39.18 – з 39.17 у 1. Y повинен бути лін. зв'язним (бо $\forall f \in C(X,Y)$ $f \sim$ постійному $f(x)$, $x \in X$, але $f(x)$ і $g(x)$ для $f \neq g$ можуть лежати у різних зв. комп. Y; якщо ж Y лін. зв., то $\forall$ 2 постійних зв. $f(x) \sim g(x)$.)

39.21 (6) Ан-но $S^3 \setminus S^1$ у 39.13(3), $S^n \setminus S^m \cong \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \sim S^{n-m-1}$ за 39.13(2) (гомео-зм – стереогр. проекція). Тому $\forall x \in S^n \setminus S^m$

$$\pi_1(S^n \setminus S^m, x) = \begin{cases} \{[e_x]\}, & n = m+1,\ n \geq m+3 \\ \cong \mathbb{Z}, & n = m+2 \end{cases}$$

39.21(10) $X = S^2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$, де $D_i \cong D^2$ $\forall i$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Можна побудувати гомео-зм $\Phi : X \to S^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n}$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, стягнувши ці диски у точки. Нехай $\Psi : S^2 \setminus \{x_n\} \to \mathbb{R}^n$ – стереогр. пр., тоді $\Psi \circ \Phi : X \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\Psi(x_i)\}_{i=1}^{n-1}$ – гомео-зм. Отже, $\pi_1(X,x) \cong$

$$\cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\Psi(x_i)\}_{i=1}^{n-1}, \Psi(\Phi(x))) \begin{cases} \cong \pi_1(\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n-1}, y) \cong \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle, & n \geq 2 \\ = \{[e_{\Psi(\Phi(x))}]\}, & n = 1 \end{cases}$$

y – $\forall$ точка.

39.21(7) $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1$

$\mathbb{R}P^3 = S^3 / \mathbb{Z}_2$, тобто $S^3/\sim$: $x \sim -x$, і ан-но S^1. Якщо $f : S^3 \setminus S^1 \to S^1$ – деф. ретракція така, що $f(-x) = -f(x)$

$\forall x$, то вона факторизується у деф. ретракцію

$\tilde{f} : \mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1 \; : \; \{x, -x\} \mapsto \{f(x), -f(x)\}$

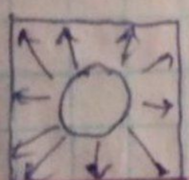
(гомотопія теж факторизується). Тоді $\mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{RP}^1 \sim \mathbb{RP}^1 \cong S^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{RP}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

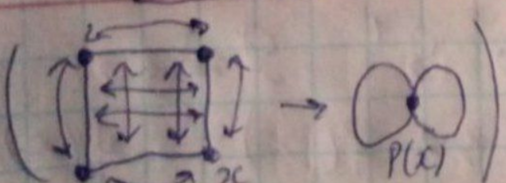
39.21(8) $X = T^2 \setminus \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^2$ – ручка.

$X \cong Y/\sim$, де Y – квадрат з діркою, а $\sim$ – як для T^2:

Деф. ретракція $f : Y \to Z$, де Z – межа квадрата:



факторизується у деф. ретракцію $\tilde{f} : X \to Z/\sim \cong S^1 \vee S^1$



, тому $\pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \langle a, b \rangle$.

<u>31.1.</u> Якщо X – T_1, $f, g, h \in C(I, X)$ – шляхи, то
$(f * g) * h = f * (g * h) \Leftrightarrow f = g = h = e_x$.

<u>$\Leftarrow$.</u> Оч.

<u>$\Rightarrow$.</u> Отже,

$$\begin{cases} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4t-2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4t-3), & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

$\forall\, t \in [0, \frac{1}{4}]$ $f(4t) = f(2t)$, тобто $\forall\, t \in [0, 1]$ $f(t) = f(\frac{t}{2})$ $\ominus$
Продовжимо: $\ominus$ $f(\frac{t}{4}) = f(\frac{t}{8}) = \ldots$ Посл. $\frac{t}{2^{n-1}} \to 0$ і переходить під дією непер. f у постійну $f(\frac{t}{2^{n-1}})$, тоді її границею повинна бути $x := f(0)$. Але у T_1-пр. єдина границя $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ – це x, тому $f(t) = x$ $\forall t$. $\forall\, t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $g(4t-1) = f(2t) = x$, тобто $g(t) = x$ $\forall t$. Нарешті, $\forall\, t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ $h(2t-1) = g(4t-2) = x$ і $\forall t \in [\frac{3}{4}, 1]$ $h(2t-1) = h(4t-3)$, звідки отримуємо $h = x$ ан-но до <u>31.4.</u>

