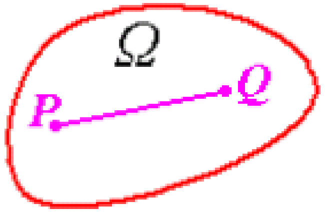
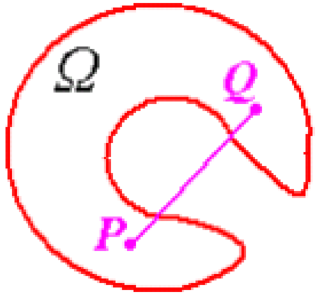
gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 8. Теорема про чотири вершини овалу.Інтегральна кривина і нерівність Фенхеля.

8.1. Теорема про чотири вершини овалу.

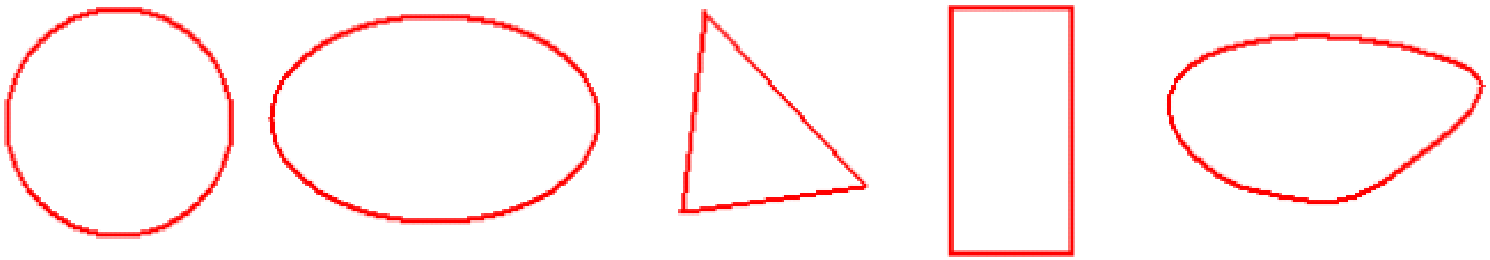
Визначення. Підмножина Ω в $\mathbb{R}^2$ називається опуклою, якщо для будь-яких точок P, Q, що належать Ω, відрізок PQ також належить Ω.



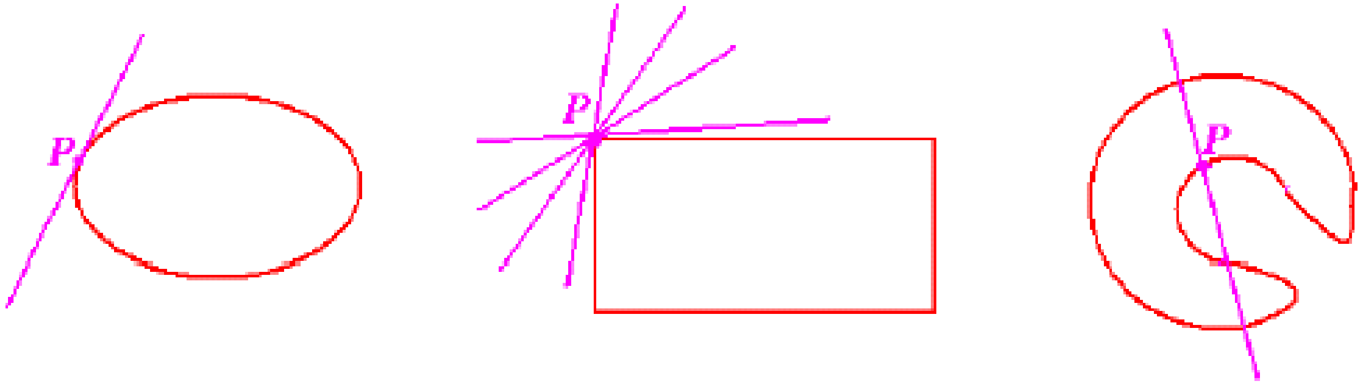


Визначення. *Овалом* називається замкнута крива в $\mathbb{R}^2$, що обмежує опуклу множину в $\mathbb{R}^2$.

Приклади. Опуклі многокутники, кола, еліпси - ці криві є овалами.



Визначення. Нехай γ - овал в $\mathbb{R}^2$. Пряма, що проходить через точку $P \in \gamma$ так, що овал γ розташовується по одну сторону (в одній півплощині) відносно цієї прямої, називається *опорною прямою* овалу γ в точці P.



Твердження. *Нехай γ - овал в $\mathbb{R}^2$.*

Через кожну точку P кривої γ можна провести опорну пряму.

Якщо крива γ є регулярно параметризованою, то опорна пряма в точці P є єдиною і співпадає з дотичною прямою кривої γ в точці P.

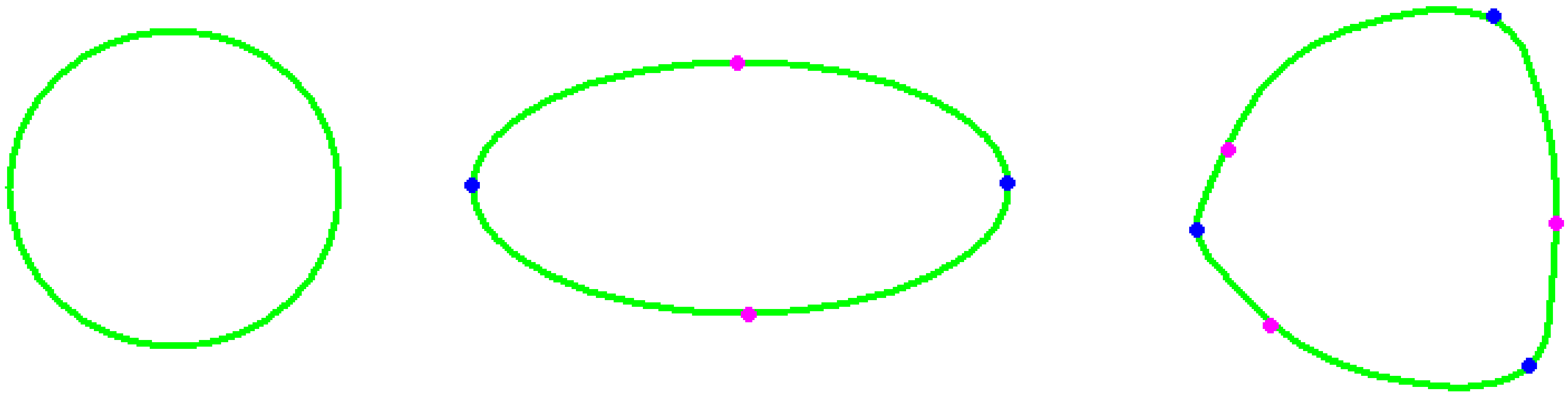
Твердження. *Нехай* γ *– регулярна (класу* C^2*) замкнута крива в* $\mathbb{R}^2$.
Припустимо, що:

