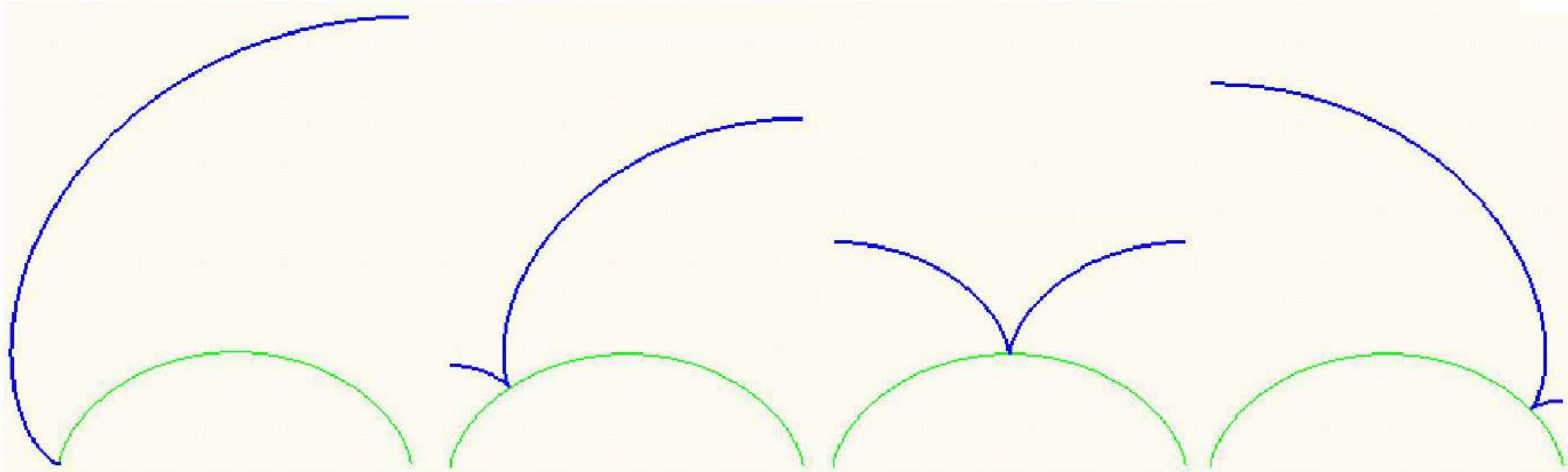
Знайдемо одиничний дотичний вектор: $\vec{\tau} = \dfrac{1}{\left|\dfrac{d\vec{f}}{dt}\right|}\dfrac{d\vec{f}}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Знайдемо натуральний параметр на кривій $\gamma$:

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{2(1-\cos t)}dt = 2\int\limits_{t_0}^{t} \sin\frac{t}{2} = 4(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{t_0}{2})$$

Запишемо радіус-вектор евольвенти:

$$\vec{f}^{\bullet} = \vec{f} - s\vec{\tau} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} - 4(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{t_0}{2})\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



*Відповідь:*

$$1)\ \vec{f}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \cos t + (t - t_0)\sin t \\ \sin t - (t - t_0)\cos t \end{pmatrix}$$

$$2)\ \vec{f}^{\bullet} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} - 4(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{t_0}{2})\frac{1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

***Задача 7.** Як зміниться евольвента кривої $\gamma$, якщо до кривої $\gamma$ застосувати наступні перетворення в площині $\mathbb{R}^2$**:**

1) паралельний перенос,

2) обертання,

3) гомотетію.

Розв'язання. 0) Крива $\vec{x} = \vec{f}(t) \;\rightarrow\;$ Евольвента $\vec{x} = \vec{f} - s\vec{\tau}$

1) Крива $\vec{x} = \vec{f}_{tr}(t) = \vec{f}(t) + \vec{c}\;,\; s_{tr} = s\;,\; \vec{\tau}_{tr} = \vec{\tau} \;\rightarrow$

Евольвента $\vec{x} = \vec{f}_{tr} - s_{tr}\vec{\tau}_{tr} = \vec{f} + \vec{c} - s\vec{\tau} = (\,\vec{f} - s\vec{\tau}\,) + \vec{c}$

2) Крива $\vec{x} = \vec{f}_r(t) = A\,\vec{f}(t)\;,\; s_r = s\;,\; \vec{\tau}_r = A\vec{\tau} \;\rightarrow$

Евольвента $\vec{x} = \vec{f}_r - s_r\vec{\tau}_r = A\vec{f} - sA\vec{\tau} = A(\,\vec{f} - s\vec{\tau}\,)$

3) Крива $\vec{x} = \vec{f}_d(t) = \lambda\,\vec{f}(t)\;,\; s_d = \lambda s\;,\; \vec{\tau}_d = \vec{\tau} \;\rightarrow$

Евольвента $\vec{x} = \vec{f}_d - s_d\vec{\tau}_d = \lambda\vec{f} - \lambda s\vec{\tau} = \lambda(\,\vec{f} - s\vec{\tau}\,)$

**Задача 8.** Побудуйте обгортки наступних сімей кривих в $\mathbb{R}^2$:

1) $(x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^2 - r\sin\alpha)^2 - R^2 = 0$, параметр $0 < \alpha < 2\pi$

*2) $(x^1 - f^1(\alpha))^2 + (x^2 - f^2(\alpha))^2 - R^2 = 0$, параметр $a_0 < \alpha < b_0$