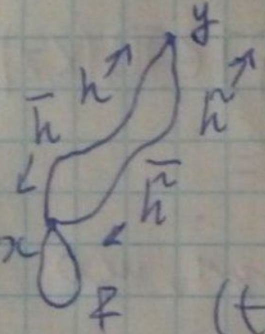
33.C. (Перша частина Впр. 4.2 лекцій).

Нехай $h, \tilde{h} \in C(I, X)$ - шляхи, $h(0) = \tilde{h}(0) = x$, $h(1) = \tilde{h}(1) = y$.

З ними пов'язані ізоморфізми фунд. груп:

$\alpha : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) : [f] \mapsto [\bar{h} * f * h]$ і

$\tilde{\alpha} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y) : [f] \mapsto [\bar{\tilde{h}} * f * \tilde{h}]$



Показати, що $h \sim \tilde{h} \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha}$.

$h \sim \tilde{h} \Rightarrow \bar{h} \sim \bar{\tilde{h}}$: якщо F - відп. гомотопія, то $(t, s) \mapsto F(1-t, s)$ - гом. $\bar{h}$ і $\bar{\tilde{h}}$. Тому $\bar{h} * f * h \sim \bar{\tilde{h}} * f * \tilde{h} \Rightarrow \alpha([f]) = \tilde{\alpha}([f]) \ \forall [f] \in \pi_1(X, x)$.

33.I. Якщо h - петля в x, то відп. $\alpha : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ має вигляд $\alpha([f]) = [h]^{-1}[f][h]$, тобто є спряженням (внутрішнім автоморфізмом) у $\pi_1(X, x)$.

З def.: $\alpha([f]) = [\bar{h} * f * h] = [\bar{h}][f][h] = [h]^{-1}[f][h]$.

33.J. (Друга частина Впр. 4.2.). α не залежить від $[h]$ $\Leftrightarrow$ $\pi_1(X, x)$ абелева.

(Тут $\pi_1(X,x)$ аб. $\Leftrightarrow$ $\pi_1(X,y)$ аб., бо α – ізоморфізм. Тому
{Якщо X лін. зв. і $\pi_1(X,x)$ аб., то й $\forall\, y \in X$ $\pi_1(X,y)$ аб.).

$\Leftarrow$. Нехай $\pi_1(X,x)$ аб. Треба показати, що $\forall\, h, \tilde{h}$, що сполучають x і y відп. ізоморфізми $\alpha = \tilde{\alpha}$. $\forall\, [f] \in \pi_1(X,x)$

$$\tilde{\alpha}^{-1}(\alpha([f])) = \left[\begin{matrix}\text{див. опис} \\ \tilde{\alpha}^{-1} \text{ в лекціях}\end{matrix}\right] = [\tilde{h} * (\bar{h} * f * h) * \bar{\tilde{h}}] =$$

$$= [\overline{(h * \bar{\tilde{h}})} * f * (h * \bar{\tilde{h}})] = \beta([f]),$$ де β – ізоморфізм, що відп. петлі $h * \bar{\tilde{h}}$ в x. Тут використали

$$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f} \quad \text{і} \quad \bar{\bar{f}} = f.$$

$$\left(\overline{f*g}(t) = f*g(1-t) = \begin{cases} f(2-2t), & 1-t \in [0,\frac{1}{2}] \\ g(1-2t), & 1-t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} = \begin{cases} \bar{g}(2t), & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \bar{f}(2t-1), & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} = \bar{g} * \bar{f}(t)\right)$$