1) *крива* γ *не має точок самоперетину,*
2) *кривина* $k > 0$.

Тоді крива γ *є овалом.*

Нехай γ – регулярна (класу C^2) крива в $\mathbb{R}^2$.

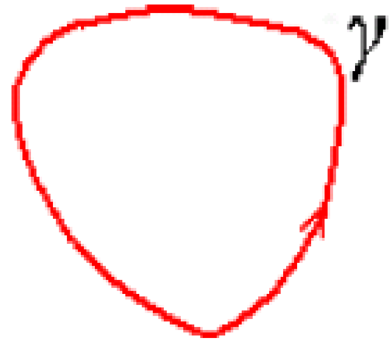
Визначення. *Вершиною* кривої γ називається така її точка P, в якій кривина k має локальний мінімум або локальний максимум, тобто $k'(P)=0$ і при переході через точку P похідна k' змінює знак.



Теорема. *Нехай γ – регулярна (класу C^3) замкнута крива в $\mathbb{R}^2$, що не має точок самоперетину і точок перегину.*

Тоді на кривій γ є щонайменше 4 вершини.

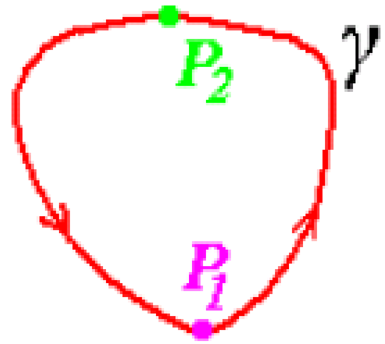
Доведення. Параметризуємо криву γ натуральним параметром s і позначимо її радіус-вектор $\vec{x}=\vec{f}(s)$.



Будемо розглядати $\vec{f}$ як періодичну вектор-функцію, задану на всій прямій R^1. Період вектор-функції f - це довжина L замкнутої кривої γ.

Оскільки вектор-функція $\vec{f}(s)$ є гладкою класу C^3, кривина $k(s)$ є гладкою класу C^1 функцією.

За теоремою Вейерштраса, існують точки P_1 і P_2 на кривій γ, в яких кривина k досягає своїх максимума і мінімума відповідно:



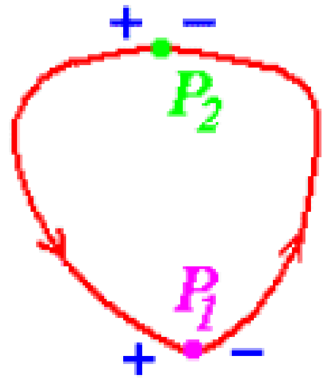
$$k(s_1)=\max_{s\epsilon[0,L]} k(s),$$
$$k(s_2)=\min_{s\epsilon[0,L]} k(s).$$

Таким чином, овал містить дві вершини P_1 і P_2. Доведемо, що на овалі γ є щонайменше ще дві інших вершини.

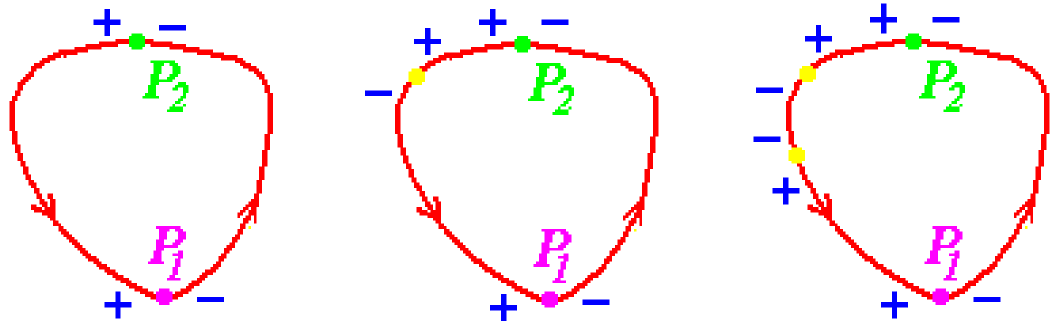
Якщо вершина P_1 не є ізольованою, то $k' \equiv 0$ в деякому околі точки P_1. Як наслідок, крива γ буде містити нескінчену кількість вершин, і доводити більше нічого. Аналогічно - стосовно іншої вершини P_2.

Тому надалі будемо вважати, що вершини P_1 і P_2 є ізольованими.

Розглянемо дві дуги P_1P_2 і P_2P_1, на які задана крива γ ділиться точками P_1 і P_2. При переході через точку P_1 похідна k' змінює знак з "+" на "–", а при переході через точку P_2 - з "–" на "+".

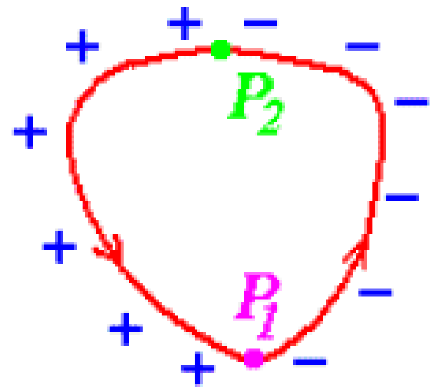


Якщо на якійсь із дуг P_1P_2 або P_2P_1 знайдеться ще хоча б одна точка, де похідна змінює знак, то таких точок на цій дузі буде щонайменше дві.