3) $(x^1 - \alpha)^2 - x^2 - \alpha^3 = 0$, параметр $a_0 < \alpha < b_0$

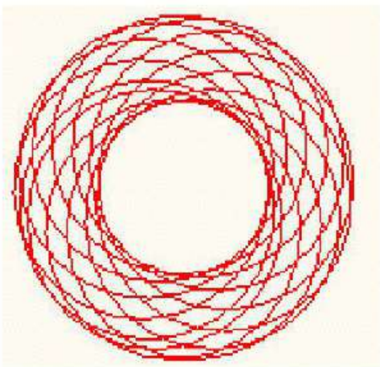
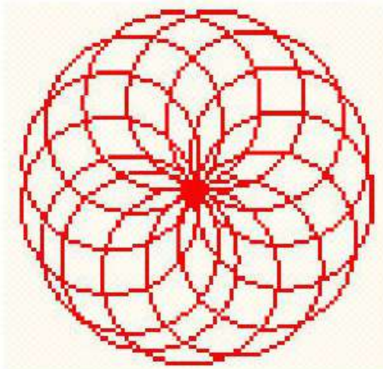
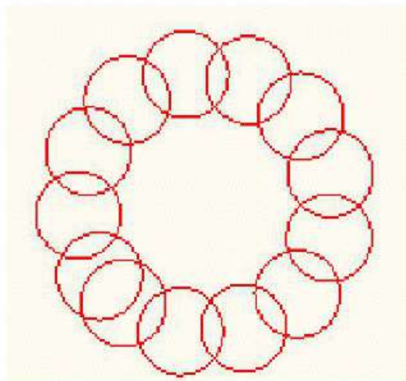
4) сімейство відрізків довжини $l=1$ з кінцями на осях координат

5) сімейство прямих, що в перетині з осями координат породжують трикутники одиночної площі $S=1$,

6) сімейство прямих, дотичних до заданої регулярної плоскої кривої $\gamma$.

Розв'язання.

1) Задана сім'я утворена колами радіуса $R$, центри яких розташовані на колі радіуса $r$.

Підставимо $F(x^1, x^2) = (x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^2 - r\sin\alpha)^2 - R^2$ в систему

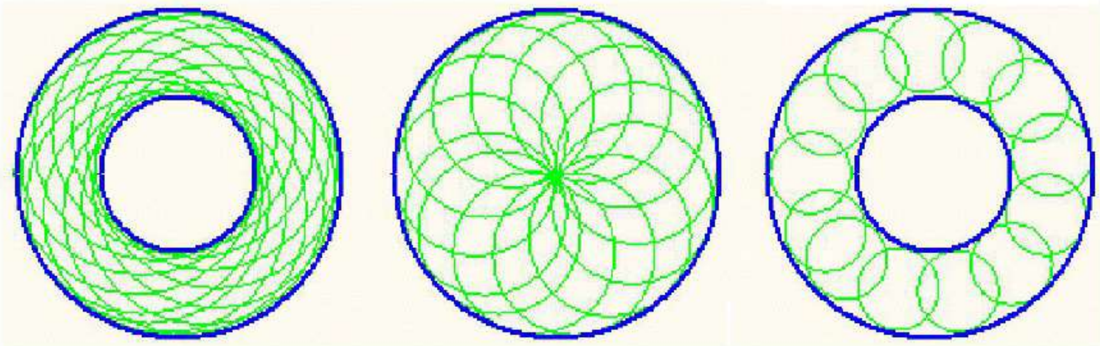
$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^2 - r\sin\alpha)^2 - R^2 = 0 \\ r\sin\alpha(x^1 - r\cos\alpha) - r\cos\alpha(x^2 - r\sin\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^2 - r\sin\alpha)^2 - R^2 = 0 \\ \sin\alpha\, x^1 - \cos\alpha\, x^2 = 0 \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок системи

$$\begin{cases} x^1 = (r \pm R)\cos\alpha \\ x^2 = (r \pm R)\sin\alpha \end{cases},$$

Отже, обгортка складається з двох кіл:



*Відповідь:* $(x^1)^2 + (x^2)^2 = (r \pm R)^2$

2) Задана сім'я утворена колами радіуса $R$, центри яких розташовані на кривій $\gamma$: $\begin{cases} x^1 = f^1(\alpha) \\ x^2 = f^2(\alpha) \end{cases}$

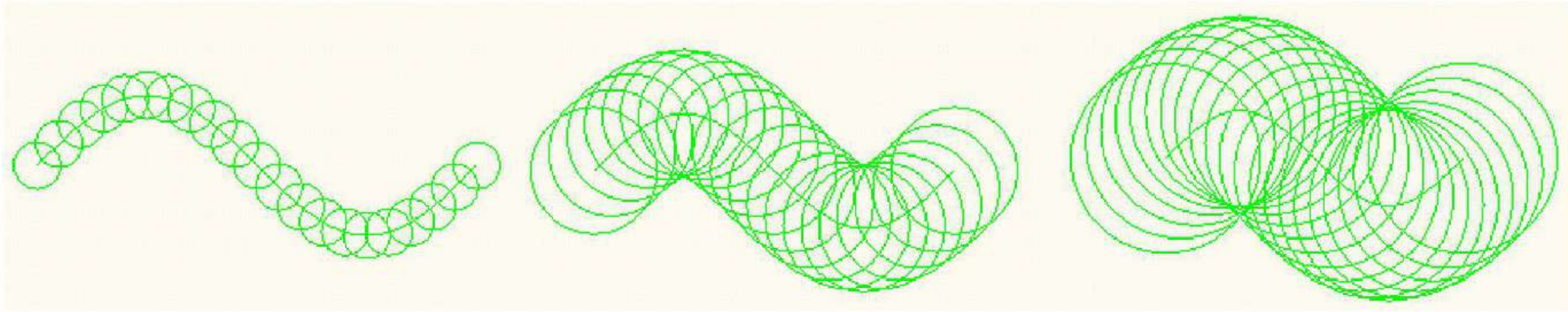
Підставимо $F(x^1, x^2) = (x^1 - f^1(\alpha))^2 + (x^2 - f^2(\alpha))^2 - R^2$ в систему

