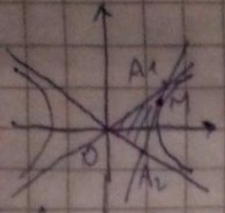
842. 

Довести, що для усіх дотичних до гіперболи якщо A_1, A_2 – її точки перетину з асимптотами, то усі OA_1A_2 мають одну й ту саму площу (O – центр гіперболи)

Знову можемо вважати канонічною: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. У 841. знайшли A_1, A_2 для дотичної у $M(x_0, y_0)$: $A_1\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)$, $A_2\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}, \frac{ab^2}{-bx_0-ay_0}\right)$.

Тоді $OA_1=\frac{ab}{|bx_0-ay_0|}\sqrt{a^2+b^2}$, $OA_2=\frac{ab}{|bx_0+ay_0|}\sqrt{a^2+b^2}$, тому

$$S_{\Delta OA_1A_2}=\frac{1}{2}OA_1OA_2\sin\angle A_1OA_2=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}\cdot\frac{\cancel{2}\,tg\frac{\angle A_1OA_2}{2}}{1+tg^2\frac{\angle A_1OA_2}{2}}=$$

$$=\left[\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1\right]=(a^2+b^2)\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=ab.$$

843. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ дотикається до $x-y-2=0$ у $M(4,2)$.

Підставляємо $x_0=4, y_0=2$ у $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=\pm1$ і порівнюємо з $x-y-2=0$.

848(4) Знайти умову дотику прямої $Ax+By+C=0$ до гіперболи $xy=k$.

За 839, рівняння дотичної у (x_0,y_0): $y_0x+x_0y-2k=0$,
порівн. з $Ax+By+C=0$.

Тобто $\frac{y_0}{A}=\frac{x_0}{B}=-\frac{2k}{C} \Rightarrow y_0=-\frac{2kA}{C}$, $x_0=-\frac{2kB}{C} \Rightarrow \cancel{k}=x_0y_0=\frac{4k^{\cancel{2}}AB}{C^2}$

Т.ч., умова: $4kAB=C^2$.

852. Знайти спільні дотичні $y^2=4x$ і $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

За 848 (1,3) для сп. дотичної $Ax+By+C=0$ $\begin{cases}2B^2=2AC & (p=2)\\ 8A^2+2B^2=C^2 & \left(\begin{smallmatrix}a^2=8\\ b^2=2\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$

$$8A^2+2AC-C^2=0$$

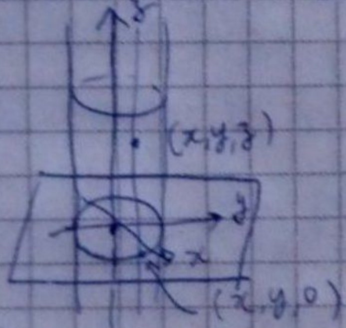
$$8\left(\frac{A}{C}\right)^2+2\frac{A}{C}-1=0$$

$\frac{A}{C}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{8}=\frac{-1\pm3}{8}$ Оскільки $AC=B^2\geq0$, $\frac{A}{C}\geq0$.

$\frac{A}{C}=\frac{1}{4}$. Наприклад, $A=1, C=4 \Rightarrow B^2=AC=4 \Rightarrow B=\pm2$.

Отже, це прямі $x\pm2y+4=0$.

345. Знайти рівн. кругового циліндра радіуса r, віссю якого є Oz.



Це циліндрична поверхня над колом радіуса r в Oxy (тобто напрямною лінією якої є коло):
$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z=0 \end{cases}$ (з центром в $(0,0,0)$) і твірними (прямими) $\parallel Oz$.

Тобто $\forall$ $(x,y,z) \in$ циліндру відп. твірна: $\begin{cases} X=x \\ Y=y \\ Z=t \end{cases}$,

перетин з Oxy: $(x,y,0)$ повинен належати колу:
$x^2+y^2=r^2$. Це й є рівн. циліндра. У взагалі, цил. поверхня над $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ з твірними $\parallel Oz$ має рівн. $F(x,y)=0$.