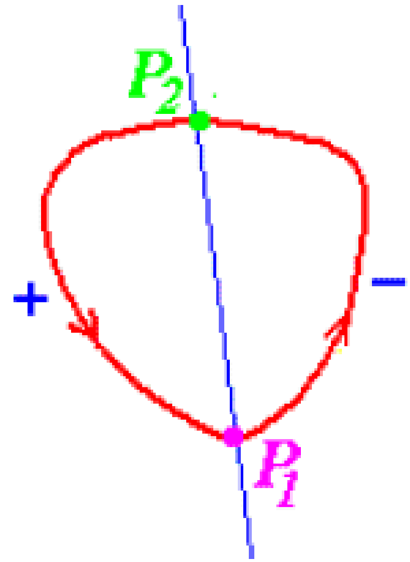
А отже крива γ міститиме ще щонайменше дві вершини, на додачу до пари вершин P_1 і P_2, що й вимагалось довести.

Тому надалі будемо припускати, що на жодній з дуг P_1P_2 і P_2P_1 немає точок, де похідна k' змінює знак. Тобто, на дузі P_1P_2 маємо $k' \leq 0$, а на дузі P_2P_1 маємо $k' \geq 0$.



Розглянемо тепер пряму Γ, що проходить через точки P_1 і P_2. З опуклості фігури, обмеженої кривою γ, випливає, що пряма Γ перетинає криву γ лише в точках P_1 і P_2.

Як наслідок, дуги P_1P_2 і P_2P_1 лежать в різних півплощинах відносно прямої Γ.



Пряма Γ задається у вигляді

$$< \vec{x}, \vec{a} > + c = 0,$$

де $\vec{a}$ - одиничний напрямний вектор прямої Γ.

Відхилення точки P від прямої Γ визначається як

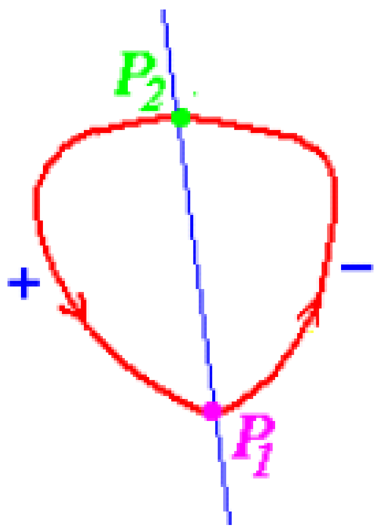
$$h = < \vec{x}_P, \vec{a} > + c,$$

де $\vec{x}_P$ - радіус-вектор точки P в R^2.

Розглянемо відхилення точок кривої γ від прямої Γ:

$$h(s) = < \vec{f}(s), \vec{a} > + c.$$

Оскільки дуга P_1P_2 лежить в одній півплощині відносно прямої Γ, відхилення точок дуги P_1P_2 від прямої Γ має один і той же знак.



З іншого боку, дуга P_2P_1 лежить в іншій півплощині відносно прямої Γ, тому відхилення точок дуги P_2P_1 від прямої Γ теж має один і той же знак, причому протилежний до відхилення точок дуги P_1P_2.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що

$h>0$ для точок дуги P_1P_2,

$h<0$ для точок дуги P_2P_1.

Згадаємо, що

$k' \le 0$, для точок дуги P_1P_2,

$k' \ge 0$ для точок дуги P_2P_1.

Розглянемо вздовж кривої γ нову функцію

$$\varphi(s) = h(s) \cdot k'$$

За побудовою, отримуємо, що

$$\varphi \le 0$$

в усіх точках кривої γ, причому $\varphi = 0$ лише в ізольованих точках.

Як наслідок,

$$\int_0^L \varphi \, ds < 0.$$

З іншого боку, проведемо обчислення вказаного інтегралу:

$$\int_0^L \varphi\, ds = \int_0^L h \cdot k' \cdot ds =$$

$$= h \cdot k \,|_0^L - \int_0^L k \cdot h' \cdot ds = -\int_0^L k \cdot h' \cdot ds =$$

$$h' = (<\vec{f}(s), \vec{a}> + c)' = <\vec{f}', \vec{a}> = <\vec{\tau}, \vec{a}>$$

$$= -\int_0^L k \cdot <\vec{\tau}, \vec{a}> \cdot ds = \int_0^L <-k\vec{\tau}, \vec{a}> ds =$$

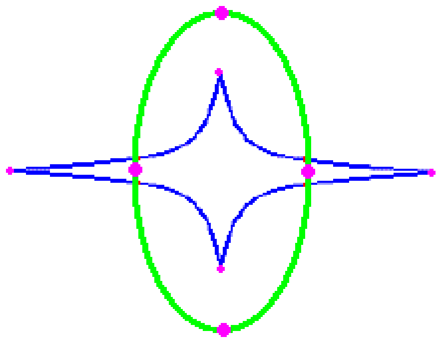
$$\vec{v}' = -k\,\vec{\tau}$$

$$= \int_0^L <\vec{v}', \vec{a}> ds = \int_0^L (<\vec{v}, \vec{a}>)'\, ds = <\vec{v}, \vec{a}>|_0^L = 0$$

Отримали протиріччя. Теорема доведена.