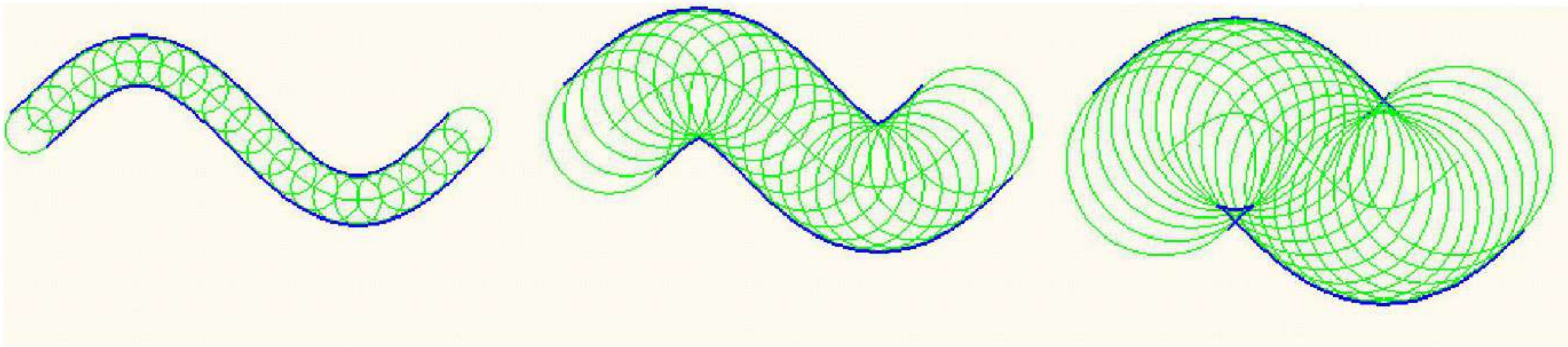
$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^1 - f^1)^2 + (x^2 - f^2)^2 - R^2 = 0 \\ \dfrac{df^1}{d\alpha}(x^1 - f^1) + \dfrac{df^2}{d\alpha}(x^2 - f^2) = 0 \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок системи
$$\begin{cases} x^1 = f^1 - \dfrac{R}{\sqrt{(\dfrac{df^1}{d\alpha})^2 + (\dfrac{df^2}{d\alpha})^2}} \dfrac{df^2}{d\alpha} \\ x^2 = f^2 + \dfrac{R}{\sqrt{(\dfrac{df^1}{d\alpha})^2 + (\dfrac{df^2}{d\alpha})^2}} \dfrac{df^1}{d\alpha} \end{cases}$$

Тобто, $\vec{x} = \vec{f} + R\vec{n}$.

Отже огинаючою кривою є еквідістанта кривої $\gamma$ на відстані $R$.



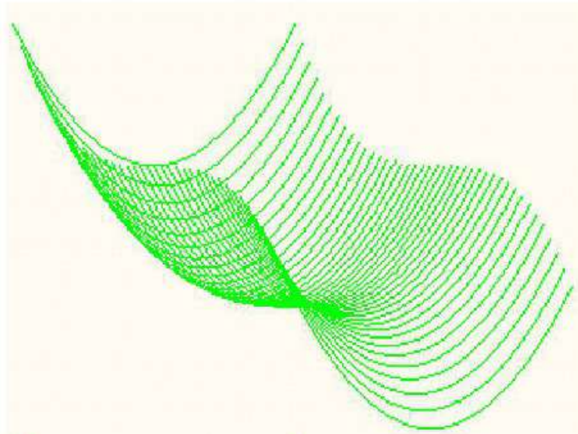


3) $(x^1 - \alpha)^2 - x^2 - \alpha^3 = 0$, параметр $a_0 < \alpha < b_0$

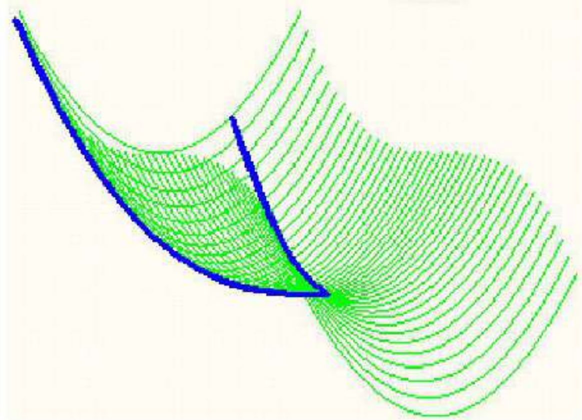
Задана сім’я утворена конгруентними параболами, вершини яких розташовані в точках $A(\alpha,\alpha^3)$

Підставимо $F(x^1, x^2) = (x^1 - \alpha)^2 - x^2 - \alpha^3$ в систему

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^1 - \alpha)^2 - x^2 - \alpha^3 = 0 \\ -2(x^1 - \alpha) - 3\alpha^2 = 0 \end{cases}$$



Знаходимо розв’язок системи $\begin{cases} x^1 = \alpha - \dfrac{3}{2}\alpha^2 \\ x^2 = \dfrac{9}{4}\alpha^4 - \alpha^3 \end{cases}$



*Відповідь:* $\begin{cases} x^1 = \alpha - \dfrac{3}{2}\alpha^2 \\ x^2 = \dfrac{9}{4}\alpha^4 - \alpha^3 \end{cases}$

4) Сімейство відрізків довжини $l=1$ з кінцями на осях координат

Розглядаємо прямі $x^1\cos a + x^2 \sin a + c = 0$, параметри $0 \le \alpha \le 2\pi$, $c>0$.

