Варіант 2.

Дана група Лі $G = Sp(2,\mathbb{R}) = \{A \in Mat(2,\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}$, де $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Це дійсна симплектична група, вона складається з матриць симплектичних перетворень стандартної симпл. структури на $\mathbb{R}^2$ – форми з м-цею Ω $\omega((x^1,x^2),(y^1,y^2)) = x^1 y^2 - x^2 y^1$, тобто операторів $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що зберігають цю форму.

Це група, бо $A, B \in Sp(2,\mathbb{R}) \Rightarrow (AB)^T \Omega (AB) = B^T (A^T \Omega A) B = B^T \Omega B = \Omega$ і $A \in Sp(2,\mathbb{R}) \Rightarrow 1 = \det \Omega = \det A^T \Omega A = (\det A)^2 \det \Omega = (\det A)^2$, тому $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$; $A^T \Omega A = \Omega \Rightarrow A^T \Omega = \Omega A^{-1} \Rightarrow \Omega A^T \Omega = \Omega^2 A^{-1} = -A^{-1}$ (і взагалі $\Omega^2 = -I \Rightarrow \Omega^{-1} = -\Omega$).

Отже, $A^{-1} = -\Omega A^T \Omega \Rightarrow$

$$(A^{-1})^T \Omega A^{-1} = -\Omega^T A \Omega^T \Omega A^{-1} = [\Omega^T = -\Omega] = -\Omega A \Omega^2 A^{-1} = [\Omega^2 = -I] =$$

$= \Omega A A^{-1} = \Omega$. Отже, $A^{-1} \in Sp(2,\mathbb{R})$.

Також ми показали, що $A \in Sp(2,\mathbb{R}) \Rightarrow \det A \neq 0$, тобто $Sp(2,\mathbb{R}) \subset GL(2,\mathbb{R})$. Ця підгрупа замкнена, бо якщо $A_n \to A$ і $A_n \in Sp(2,\mathbb{R})$ $\forall n$, то $A^T \Omega A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n^T \Omega A_n = \Omega$ за неперервність множення м-ць. Тоді це (вкладена) підгрупа Лі у $GL(2,\mathbb{R})$ за <u>Th.</u> Картана, тобто матрична група Лі.

– Знайти алгебру Лі даної групи.

За ф-лою (5.1) з лекцій,

$$\mathfrak{g} = sp(2,\mathbb{R}) = \{ A'(t_0) \mid A \in C^\infty((\alpha,\beta), Sp(2,\mathbb{R})) : A(t_0) = I \}.$$

$\forall$ такої матр. кривої $\forall t$ $A(t) \in Sp(2,\mathbb{R})$, тобто

$$A(t)^T \Omega A(t) = \Omega$$

Диференціюємо:

$$A'(t)^T \Omega A(t) + A(t)^T \Omega A'(t) = 0$$

Підставимо $t = t_0$, врахуємо $A(t_0) = I$ і покладемо $X := A'(t_0)$:

$$x^T\Omega + \Omega x = 0.$$

Отже, $sp(2,\mathbb{R}) \subset \{ x \in Mat(2,\mathbb{R}) \mid x^T\Omega + \Omega x = 0 \}$.

У навпаки, $\forall x : x^T\Omega + \Omega x$ покладемо $A(t) = e^{tx}$ (це стандартний вибір для матричних груп – однопараметрична підгрупа). A визначена на $\mathbb{R}$, гладка, $A(0) = I$, $A'(0) = x$.

Залишилося перевірити, що $A : \mathbb{R} \to Sp(2,\mathbb{R})$ (апріорі $\to GL(2,\mathbb{R})$).

Дійсно, $x^T\Omega = -\Omega x \Rightarrow -x^T = x^T\Omega^2 = -\Omega x\Omega$, тобто $x^T = \Omega x \Omega$. Тоді $\forall t \in \mathbb{R}$

$$A(t)^T = e^{tx^T} = e^{t\Omega x \Omega} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(t\Omega x\Omega)^i = I + t\Omega x\Omega + \underbrace{\frac{1}{2}(t\Omega x\Omega)(t\Omega x\Omega)}_{=\frac{1}{2}t^2\Omega x\Omega^2 x\Omega} + \underbrace{\frac{1}{6}(t\Omega x\Omega)(t\Omega x\Omega)(t\Omega x\Omega)}_{=\frac{1}{6}t^3\Omega x\Omega^2 x\Omega^2 x\Omega} = \ldots = [\Omega^2 = -I] =$$

$$= -\Omega^2 - \Omega(-tx)\Omega - \frac{1}{2}\Omega(-tx)^2\Omega - \frac{1}{6}\Omega(-tx)^3\Omega - \ldots =$$

$$= -\Omega e^{-tx}\Omega.$$

Отже, $\forall t \in \mathbb{R}$ $A(t)^T\Omega A(t) = -\Omega e^{-tx}\Omega^2 e^{tx} = \Omega e^{-tx}e^{tx} = \Omega$

$\Rightarrow A(t) \in Sp(2,\mathbb{R})$. Тому дійсно $A \in C^\infty(\mathbb{R}, Sp(2,\mathbb{R}))$. Отже, $x \in sp(2,\mathbb{R})$. Т.ч., $sp(2,\mathbb{R}) = \{ x \in Mat(2,\mathbb{R}) \mid x^T\Omega + \Omega x = 0 \}$.