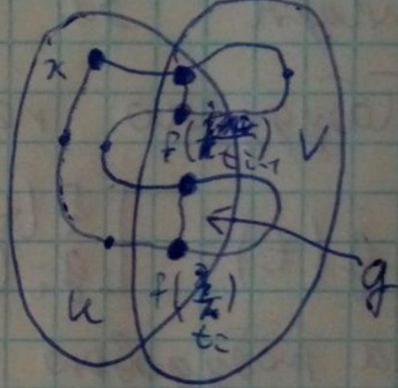
Тобто $\tilde{\alpha}^{-1}(\alpha([f])) = \beta([f]) = \left[\begin{matrix}33.\text{I або} \\ \text{безпосередньо}\end{matrix}\right] = [h * \bar{\tilde{h}}]^{-1}[f]\,[h * \bar{\tilde{h}}] = [f]$,
бо $\pi_1(X,x)$ аб. Т.ч., $\tilde{\alpha}^{-1} \circ \alpha = id_{\pi_1(X,x)} \Rightarrow \alpha = \tilde{\alpha}$.

$\Rightarrow$. Абелевість $\pi_1(X,x)$ $\Leftrightarrow$ внутрішній автоморфізм тривіальний, тобто $[f] = [h]^{-1}[f][h] = \alpha([f])\ \forall [f]$.

Але за умовою із-м α, що відповідає h [петлі в x), дорівнює $id_{\pi_1(x,x)}$, що відп. e_x. Це й дає потрібне.

37.11. X – лін. зв. ТП, $X = U \cup V$, U і V відкриті, однозв'язні, $\emptyset \neq U \cap V$ лін. зв. Тоді X однозв'язний.

В силу лін. зв., дост. показати, що $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для деякої $x \in X$. Нехай для визначеності $x \in U$.



$\forall$ петлі f у x : $f \in C(I, X) \Rightarrow \{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ – відкр. покр. комп. I. Застосуємо лему Лебега : $\exists$ число Лебега $\delta > 0$ і $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \delta$. Тоді $\forall\ i = \overline{1,n}$ $f([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset U$ або $\subset V$.

За необхідності об'єднавши ці відрізки, отримаємо розбиття $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ таке, що $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ для непарних i, $\subset V$ – для парних. За побудовою m непарне. Зокрема, $f(t_1), \ldots, f(t_{m-1}) \in U \cap V$.

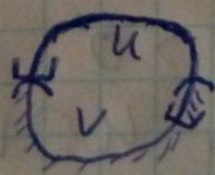
Для кожного парного $i > 0$ з'єднаємо $f(t_{i-1})$ і $f(t_i)$ шляхом g_i у лін. зв. $U \cap V$: $g_i \in C([t_{i-1}, t_i], U \cap V)$,

$g_i(t_{i-1}) = f(t_{i-1})$, $g_i(t_i) = f(t_i)$. Тоді g_i і $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ – шляхи в однозв'язному V зі спільними початком і кінцем. За критерієм однозв'язності, $g_i \sim f|_{[t_{i-1},t_i]}$.
Побудуємо петлю g, замінивши усі $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ на g_i:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [t_{i-1}, t_i],\ i \text{ непарне}. \\ g_i(t), & t \in [t_{i-1}, t_i],\ i > 0 \text{ парне}. \end{cases}$$

За побудовою $g \in C(I, X)$, $g(0) = g(1) = x$ – петля в x, $g \sim f$ і $g(I) \subset U$. Оскільки U однозв., $g \sim e_x$:
$f \sim g \sim e_x$.
Лін. зв'язність X в умові зайва: вона випливає з лін. зв. U, V і того, що $U \cap V \neq \emptyset$.

32.12. Умова відкритості U і V у 32.11 суттєва.
Дійсно, розіб'ємо $X = S^1$:



U, V – однозв., $U \cap V \neq \emptyset$ і лін.зв., але X неоднозв. U – не відкр.

32. Кх

def. Множина G зветься топологічною групою, якщо
- G - група
- G - топологічний простір
- Відображення добутку $\mu: G\times G \to G : (a,b) \mapsto ab$ і взяття оберненого $\iota: G\to G: a\mapsto a^{-1}$ неперервні (тут на $G\times G$ - топ. пр. добутку)

Ex. $\mathbb{R}$ з $+$; $S^1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ з множенням: μ - це обмеження на $S^1\times S^1 \to S^1$ множення комплексних чисел $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$: $(x+iy, x'+iy') \mapsto xx'-yy'+i(xy'+x'y)$ - непер., бо поліноміальне, отже й обмеження μ непер. Ан-но, ι - обмеження на $S^1\to S^1$ спряження $x+iy\mapsto x-iy$, тому непер.