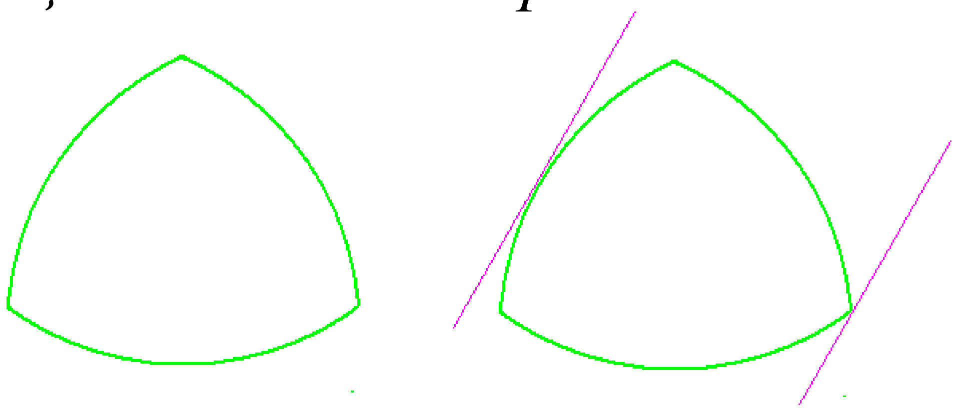
Інтерпретація. *Нехай* γ *– регулярна (класу* C^3*) замкнута крива в* $\mathbb{R}^2$*, що не має точок самоперетину і точок перегину.*

Тоді на еволюті кривої γ *є щонайменше 4 сингулярних точки.*



Уточнення. *Нехай* γ *– регулярна (класу* C^3*) замкнута крива в* $\mathbb{R}^2$*, що не має точок самоперетину і точок перегину.*

Припустимо, що крива γ *має сталу ширину.*
Тоді крива γ *має щонайменше 6 вершин.*

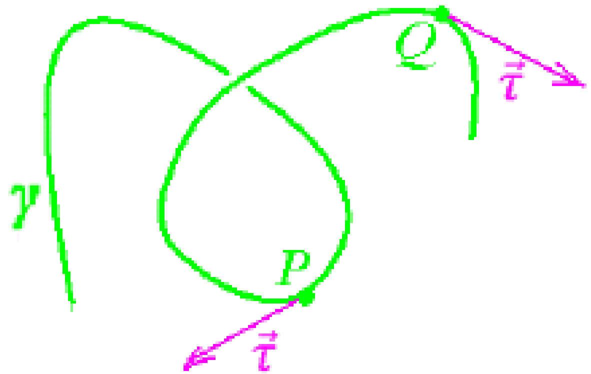


8.2. Індикатриса дотичних регулярної кривої в $\mathbb{R}^3$

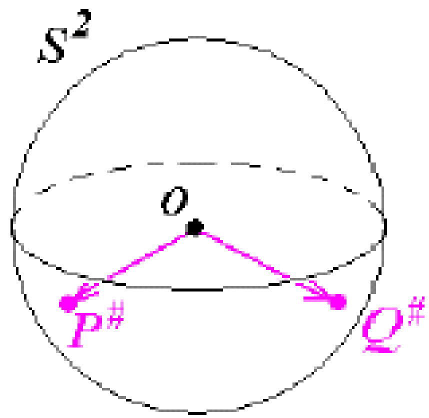
Нехай γ - регулярна крива в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \quad , t \in [a,b].$$

В кожній точці P на кривій γ визначений одиничний дотичний вектор $\vec{\tau}$. Перенесемо його паралельно в початок координат O.



Кінець перенесеного вектора задає точку $P^\#$ в $\mathbb{R}^3$. Оскільки $\vec{\tau}$ є одиничним, тобто має одиничну довжину, точка $P^\#$ розташовується на сфері S^2 одиничного радіусу з центром в початку координат O в $\mathbb{R}^3$.



Коли точка P рухається вздовж кривої γ, відповідна їй точка $P^{\#}$ рухається по сфері S^2, утворюючи деяку підмножину $\gamma^{\#}$ на S^2. Ця підмножина $\gamma^{\#}$ називається *індикатрисою дотичних* кривої γ.

Індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ кривої γ задається вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{\tau}(t) = \frac{1}{|\vec{f}\,'|}\vec{f}\,'$$

Якщо крива γ параметризована натуральним параметром,

$$\vec{x} = \vec{f}(s)\,,$$

то її індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ задається вектор-функцією

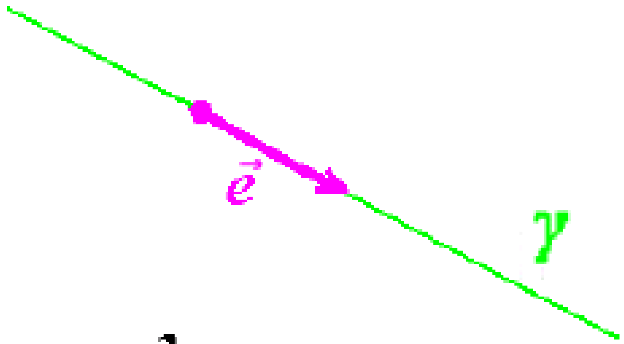
$$\vec{x} = \vec{\tau}(s) = \vec{f}_s'\,,$$

оскільки натуральна параметризація характеризується умовою $|\vec{f}_s'| \equiv 1$.

Приклади.

1. Якщо γ – пряма з напрямним одиничним вектором $\vec{e}$, то її індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ – точка на сфері, що відповідає вектору $\vec{e}$.