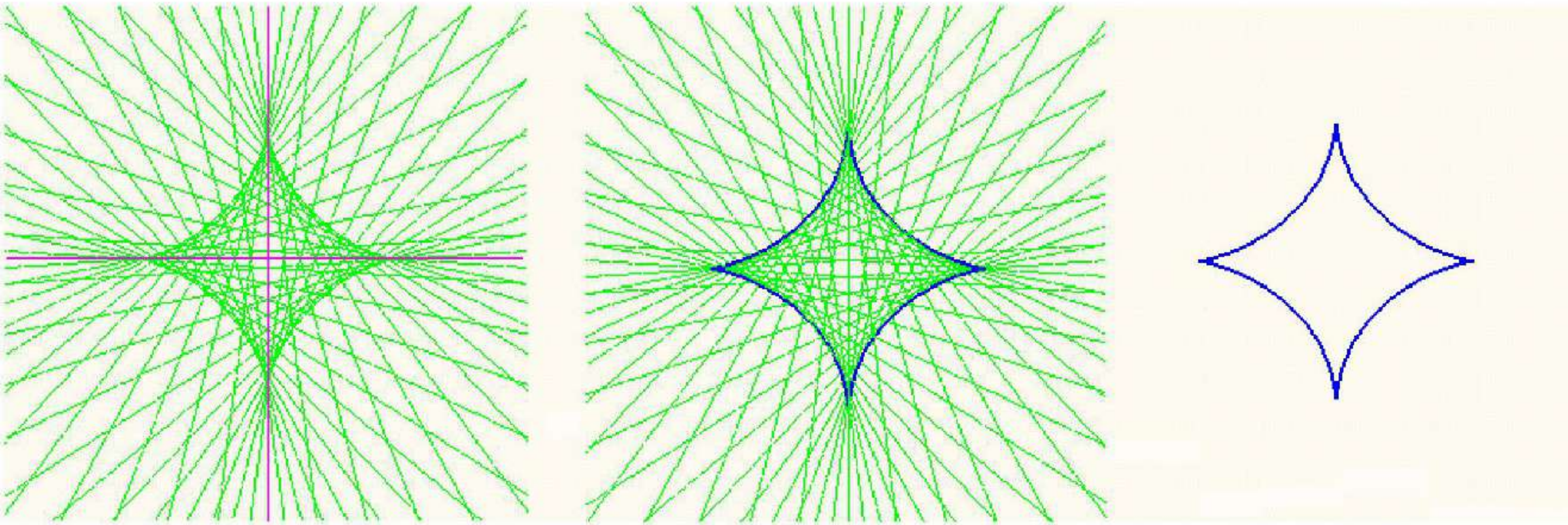
Пряма $x^1\cos a + x^2 \sin a + c = 0$ перетинає осі координат в точках $(0, -\dfrac{c}{\sin\alpha})$ і $(-\dfrac{c}{\cos\alpha}, 0)$. Відстань між ними дорівнює $l = \dfrac{c}{|\sin\alpha\cos\alpha|}$. З умови $l=1$ отримуємо $c = |\sin\alpha\cos\alpha|$. Отже, маємо наступну сім'ю прямих:

$$x^1\cos a + x^2 \sin a + |\sin\alpha\cos\alpha| = 0,\ 0 \le \alpha \le 2\pi.$$

Підставимо $F(x^1, x^2) = x^1\cos a + x^2 \sin a + |\sin\alpha\cos\alpha|$ в систему

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1\cos\alpha + x^2\sin\alpha + |\cos\alpha\sin\alpha| = 0 \\ -x^1\sin\alpha + x^2\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)sign(\cos\alpha\sin\alpha) = 0 \end{cases}$$

Знаходимо розв’язок системи $\begin{cases} x^1 = sign(\sin\alpha\cos\alpha)\sin^3\alpha \\ x^2 = sign(\sin\alpha\cos\alpha)\cos^3\alpha \end{cases}$



*Відповідь:* $(x^1)^{\frac{2}{3}} + (x^2)^{\frac{2}{3}} = 1$

5) Сімейство прямих, що в перетині з осями координат породжують трикутники одиночної площі $S=1$.

Розглядаємо прямі $x^1\cos a + x^2 \sin a + c = 0$, параметри $0 \le \alpha \le 2\pi$, $c>0$.

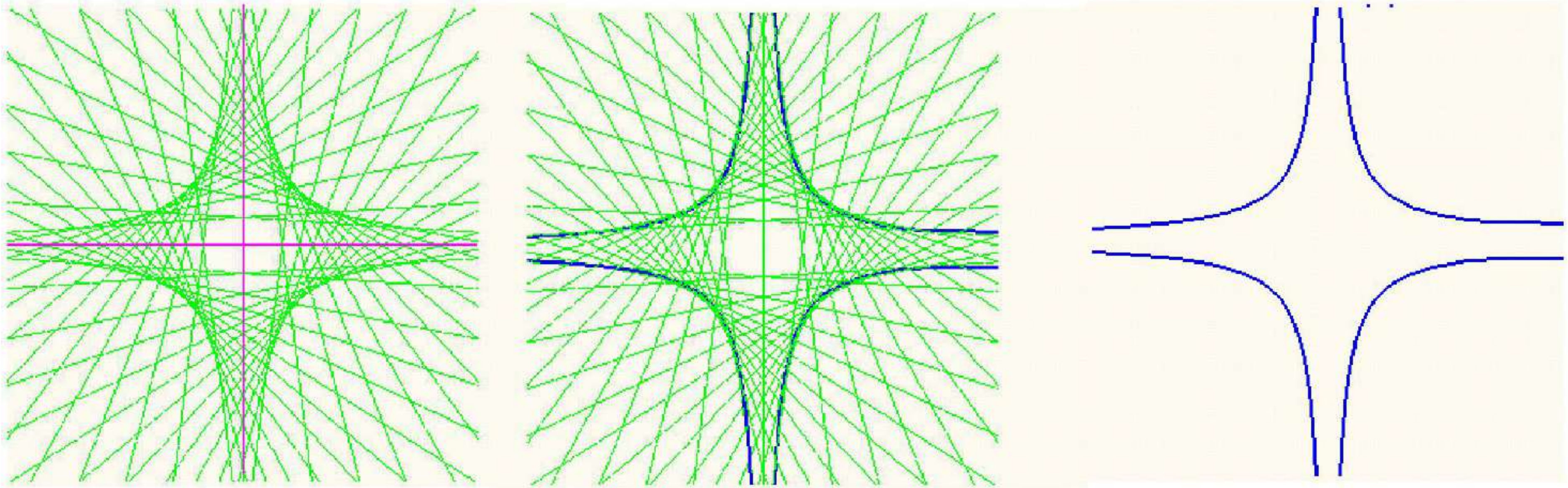
Пряма $x^1\cos a + x^2 \sin a + c = 0$ перетинає осі координат в точках $(0, -\dfrac{c}{\sin\alpha})$ і $(-\dfrac{c}{\cos\alpha}, 0)$. Площа трикутниками з вершинами у вказаних точках і в початку координат дорівнює $S = \dfrac{c^2}{2|\sin\alpha\cos\alpha|}$. З умови $S=1$ отримуємо $c = \sqrt{2|\sin\alpha\cos\alpha|}$. Отже, маємо наступну сім'ю прямих:

$$x^1\cos a + x^2 \sin a + \sqrt{2|\sin\alpha\cos\alpha|} = 0,\ 0 \le \alpha \le 2\pi.$$