Все, сказане до цього часу вірне й для

$Sp(n,\mathbb{R}) := \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) \mid A^T \Omega A = \Omega\}$, де $\Omega = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right) \end{array}$.

Тут n парне (і так само $\Omega^2 = -I$). Зокрема,

$sp(n,\mathbb{R}) = \{x \in Mat(n,\mathbb{R}) \mid x^T \Omega + \Omega x = 0\}$.

Далі речі специфічні для $n=2$. Знайдемо цю алгебру Лі!

$x = \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \in sp(2,\mathbb{R}) \iff$

$$0 = \begin{pmatrix} x & \mu \\ \lambda & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & x \\ -\nu & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -x & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+\nu \\ -\nu-x & 0 \end{pmatrix}$$

$\iff 0 = x + \nu = \mathrm{Tr}\, x$. Тобто $sp(2,\mathbb{R}) = sl(2,\mathbb{R})$! А що з групою?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{R}) \iff$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -bc+ad \\ -ad+bc & 0 \end{pmatrix}$$

$\iff 1 = ad - bc = \det A$. Дійсно, $Sp(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$!

— Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g} = sp(2,\mathbb{R})$ і знайти її структ. константи у цьому базисі.

Знову ж, $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \in sp(2,\mathbb{R}) \iff \varkappa = -\nu$.

Оберемо $e_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо попарні дужки Лі (матричні комутатори):

$$[e_1, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e_3 = -[e_2, e_1]$$

$$[e_2, e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2e_2 = -[e_3, e_2]$$

$$[e_3, e_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_1 = -[e_1, e_3]$$

Тобто $C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1$, $C_{23}^2 = -C_{32}^2 = 2$, $C_{31}^1 = -C_{13}^1 = 2$, решта структурних констант нульові (зокрема, $[e_i, e_i] = 0 \ \forall i \Rightarrow C_{ii}^j = 0 \ \forall i, j$).

– Визначимо лівоінв. м-ку ортонормованим базисом $\{X_1, X_2, X_3\}$, де $X_i := X_{e_i}$, $i = \overline{1,3}$. Знайти $\nabla_{X_1} X_3$. За Тв. 17.1 лекцій, $\nabla_{X_1} X_3 = \frac{1}{2}\left([X_1, X_3] - ad^*_{X_1} X_3 - ad^*_{X_3} X_1\right)$.

Зауважимо, що за Тв. 9.1 лекцій дужки Лі X_i такі ж, що у e_i:

$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3$, $[X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = 2X_2$, $[X_3, X_1] = -[X_1, X_3] = 2X_1$.

Залишилося знайти $ad^*_{X_1} X_3$, $ad^*_{X_3} X_1$, виписати їх на базисі:

$$\left.\begin{aligned} \langle ad^*_{X_1} X_3, X_1 \rangle &= \langle X_3, [X_1, X_1] \rangle = 0 \\ \langle ad^*_{X_1} X_3, X_2 \rangle &= \langle X_3, [X_1, X_2] \rangle = \langle X_3, X_3 \rangle = 1. \\ \langle ad^*_{X_1} X_3, X_3 \rangle &= \langle X_3, [X_1, X_3] \rangle = \langle X_3, -2X_1 \rangle = 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ad^*_{X_1} X_3 = X_2$, бо базис ортонормований. Ан-но,

$$\left.\begin{aligned} \langle ad^*_{X_3} X_1, X_1 \rangle &= \langle X_1, [X_3, X_1] \rangle = \langle X_1, 2X_1 \rangle = 2 \\ \langle ad^*_{X_3} X_1, X_2 \rangle &= \langle X_1, [X_3, X_2] \rangle = \langle X_1, -2X_2 \rangle = 0 \\ \langle ad^*_{X_3} X_1, X_3 \rangle &= \langle X_1, [X_3, X_3] \rangle = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ad^*_{X_3} X_1 = 2X_1$. Отже,

$$\nabla_{X_1} X_3 = \frac{1}{2}\left([X_1, X_3] - ad^*_{X_1} X_3 - ad^*_{X_3} X_1\right) = \frac{1}{2}\left(-2X_1 - X_2 - 2X_1\right) =$$

$$= -2X_1 - \frac{1}{2} X_2.$$

– Знайти кривину $K(X_1, X_2)$ цієї метрики.

