Варіант 1

Довести, що будь-який ретракт стяжного простору стяжний.

Варіант 2

Нехай відображення $f, g\colon GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(2n,\mathbb{R})$ задані формулами

$$f(A,B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad g(A,B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де E – одинична матриця порядка n. Довести, що $f \sim g$.

Варіант 3

Говорять, що топологічний простір X має властивість нерухомої точки, якщо для будь-якого неперервного $f\colon X \to X$ існує така $x \in X$, що $f(x) = x$. Довести, що якщо X має властивість нерухомої точки, то таку властивість має й будь-який його ретракт.

Варіант 4

Довести, що об'єднання кола $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ і відрізка $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ гомотопічно еквівалентне, але негомеоморфне S^1.

Варіант 5

Нехай X – топологічний простір, $f, g \in C(I,X)$ – шляхи, $f(1) = g(0)$. Нехай $r \in (0,1)$. Визначимо шлях $h \in C(I,X)$ наступним чином:

$$h(t) = \begin{cases} f\left(\frac{t}{r}\right), & t \in [0,r]; \\ g\left(\frac{t-r}{1-r}\right), & t \in [r,1]. \end{cases}$$

Довести, що $h \sim f * g$ (як шляхи).

Варіант 6

Довести, що у гомотопічно еквівалентних просторів рівна кількість компонент зв'язності.

Варіант 7

Нехай X – топологічний простір, $f \in C(I,X)$ – шлях, $r \in I$. Визначимо шляхи $f_1, f_2 \in C(I,X)$ наступним чином: $f_1(t) = f(rt)$, $f_2(t) = f((1-r)t + r)$. Довести, що $f \sim f_1 * f_2$ (як шляхи).