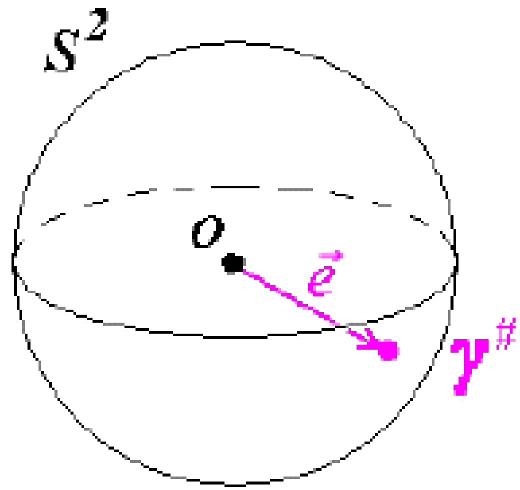
Дійсно, пряма задається вектор-функцією



$$\vec{x} = \vec{e}\, t + \vec{x}_0$$

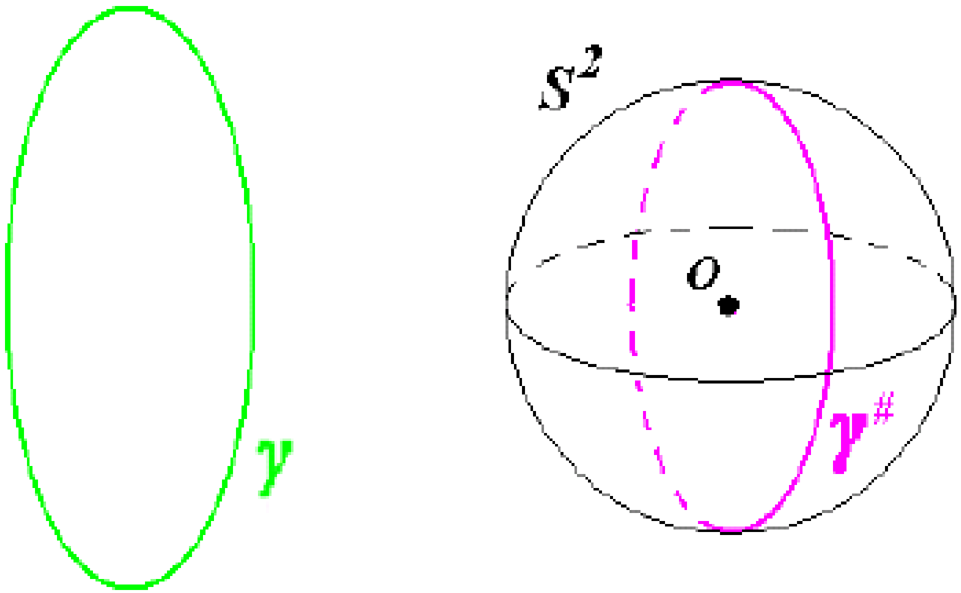
Обчислюючи похідну вектор-функції $\vec{f}(t) = \vec{e}\, t + \vec{x}_0$, маємо $\vec{f}' = \vec{e}$.

Тому, $\vec{\tau}(t) = \frac{1}{|\vec{e}|}\vec{e} = \vec{e}$. Інакше кажучи, в усіх точках прямої її дотичні вектори колінеарні вектору $\vec{e}$.



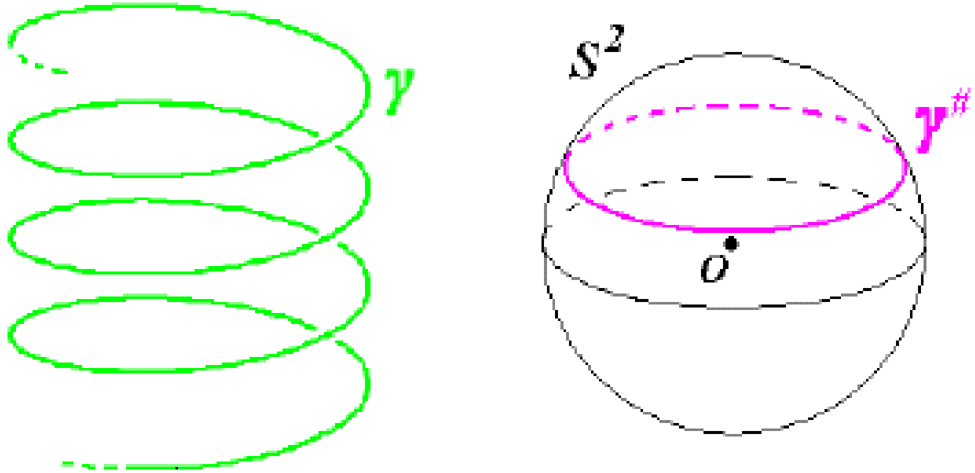
Як результат, індикатриса $\gamma^{\#}$ задається радіус-вектором $\vec{x} = \vec{e}$ і представляє собою одну точку на сфері S^2.

2. Якщо γ – коло довільного радіусу, що розташоване в деякій двомірній площині Π в $\mathbb{R}^3$, то його індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ – це велике коло (коло одиничного радіусу) на сфері S^2, яке утворюється перетином сфери S^2 та площини $\Pi^{\#}$, що проходить через початок координат O паралельно площині Π.



Вправа на візуальну уяву. Для декількох точок на колі γ побудуйте дотичні вектори одиничної довжини, потім перенесіть їх в початок координат O і відзначте кінцеві точки перенесених векторів – ці точки будуть розташовуватись як раз на індикатрисі дотичних $\gamma^{\#}$.

3. Якщо γ – гвинтова лінія в $\mathbb{R}^3$, то її індикатриса дотичних $\gamma^\#$ – маленьке коло на сфері S^2.



Вправа на візуальну уяву. Для декількох точок на гвинтовій лінії γ побудуйте дотичні вектори одиничної довжини. Впевніться, що ці вектори будуть розташовані під одним й тим самим кутом відносно осі гвинтової лінії. Потім перенесіть ці дотичні вектори в початок координат O і відзначте кінцеві точки перенесених векторів – ці точки будуть розташовуватись як раз на індикатрисі дотичних $\gamma^\#$.

Задача.

1. Доведіть, що якщо до кривої γ застосувати паралельний перенос або гомотетію, то її індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ не зміниться.

2. Доведіть, що якщо до кривої γ застосувати обертання, то таке ж обертання буде застосовуватись і до її індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$.

3. Доведіть, що якщо на кривій γ змінити орієнтацію (напрям руху), то до індикатриси дотичних $\gamma^{\#}$ потрібно застосувати відображення сфери S^2, яке відображає точки сфери в їх діаметрально протилежні точки.

Твердження (властивості індикатриси дотичних)

Нехай γ є регулярною класу гладкості C^m , $m\geq 2$, кривою в $\mathbb{R}^3$.

Припустимо, що кривина k кривої γ не обертається в нуль.

Тоді індикатриса дотичних $\gamma^\#$ є регулярною класу гладкості C^{m-1} кривою.