Тор $T^n = \underbrace{S^1\times\ldots\times S^1}_{n}$ з груп. структурою прямого добутку груп і топологією прямого добутку: $T^n=\{(z_1,\ldots,z_n) \mid |z_i| = 1 \ \forall i\}$, $(z_1,\ldots,z_n)(w_1,\ldots,w_n) = (z_1w_1,\ldots,z_nw_n)$. Непер. μ і ι - ан-но S^1, або можна довести заг. факт: добуток топ. груп $G_1\times\ldots\times G_n$ - топ. група.

Нехай 1 – одиниця G. Введемо операцію $\odot$ на $\Omega(G,1) := \{ f \in C(I,G) \mid f(0)=f(1)=1 \}$ – петлі в 1: $f \odot g(t) := f(t)g(t)$, $t \in I$. $f \odot g$ – непер. як композиція непер.: $f \odot g = \mu \circ (f,g)$: $t \overset{(f,g)}{\mapsto} (f(t),g(t)) \overset{\mu}{\mapsto} f(t)g(t)$, $f \odot g(0) = f(0)g(0) = 1 \cdot 1 = 1$, і ан-но $f \odot g(1) = f(1)g(1) = 1$. Тому $f \odot g \in \Omega(G,1)$. Перевіримо, що це група:

- $(f \odot g) \odot h\ (t) = (f(t)g(t))h(t) = f(t)(g(t)h(t)) = f \odot (g \odot h)(t)\ \forall t$;
- $(f \odot e_1)(t) = f(t) \cdot 1 = f(t)\ \forall t$, тобто $f \odot e_1 = f$ і ан-но $e_1 \odot f = f\ \forall f$.

Отже, e_1 – одиниця групи; далі позначимо $f^{-1} := \iota \circ f : t \mapsto f(t)^{-1}$ – непер. як комп. непер., $f^{-1}(0) = 1^{-1} = 1$, $f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow f^{-1} \in \Omega(G,1)$.

- $\forall f\ f \odot f^{-1}(t) = f(t)f(t)^{-1} = 1 = e_1(t)\ \forall t$, $\overbrace{\text{тобто } f \odot f^{-1} = e_1}$, ан-но $f^{-1} \odot f = e_1$.

<u>32. Lx</u> Покажемо, що $\odot : \Omega(G,1) \times \Omega(G,1) \to \Omega(G,1)$ факторизується у групову операцію $\pi_1(G,1)$.

Якщо $f_0 \sim f_1$, $g_0 \sim g_1$, F і G – відп. гомотопії шляхів, то $H(t,s) := F(t,s)G(t,s)$ задає $I \times I \to G$, причому

$H = \mu \circ (F, G)$ – непер., $H(t,0) = f_0(t) g_0(t) = f_0 \odot g_0(t)$,
$H(t,1) = f_1(t) g_1(t) = f_1 \odot g_1(t)$ $\forall t$, $H(0,s) = H(1,s) = 1 \cdot 1 = 1$ $\forall s$.
Тому H – гомотопія $f_0 \odot g_0$ і $f_1 \odot g_1$. Т.ч., $\odot$ дійсно факторизується у $\odot : \pi_1(G,1) \times \pi_1(G,1) \to \pi_1(G,1) : [f] \odot [g] := [f \odot g]$.
Покажемо, що це групова операція $\pi_1(G,1)$, тобто що $[f \odot g] = [f] \odot [g] = [f][g] = [f * g]$ $\forall$ $[f], [g] \in \pi_1(G,1)$
Дійсно, $\forall f, g$ $f \sim f * e_1$, $g \sim e_1 * g \Rightarrow f \odot g \sim (f * e_1) \odot (e_1 * g)$ (за доведеним). Але $\forall t$

$$(f * e_1) \odot (e_1 * g)(t) = \begin{cases} f(2t) \cdot e_1(2t) = f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ e_1(2t-1) \cdot g(2t-1) = g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f * g)(t).$$

Отже, дійсно $f \odot g \sim f * g$ (при цьому вони, взагалі кажучи не рівні) $\Rightarrow [f \odot g] = [f * g]$.