Підставимо $F(x^1, x^2) = x^1\cos a + x^2 \sin a + \sqrt{2|\sin\alpha\cos\alpha|}$ в систему

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1\cos\alpha + x^2\sin\alpha + \sqrt{2|\sin\alpha\cos\alpha|} = 0 \\ -x^1\sin\alpha + x^2\cos\alpha + \dfrac{sign(\cos\alpha\sin\alpha)}{\sqrt{2|\sin\alpha\cos\alpha|}}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок системи $\begin{cases} x^1 = -\dfrac{sign(\sin\alpha\cos\alpha)}{\sqrt{2\,|\sin\alpha\cos\alpha\,|}}\sin\alpha \\ x^2 = -\dfrac{sign(\sin\alpha\cos\alpha)}{\sqrt{2\,|\sin\alpha\cos\alpha\,|}}\cos\alpha \end{cases}$



*Відповідь:* $x^1x^2 = \pm\dfrac{1}{4}$

*б*) Сімейство прямих, дотичних до заданої регулярної кривої

$$\frac{df^2}{dt}(t)(x^1 - f^1(t)) - \frac{df^2}{dt}(t)(x^2 - f^2(t)) = 0$$

Підставимо $F(x^1, x^2, a) = \frac{df^2}{da}(a)(x^1 - f^1(a)) - \frac{df^1}{da}(a)(x^2 - f^2(a))$ в систему

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a}(x^1, x^2, a) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{df^2}{da}(x^1 - f^1) - \frac{df^1}{da}(x^2 - f^2) = 0 \\ \frac{d^2 f^2}{da^2}(x^1 - f^1) - \frac{d^2 f^1}{da^2}(x^2 - f^2) - \frac{df^2}{da}\frac{df^1}{da} + \frac{df^1}{da}\frac{df^2}{da} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{df^2}{da}(x^1 - f^1) - \frac{df^1}{da}(x^2 - f^2) = 0 \\ \frac{d^2 f^2}{da^2}(x^1 - f^1) - \frac{d^2 f^1}{da^2}(x^2 - f^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{df^2}{da} & \dfrac{df^1}{da} \\ \dfrac{d^2f^2}{da^2} & \dfrac{d^2f^1}{da^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 - f^1 \\ -(x^2 - f^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ k^*\cos\varphi & -k^*\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 - f^1 \\ -(x^2 - f^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок: Якщо $k^*\neq 0$, то

$$\begin{cases} x^1 = f^1(a) \\ x^2 = f^2(a) \end{cases}$$

**Задача 10.2с.** Знайдемо обгортку сімейства

$$y^2 - (x - \alpha)^3 = 0,$$

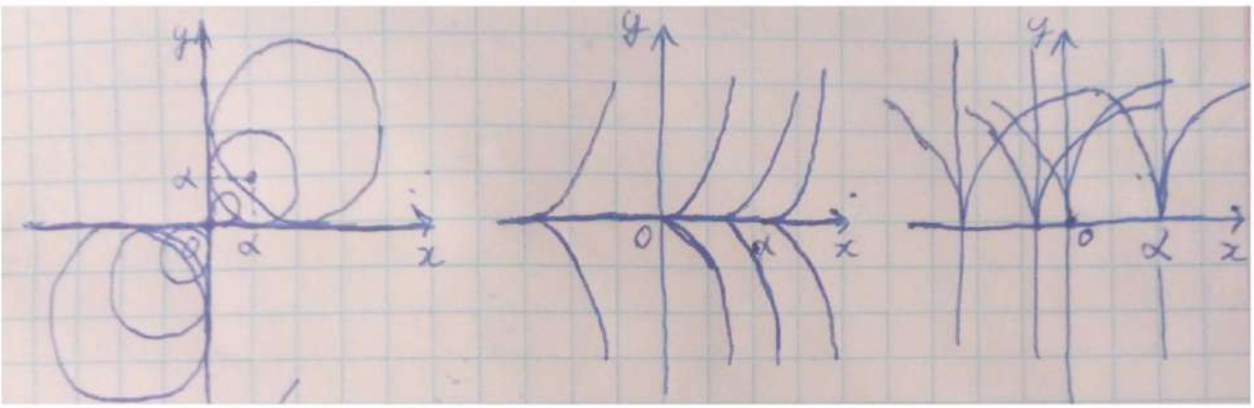
що складається з т. зв. напівкубічних парабол, трансльованих паралельно уздовж осі абсцис (див. малюнок нижче по центру). Отже, $F(x, y, \alpha) = y^2 - (x - \alpha)^3$. Зауважимо, що

$$(F_x(x, y, \alpha), F_y(x, y, \alpha)) = (-3(x - \alpha)^2, 2y)$$

дорівнює нулю у вершинах цих парабол $(\alpha, 0)$, що є їх особливими точками (точками порушення регулярності). Запишемо систему (3):

$$\begin{cases} y^2 - (x-\alpha)^3 = 0 \\ 3(x-\alpha)^2 = 0 \end{cases} .$$

Тобто $\alpha = x$ з другого рівняння, і тоді $y = 0$ з першого. Таким чином, дискримінантною множиною є вісь абсцис $y = 0$, що складається якраз із особливих точок. Тим не менш, це дійсно обгортка: на рисунку видно, що, хоч вершини парабол і є особливими, в кожній з них визначена дотична з напрямним вектором $(1, 0)$, яка збігається з віссю абсцисс. Щодо того, як це перевіряється формально в особливих точках, див. підручники за посиланням вище. Зауважимо, що для параметризації $(t, 0)$ обгортки і функції $\alpha(t) = t$ умова (1) перевіряється коректно, а ось умова (2), хоча формально і виконується, не має сенсу при порушенні регулярності.