При цьому натуральний параметр $s^\#$ на кривій $\gamma^\#$ пов'язаний з натуральним параметром s на кривій γ співвідношенням

$$ds^\# = k\, ds.$$

Як наслідок, довжина індикатриси дотичних $\gamma^\#$ дорівнює інтегральній кривині кривої γ:

$$L(\gamma^\#) = \int_\gamma k\, ds$$

Доведення. Будемо вважати, що крива γ параметризована натуральним параметром s і задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s).$$

Індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\tau}(s).$$

Оскільки $\vec{\tau}(s) = \vec{f}\,'$ і вектор-функція $\vec{f}(s)$ є гладкою класу C^m, то вектор-функція $\vec{\tau}(s)$ є гладкою класу C^{m-1}.

Обчислимо похідну, застосовуючи формули Френе:

$$\vec{\tau}\,' = k\vec{\nu}.$$

Звідси

$$|\vec{\tau}\,'| = k,$$

адже $\vec{\nu}$ має одиничну довжину.

Оскільки $k \neq 0$ за умовою, то $\vec{\tau}\,' \neq 0$, а, значить, індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ є регулярною класу C^{m-1} кривою в $\mathbb{R}^3$.

Далі, натуральний параметр $s^\#$ на кривій $\gamma^\#$ визначається співвідношенням

$$\frac{ds^\#}{ds} = |\vec{\tau}'| \,,$$

звідки, з урахуванням $|\vec{\tau}_s'| = k$, отримуємо

$$ds^\# = k\, ds.$$

Нарешті, обчислюємо довжину кривої $\gamma^\#$:

$$L(\gamma^\#) = \int\limits_{\gamma} ds^\# = \int\limits_{\gamma} |\vec{\tau}'|\, ds = \int\limits_{\gamma} k\, ds \,,$$

що і вимагалось довести.

Зауваження. Сингулярні точки на індикатрисі дотичних $\gamma^\#$ відповідають точкам перегину на кривій γ, де її кривина k обертається в нуль.

Твердження. *Якщо регулярна крива γ в $\mathbb{R}^3$ є замкнутою, то її індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ також є замкнутою кривою.*

Доведення. Замкнута регулярна крива представляється періодичною вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(s),$$

$$\vec{f}(s+L) = \vec{f}(s)\ .$$

Похідна $\vec{\tau} = \vec{f}_s'$ періодичної вектор-функції $\vec{f}$ є періодичною вектор-функцією. Як наслідок, індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ задається періодичною вектор-функцією $\vec{x} = \vec{\tau}(s)$ і тому є замкнутою кривою.

Зауваження. Обернене твердження не є вірним, контрприклад - гвинтова лінія в $\mathbb{R}^3$: сама крива не є замкнутою, а її індикатриса дотичних – замкнута крива (коло на сфері). Але вірним є деяке уточнене обернене твердження – теорема Вигодського (дивись *Ю.А. Аминов, Дифференциальная геометрия и топология кривых)*.

Твердження (нерівність Фенхеля). *Якщо γ є замкнутою регулярною класу гладкості C^2 кривою в $\mathbb{R}^3$, то*

$$\int_\gamma k\, ds \geq 2\pi ,$$

при цьому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли γ є плоскою опуклою кривою.

Твердження (нерівність Фері-Мілнора). *Якщо γ є замкнутою регулярною класу C^2 кривою в $\mathbb{R}^3$, що є завузленою, то*

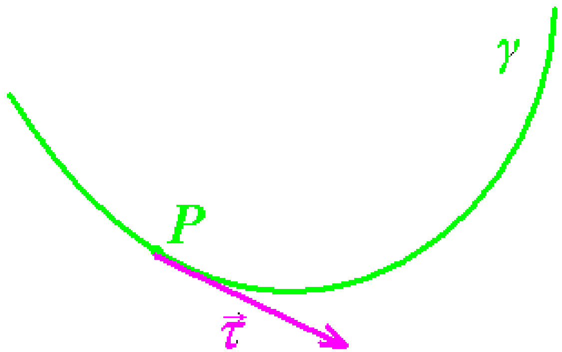
$$\int_\gamma k\, ds > 4\pi$$

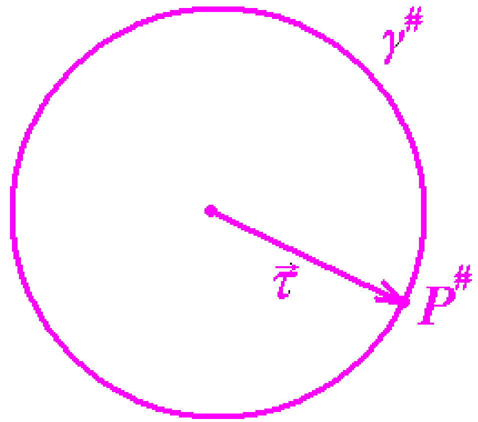
Доведення полягає в аналізі властивостей індикатриси дотичних і встановленню, що її довжина задовольняє відповідній оцінці знизу. А довжина індикатриси дотичних якраз дорівнює інтегральній кривині кривої, що і призводить до потрібних нерівностей. Дивись *Ю.А. Аминов, Дифференциальная геометрия и топология кривых*.