<u>32. Мх</u> Показати, що $\pi_1(G,1)$ абелева (тобто комутативна)
Дійсно, аналогічно попередньому доведенню, $\forall$ $[f], [g] \in \pi_1(G,1)$
$f * g = (f * e_1) \odot (e_1 * g) \sim f \odot g \sim (e_1 * f) \odot (g * e_1) = g * f$,
тобто $[f][g] = [f * g] = [g * f] = [g][f]$.

Тоді й $\forall\ a \in G^0$ – ~~...~~ комп. лін. зв'язності 1 у G – $\pi_1(G, a) \simeq \pi_1(G, 1)$ – абелева.

$\forall a \in G$ розглянемо лівий зсув $L_a : G \to G$: $L_a b := ab$, $b \in G$

$L_a : b \mapsto (a, b) \overset{\mu}{\mapsto} ab$ – непер. як комп. непер.. При цьому $\forall a, b, c$ $\quad L_a(L_b c) = a(bc) = (ab)c = L_{ab} c$, тобто $L_a \circ L_b = L_{ab}$, і $L_1 = id_G$ ($b \mapsto 1 \cdot b = b\ \forall b$). Тому $L_{a^{-1}} \circ L_a = L_a \circ L_{a^{-1}} = L_1 = id_G$, отже $\forall a$ L_a – біє, і $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ – непер. Т.ч., $L_a : G \to G$ – гомеоморфізм. Тоді $\forall\ a \in G$ $L_a(G^0)$ – компонента лін. зв. $L_a 1 = a$, що гомеоморфна $G^0 \Rightarrow \pi_1(G, a) \simeq \pi_1(G, 1)$ – абелева.

<u>33.3x</u> Нехай $Mat(n, \mathbb{R})$ – простір матриць $n \times n$ з компонентами $\in \mathbb{R}$.

<u>1.</u> $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ має абелеві фундаментальні групи.

Топологія $GL(n, \mathbb{R})$ – індукована стандартною (евклідового) $Mat(n,\mathbb{R})$ (що ототожнюється з $\mathbb{R}^{n^2}$).

Достатньо показати, що це топологічна група. Це дійсно група відносно множення м-ць (бо $\det A \neq 0, \det B \neq 0 \Rightarrow \det AB = \det A \det B \neq 0$). Відобр. $\mu: GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ індуковане відобр. $Mat(n,\mathbb{R}) \times Mat(n,\mathbb{R}) \to Mat(n,\mathbb{R})$:

$$\left((A_{ij})_{i,j=1}^n, (B_{ij})_{i,j=1}^n\right) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\right)_{i,j=1}^n,$$

що неперервне (поліноміальне) $\Rightarrow$ μ непер. Ан-но, $\iota: GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ індуковане раціональним $\Rightarrow$ непер. Т.ч., $GL(n,\mathbb{R})$ — дійсно топ. група, і $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$ $\pi_1(GL(n,\mathbb{R}), A)$ абелева.

2. $O(n) := \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$ має абелеві фунд. гр.

$O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$ (бо $A \in O(n) \Rightarrow \det A = \pm 1$) — підгрупа ($A, B \in O(n) \Rightarrow AB(AB)^T = ABB^TA^T = AEA^T = AA^T = E$) з індукованою топ., і μ, ι — обмеження відп. відображень $GL(n,\mathbb{R})$ — непер. $\Rightarrow O(n)$ — топ. гр. $\Rightarrow \pi_1(O(n), A)$ аб. $\forall A$. При цьому $O(n)^0 = SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ — ~~зв'язна~~ топ. гр., і $SO(1)$ — точка, $SO(2) \cong S^1$, $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3 \Rightarrow \pi_1(O(n)) = \{[e_1]\}$ при $n=1$, $\simeq \mathbb{Z}$ при $n=2$, $\simeq \mathbb{Z}_2$ при $n=3$ (відомо також $\forall n \geq 3$).