**Задача 10.2d.** Тепер розглянемо інше сімейство напівкубічних парабол, що транслюються уздовж осі абсцис:

$$y^3 - (x-\alpha)^2 = 0$$

(див. ілюстрацію зверху справа). Як і у попередній задачі, вершини парабол $(\alpha, 0)$ є особливими точками. Система (3) набуває вигляду

$$\begin{cases} y^3 - (x-\alpha)^2 = 0 \\ 2(x-\alpha) = 0 \end{cases} .$$

Так само маємо $\alpha = x$, і дискримінантна множина – це знову $y = 0$. Але тепер ця множина, що складається з особливих точок ліній сімейства, не є обгорткою: в кожній з цих точок дотична до відповідної параболи існує, але має напрямний вектор $(0, 1)$, що неколінеарний напрямному вектору $(1, 0)$ осі абсцис.

Таким чином, крім формального розв'язку системи (3) у задачах на пошук обгортки також буває необхідно робити геометричне дослідження, щоб переконатися, що відповідь має сенс.

**Задача 10.4.** Розглянемо відрізок постійної довжини $a > 0$, кінці якого ковзають по осях координат, і сімейство прямих, що містять усі такі відрізки, іншими словами, прямі, на яких координатні осі висікають відрізок довжини $a$ (див. малюнок нижче). Позначимо довільний такий відрізок через $AB$, де $A \in Ox$, $B \in Oy$, і візьмемо у якості параметра $\alpha$ орієнтований кут від вектора $\overline{AB}$ до від'ємного напрямку осі $Ox$, як показано на малюнку. Таким чином можна параметризувати все сімейство значеннями $\alpha \in [0, 2\pi)$, де, наприклад, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ відповідають відрізкам у першому квадранті і т. д. При цьому, щоправда, координатним осям відповідатиме по два значення параметра – 0 і $\pi$ для $Ox$, $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$ для $Oy$. Таким чином, для кожного $\alpha$ відповідна пряма перетинає осі у точках $(a\cos\alpha, 0)$ і $(0, a\sin\alpha)$, а отже має рівняння

$$\frac{x}{a\cos\alpha} + \frac{y}{a\sin\alpha} = 1.$$

Приведемо до спільного знаменника:

$$\sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{a}{2}\sin 2\alpha.$$

Отже, сімейство задане функцією $F(x, y, \alpha) = \sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y - \frac{a}{2}\sin 2\alpha$. Система (3) має вигляд

$$\begin{cases} \sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y - \frac{a}{2}\sin 2\alpha = 0 \\ \cos\alpha\, x - \sin\alpha\, y - a\cos 2\alpha = 0 \end{cases}.$$

Її зручно розв'язати як лінійну систему. Так, домножаючи перше рівняння на $\sin\alpha$, друге – на $\cos\alpha$ і додаючи, маємо:

$$x = a\sin\alpha\sin\alpha\cos\alpha + a\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = a\cos^3\alpha.$$

Аналогічно домножимо перше рівняння на $\cos\alpha$, друге – на $\sin\alpha$ і віднімемо:

$$y = a\cos\alpha\sin\alpha\cos\alpha - a\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = a\sin^3\alpha.$$

Таким чином, кут $\alpha$ також став параметром кривої

$$\gamma(\alpha) = (a\cos^3\alpha,\, a\sin^3\alpha),$$

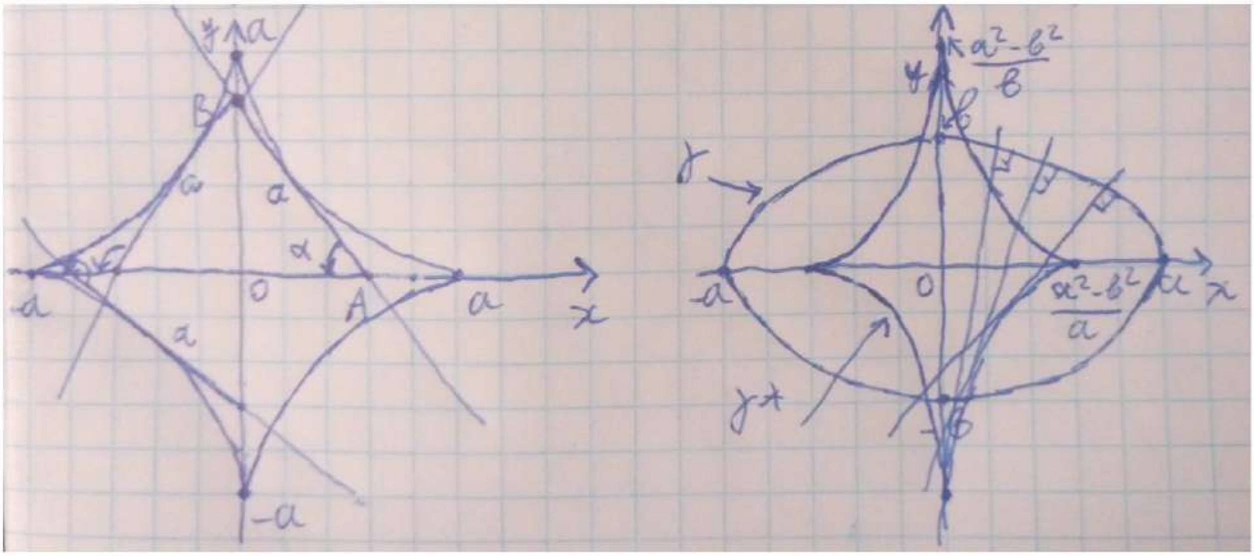
носієм якої є дискримінантна множина сімейства. Ця крива зветься астроїдою, і її рівняння часто записують у неявному вигляді, використовуючи основну тригонометричну тотожність:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Як видно з рисунка, астроїда дійсно є обгорткою даного сімейства. Це нескладно перевірити і формально: умови (1) та (2) для нашої параметризації і тотожної функції $\alpha$ набувають вигляду:

$$F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = a\sin\alpha\,\cos^3\alpha + a\cos\alpha\,\sin^3\alpha - a\sin\alpha\,\cos\alpha = 0,$$

$$F_x(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)\, x'(\alpha) + F_y(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)\, y'(\alpha) = 3a\sin\alpha\,\cos^2\alpha\,(-\sin\alpha) + 3a\cos\alpha\,\sin^2\alpha\,\cos\alpha = 0.$$