8.3. Індикатриса дотичних – випадок плоских кривих

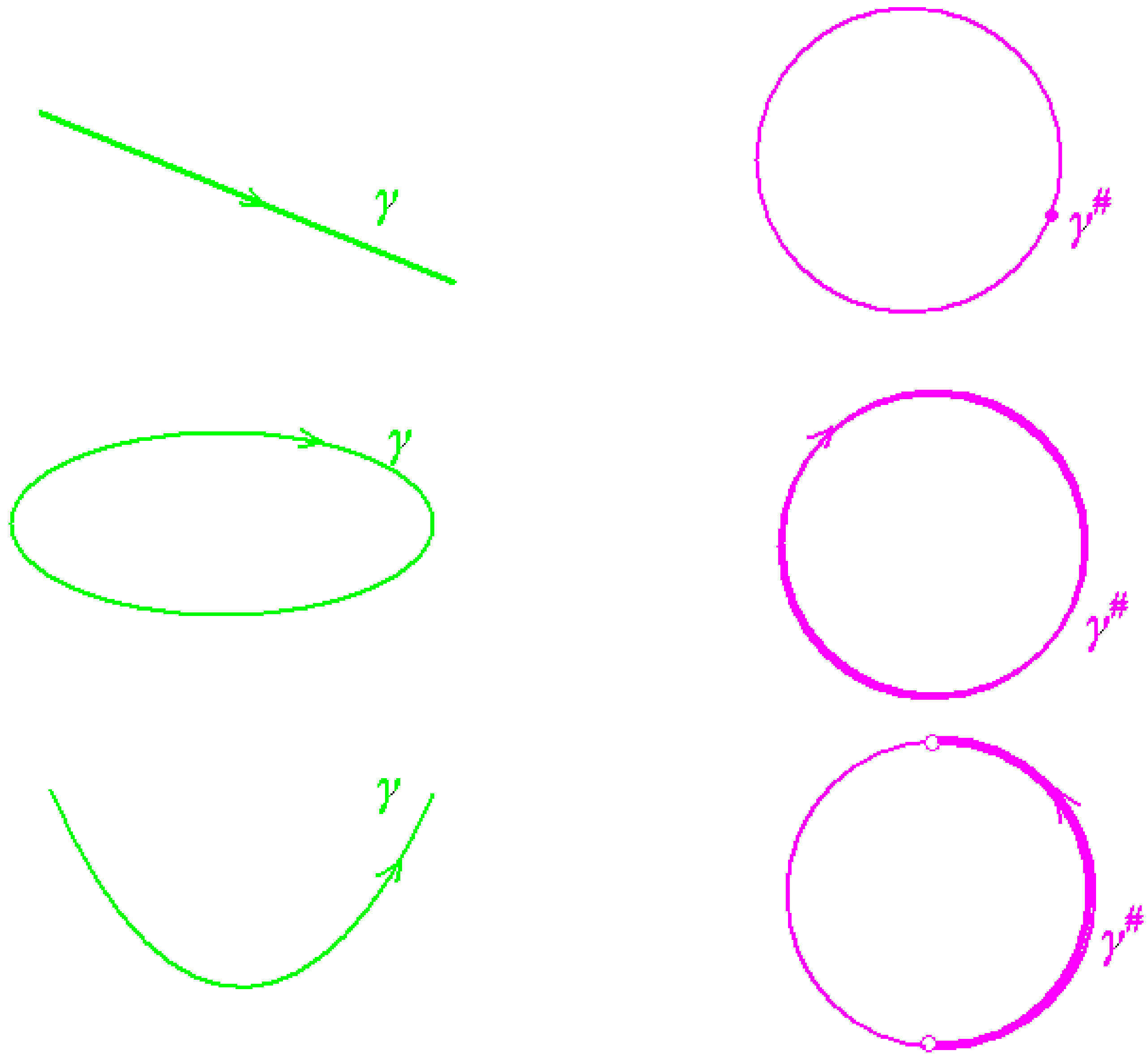
Нехай γ – регулярна крива в площині $I\!R^2$.
Індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ кривої γ – це параметризація одиничного кола S^1.

Крива γ	Індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$
$\vec{x} = \vec{f}(s)$	$\vec{x} = \vec{\tau}(s) = \dfrac{d\vec{f}}{ds}$
$\vec{x} = \vec{f}(t)$	$\vec{x} = \vec{\tau}(t) = \dfrac{1}{\left\lvert \dfrac{d\vec{f}}{dt} \right\rvert} \dfrac{d\vec{f}}{dt}$