Використаємо ф-лу з $\underline{\text{Рп. 17.2}}$ лекції:

$$K(X_1,X_2)=\underbrace{\left(\frac{1}{|X_1|^2|X_2|^2-\langle X_1,X_2\rangle^2}\right)}^{=1}\left(-\langle ad^*_{X_1}X_1,\ ad^*_{X_2}X_2\rangle+\frac{1}{4}\left|ad^*_{X_1}X_2+ad^*_{X_2}X_1\right|^2-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}\left|[X_1,X_2]\right|^2-\frac{1}{2}\langle[[X_1,X_2],X_2],X_1\rangle-\frac{1}{2}\langle[[X_2,X_1],X_1],X_2\rangle\right).$$

Як раніше, знаходимо:

$$\left.\begin{aligned}&\langle ad^*_{X_1}X_1,X_1\rangle=\langle X_1,[X_1,X_1]\rangle=0\\&\langle ad^*_{X_1}X_1,X_2\rangle=\langle X_1,[X_1,X_2]\rangle=\langle X_1,X_3\rangle=0\\&\langle ad^*_{X_1}X_1,X_3\rangle=\langle X_1,[X_1,X_3]\rangle=\langle X_1,-2X_1\rangle=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow ad^*_{X_1}X_1=-2X_3$$

$$\left.\begin{aligned}&\langle ad^*_{X_2}X_2,X_1\rangle=\langle X_2,[X_2,X_1]\rangle=\langle X_2,-X_3\rangle=0\\&\langle ad^*_{X_2}X_2,X_2\rangle=\langle X_2,[X_2,X_2]\rangle=0\\&\langle ad^*_{X_2}X_2,X_3\rangle=\langle X_2,[X_2,X_3]\rangle=\langle X_2,2X_2\rangle=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow ad^*_{X_2}X_2=2X_3$$

Зокрема, інт. траєкторії X_1 і X_2 не є геодезичними $\left(\begin{array}{l}\text{а ось інт. тр.}\\ X_3 - \text{є}\end{array}\right)$

$$\left.\begin{aligned}&\langle ad^*_{X_1}X_2,X_1\rangle=\langle X_2,[X_1,X_1]\rangle=0\\&\cancel{\langle ad^*_{X_1}X_2,X_2\rangle=\langle X_2,[X_1,X_2]\rangle=\langle X_2,X_3\rangle=0}\\&\langle ad^*_{X_1}X_2,X_3\rangle=\langle X_2,[X_1,X_3]\rangle=\langle X_2,-2X_1\rangle=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \cancel{ad^*_{X_1}X_2=0}$$

$$\left.\begin{aligned}
\langle ad^*_{X_2} X_1, X_1\rangle &= \langle X_1, [X_2, X_1]\rangle = \langle X_1, -X_3\rangle = 0\\
\langle ad^*_{X_2} X_1, X_2\rangle &= \langle X_1, [X_2, X_2]\rangle = 0\\
\langle ad^*_{X_2} X_1, X_3\rangle &= \langle X_1, [X_2, X_3]\rangle = \langle X_1, 2X_2\rangle = 0
\end{aligned}\right\} ad^*_{X_2} X_1 = 0$$

Таким чином,

$$K(X_1, X_2) = -\langle -2X_3, 2X_3\rangle + \frac{1}{4}|0+0|^2 - \frac{3}{4}|X_3|^2 - \frac{1}{2}\langle [X_3, X_2], X_1\rangle -$$
$$-\frac{1}{2}\langle [-X_3, X_1], X_2\rangle = 4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\langle -2X_2, X_1\rangle - \frac{1}{2}\langle -2X_1, X_2\rangle = \frac{13}{4}.$$

Також можна підрахувати, що $K(X_1, X_3) = K(X_2, X_3) = -\frac{7}{4}$, тобто це многовид знакозмінної кривини. Зі статті Мілнора відомо, що його кривина Річчі також знакозмінна, а скалярна - від'ємна.

Цікаво, що універсальне накриття $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ цієї групи Лі разом з Nil (саме з такими станд. метриками) входять до списку 8 геометрій Терстона: однозв'язних 3-вим. рім. многовидів, на фактор-простори яких можна певним чином "розрізати" $\forall$ 3-вим. орієнтовний комп. многовид. Крім них це E^3, S^3, H^3, $S^2\times\mathbb{R}$, $H^2\times\mathbb{R}$ і Sol - ще одна гр. Лі з лівоінв. м-кою.