**Еволюта як обгортка нормалей.** Розглянемо сімейство нормалей деякої регулярної кривої $\gamma$ з кривиною $k \neq 0$ (до речі, що буде обгорткою її сімейства дотичних?). У якості параметра цього сімейства тут природно взяти натуральний параметр $s$ кривої. Нехай $(x(s), y(s))$ – відповідна параметризація. Будемо, як раніше, позначати через $\alpha$ кут від додатного напрямку осі $Ox$ до дотичного вектора кривої. Згадаємо, що тоді $\alpha' = k$, і

$$\tau = (x', y') = (\cos\alpha, \sin\alpha),\ \nu = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

утворюють репер Френе нашої кривої. Оскільки дотичний вектор $\tau$ є нормальним до нормалі у відповідній точці, рівняння сімейства нормалей можна записати у вигляді $F(x, y, s) = 0$, де

$$F(x, y, s) = \cos\alpha(s)(x - x(s)) + \sin\alpha(s)(y - y(s)).$$

Тоді

$$F_s(x, y, s) = -\sin\alpha(s)\,\alpha'(s)(x - x(s)) - \cos\alpha(s)\,x'(s) + \cos\alpha(s)\,\alpha'(s)(y - y(s)) - \sin\alpha(s)\,y'(s) =$$

$$= k(s)\,(-\sin\alpha(s)(x - x(s)) + \cos\alpha(s)(y - y(s))) - \cos\alpha(s)\,\cos\alpha(s) - \sin\alpha(s)\,\sin\alpha(s).$$

Таким чином, система (3) набуває вигляду

$$\begin{cases} \cos\alpha(s)(x - x(s)) + \sin\alpha(s)(y - y(s)) = 0 \\ -\sin\alpha(s)(x - x(s)) + \cos\alpha(s)(y - y(s)) = \frac{1}{k(s)} \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю лінійну систему, маємо

$$x - x(s) = -\frac{1}{k(s)}\sin\alpha(s),\ y - y(s) = \frac{1}{k(s)}\cos\alpha(s).$$

Тобто дискримінантна множина є носієм кривої

$$\gamma^*(s) := \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}\nu(s),$$

що параметризована тим самим параметром $s$. Зауважимо, що для неї цей параметр вже не буде, взагалі кажучи, натуральним, більш того, у цієї нової кривої може порушуватися регулярність у деяких точках (детальніше див. у наступних задачах). Це дійсно обгортка сімейства нормалей, бо для тотожної функції $s$ маємо в умовах (1) та (2):

$$F(x^*(s), y^*(s), s) = \cos\alpha(s)\left(-\frac{1}{k(s)}\sin\alpha(s)\right) + \sin\alpha(s)\left(\frac{1}{k(s)}\cos\alpha(s)\right) = 0,$$

$$\begin{gathered} F_x(x^*(s), y^*(s), s)\, x^{*\prime}(s) + F_y(x^*(s), y^*(s), s)\, y^{*\prime}(s) = \\ = \cos\alpha(s)\left(x'(s) + \frac{k'(s)}{k^2(s)}\sin\alpha(s) - \frac{1}{k(s)}\cos\alpha(s)\,\alpha'(s)\right) + \\ + \sin\alpha(s)\left(y'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\cos\alpha(s) - \frac{1}{k(s)}\sin\alpha(s)\,\alpha'(s)\right) = 0, \end{gathered}$$

оскільки $(x', y') = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ і $\alpha' = k$.

Крива $\gamma^*$ зветься еволютою кривої $\gamma$ (див. лекції). Нагадаємо також, що для кожного $s$ точка $\gamma(s) + \frac{1}{k(s)}\nu(s)$ зветься центром кривини, що відповідає точці $\gamma(s)$ кривої, а коло з центром у цій точці радіуса $|R(s)| = \frac{1}{|k(s)|}$ – щільнодотичним колом у $\gamma(s)$.

Нарешті, запишемо рівняння еволюти у випадку, коли параметр вихідної кривої не є натуральним. Тепер, щоб знайти одиничний вектор нормалі $\nu$, треба нормувати вектор $(-y', x')$. Разом з формулою для кривини це дає

$$x^* = x + \frac{1}{k}\frac{-y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'},$$

$$y^* = y + \frac{1}{k}\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

**Задача 10.8а.** Знайдемо еволюту еліпса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Оскільки параметр тут не є, взагалі кажучи, натуральним, використаємо загальні формули, що наведені вище:

$$x^* = a\cos t - \frac{b\cos t((-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2)}{(-a\sin t)(-b\sin t) - (-a\cos t)(b\cos t)} =$$

$$= \left(a - \frac{b(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab}\right) \cos t = \frac{a^2 - a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t}{a} \cos t = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t,$$

і аналогічно

$$y^* = b \sin t + \frac{-a \sin t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab} = \frac{b^2 - a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t}{b} \sin t = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

Якщо вихідний еліпс є колом ($a = b$), ця еволюта вироджується в його центр $(0, 0)$ (що є постійним центром кривини кола). У інших випадках це крива, що утворюється з астроїди (див. задачу 10.4) розтягненням уздовж координатних осей, аналогічно до того, як еліпс утворюється з кола. Зокрема, вона має (як і астроїда) чотири точки порушення регулярності. Дійсно, дотичний вектор

$$(x^{*\prime}, y^{*\prime}) = \left(-\frac{a^2 - b^2}{a} 3 \cos^2 t \, \sin t, \; \frac{b^2 - a^2}{b} 3 \sin^2 t \, \cos t\right)$$

дорівнює нулю при $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Ці точки відповідають вершинам еліпса (див. ілюстрацію вище). У загальному випадку регулярність також порушується у точках, що відповідають вершинам кривої, тобто там, де $k' = 0$ (див. теорему про чотири вершини овалу в лекціях).