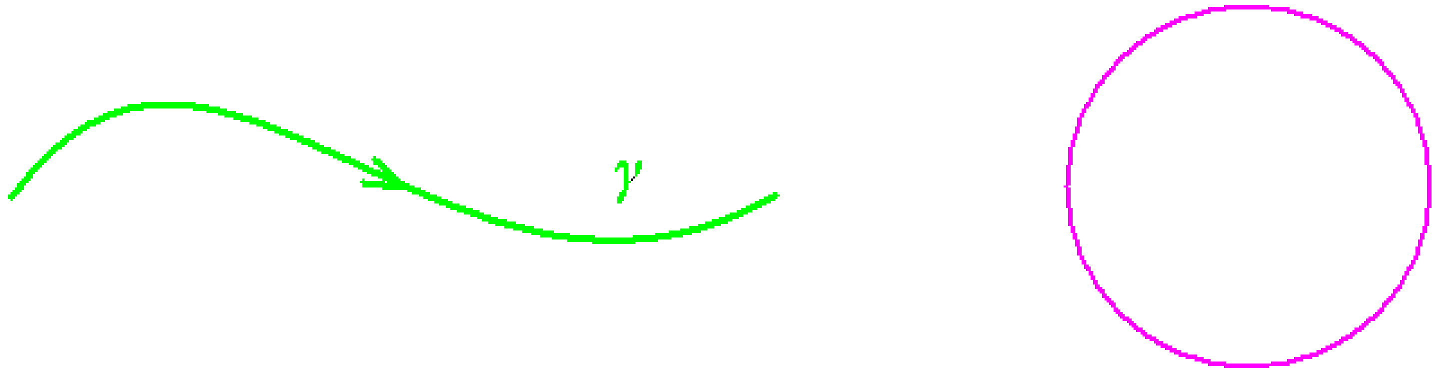




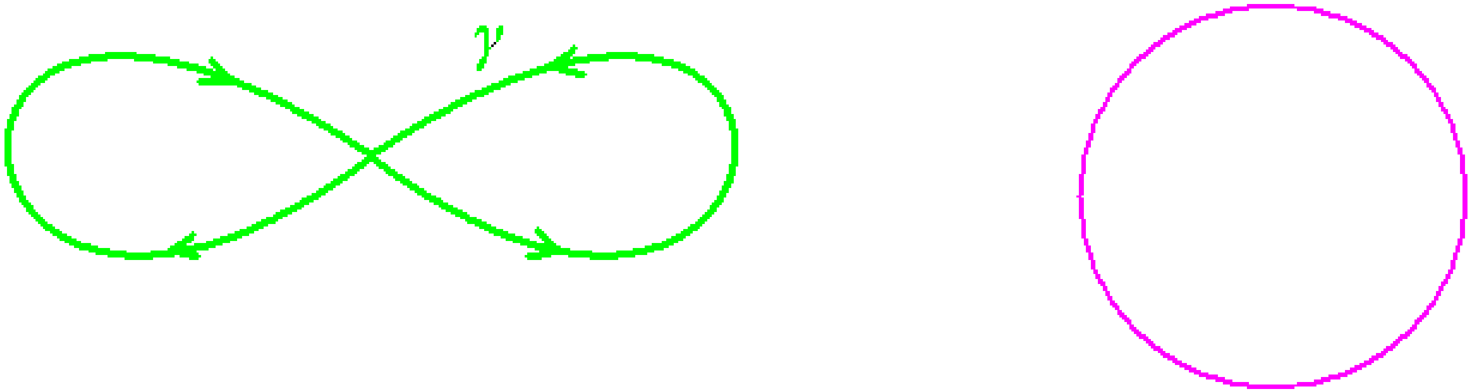
Приклади 1



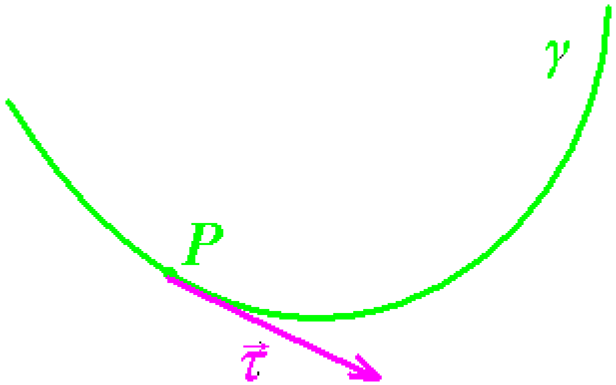
Приклад 2

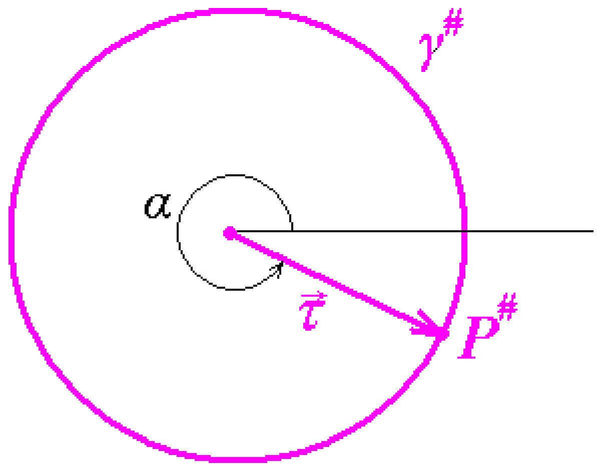


Приклад 3



Нагадування: $$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$





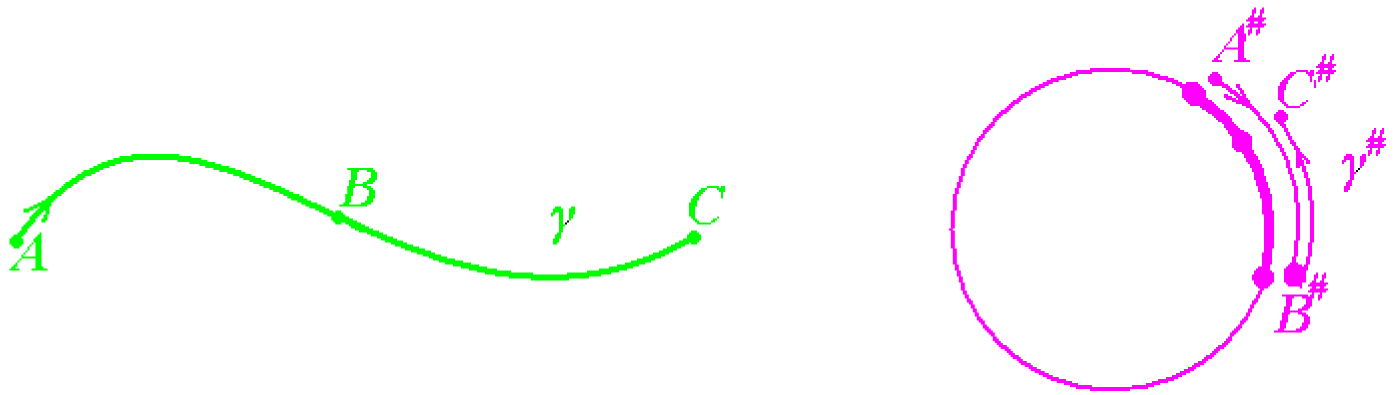
Індикатриса дотичних $\gamma^{\#}$ кривої γ, як траєкторія точки, що рухається по колу S^1, представляється функцією

$$\alpha=\alpha(s)$$

Нагадування: $k = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$, $k^* = \dfrac{d\alpha}{ds}$

Точкам перегину на кривій γ відповідають сингулярні точки на індикатрисі дотичних.

Зміна знаку кривини k^* при переході через точку перегину на кривій γ відповідає зміна напрямку рух по колу при побудові індикатриси дотичних $\gamma^\#$.



Наслідок. Інтегральна кривина кривої γ дорівнює довжині індикатриси дотичних $\gamma^\#$ з врахуванням кратності (пройдений шлях):

$$\int_\gamma k\,ds = l(\gamma^\#)$$

А інтегральна кривина зі знаком кривої γ дорівнює отриманий приріст кута (переміщення) на індикатриси дотичних $\gamma^\#$:

$$\int_\gamma k^*\,ds = \alpha(C) - \alpha(A)$$

Наслідок (інтегральна кривина замкнутої плоскої кривої)

Якщо регулярна крива γ *в* $\mathbb{R}^2$ *є замкнутою, то інтегральна кривина "зі знаком" кривої* γ *є кратною* 2π*:*

$$\oint_\gamma k^* ds = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ідея доведення. Коли точка P пробігає всю замкнуту криву γ, одиничний дотичний вектор $\vec{\tau}$ робить один або декілька повних поворотів на кут 2π.

Приклади-ілюстрації (*перевірте*)