**Задача 1.** Побудувати індикатрису дотичних кривої $\gamma$:

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = \cosh t \end{cases}, \qquad -\infty < t < \infty$$

*Розв'язання.* Запишемо радіус-вектор кривої: $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}$

Знаходимо дотичний вектор: $\dfrac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}$

Знаходимо одиничний дотичний вектор:

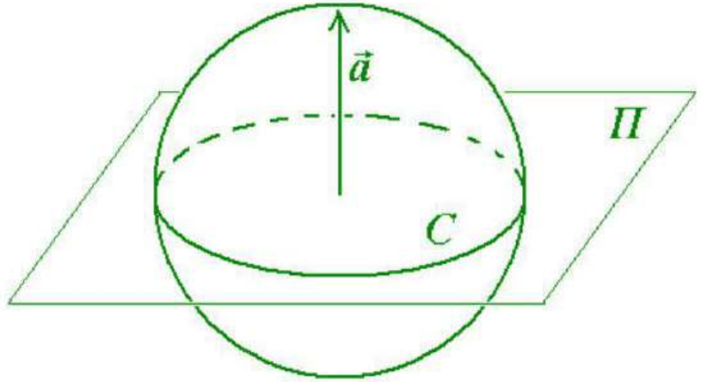
$$\vec{\tau} = \frac{1}{\left|\dfrac{d\vec{f}}{dt}\right|}\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$$

Записуємо радіус-вектор індикатриси дотичних: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh t} \\ \tanh t \end{pmatrix}$

*Відповідь:* $\begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{\cosh t}, \\ x^2 = \tanh t \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty$

**Задача 2.** Нехай $\gamma$ – регулярна замкнута крива в $I\!R^3$. Її індикатриса дотичних – це замкнута крива $\gamma^{\#}$, розташована на сфері одиничного радіусу $S^2$ в $I\!R^3$.

Доведіть, що крива $\gamma^{\#}$ не може бути розташована в жодній відкритій півсфері сфери $S^2$.




*Доведення.* Візьмемо довільну площину $\Pi$, що проходить через точку $O$ – центр сфери $S^2$.

Площина $\Pi$ перетинає сферу по великому колу $C$ і ділить сферу на дві півсфери.

Позначимо $\vec{a}$ одиничну нормаль площини $\Pi$

Розглянемо регулярну замкнуту криву $\gamma$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s),$$

$s$ – натуральний параметр. Вектор-функція $\vec{f}(s)$ є періодичною, період – довжина $L$ кривої $\gamma$.

Для точок кривої розглянемо їх відхилення від площини $\Pi$:

$$h = < \vec{a}, \vec{f}(s) >$$

Величина $h = h(s)$ є неперервно диференційовною періодичною функцією, період дорівнює $L$.

З огляду на періодичність, у функції $h(s)$ на відрізку $[0,L]$ обов'язково знайдеться хоча б одна критична точка $s_0$:

$$h'(s_0) = 0.$$

Обчислимо похідну:

$$h = \langle \vec{a}, \vec{f}(s) \rangle$$

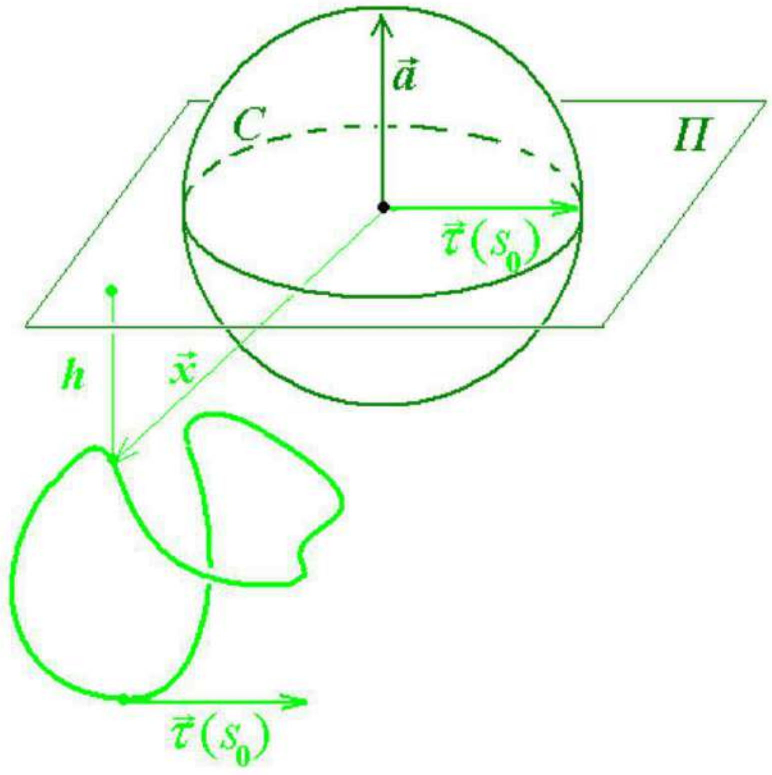
$$h' = \langle \vec{a}, \vec{f}' \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle$$

В точці $s_0$ отримуємо:

$$\langle \vec{a}, \vec{\tau}(s_0) \rangle = 0,$$

тобто, $\vec{\tau}(s_0)$ є перпендикулярним до $\vec{a}$. Це означає, що кінець вектора $\vec{\tau}(s_0)$ визначає точку, розташовану на колі $C$.

Таким чином, індикатриса дотичних перетинає коло $C$.




Як наслідок, індикатриса дотичних не може бути розташована в жодній відкритій півсфері, бо інакше вона б не перетинала граничного великого кола цієї відкритої півсфери, а цього бути не може за доведеним вище.