Якщо б твірні були похилі, скажімо, з напр. вектором (λ,μ,ν): $\begin{cases} X=x+\lambda t \\ Y=y+\mu t \\ Z=z+\nu t \end{cases}$

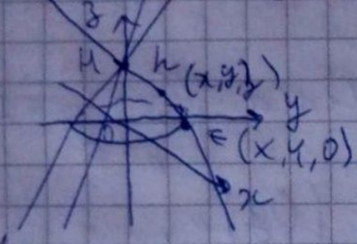
Тоді перетин з Oxy: $Z=0 \Rightarrow t = -\frac{z}{\nu} \Rightarrow X = x-\frac{\lambda z}{\nu}$, $Y = y-\frac{\mu z}{\nu}$. Тоді рівн. $\left(x-\frac{\lambda z}{\nu}\right)^2+\left(y-\frac{\mu z}{\nu}\right)^2=r^2$.

Або: це ГМТ таких, що відстань до Oz дор. r: $\sqrt{x^2+y^2}=r$,

$x^2+y^2=r^2$.

Або: поверхня обертання прямої $\begin{cases}x=r\\ y=0\end{cases}$ в Oxz навколо Oz (ан-но 348 нижче).

346. Знайти рівняння круглого конуса з основою (напрямною лінією) $\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ z=0\end{cases}$ і вершиною у $H(0,0,h)$.



Конус – це об'єднання твірних (прямих), що прох. через H і точки напрямної. Тобто $\forall\ (x,y,z) \in$ конусу твірна:

$$(t=)\ \frac{X-0}{x-0}=\frac{Y-0}{y-0}=\frac{Z-h}{z-h} \quad \text{або:} \quad \begin{cases}X=tx\\ Y=ty\\ Z=h+t(z-h)\end{cases}$$

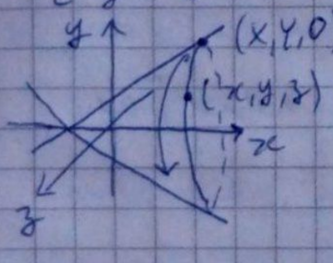
Перетин з Oxy: $Z=0$: $h+t(z-h)=0 \Rightarrow t=\frac{h}{h-z}$.

Тобто це точка $\left(\frac{hx}{h-z}, \frac{hy}{h-z}, 0\right)$. Належить до кола:

$$\left(\frac{hx}{h-z}\right)^2+\left(\frac{hy}{h-z}\right)^2=r^2$$

$$h^2x^2+h^2y^2-r^2(z-h)^2=0$$

348. Знайти рівняння поверхні обертання прямої $\begin{cases}y=kx+b\\ z=0\end{cases}$ навколо Ox.



Пов. обертання – об'єднання твірних кіл, що перетинають напрямну (тобто пряму $\begin{cases}y=kx+b\\ z=0\end{cases}$), мають центр на осі ($Ox$) і лежать у площині, що $\perp$ осі (тобто $\parallel Oyz$: $x=const$).

Нехай $(x,y,z) \in$ поверхні. Тоді твірне коло, що через неї проходить: $\begin{cases}X=x\\ Y^2+Z^2=y^2+z^2\end{cases}$ (квадрат відстані до Ox).

Перетин з Oxy (де лежить напрямна пряма):

$z=0 \Rightarrow Y^2 = y^2+z^2$. Тобто це $(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}, 0)$

Належить до прямої $\pm\sqrt{y^2+z^2} = kx+b$

$$y^2+z^2=(kx+b)^2.$$

При $k=0$ це циліндр $y^2+z^2=b^2$ або пряма $y^2+z^2=0$ (Ox)
(тобто $y=z=0$).

При $k\neq 0$ $(kx+b)^2-y^2-z^2=0$ – конус.

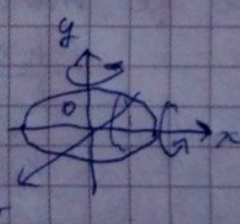
350. Знайти рівн. поверхні обертання еліпса $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$

$(a>b)$ навколо великої (тобто Ox) і малої осей (Oy).

— Ан-но 348, загальне правило: знаходимо у рівнянні змінну, що відп. за відстань до осі (наприклад, x для Oy) і замінюємо на $\pm$відстань до осі у
(точніше, відстань це $|x|$)
3-вим. просторі ($\pm\sqrt{x^2+z^2}$ для Oy)
—

Отже, навколо Ox: замінимо y^2 на y^2+z^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$



Навколо Oy: замінимо x^2 на x^2+z^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

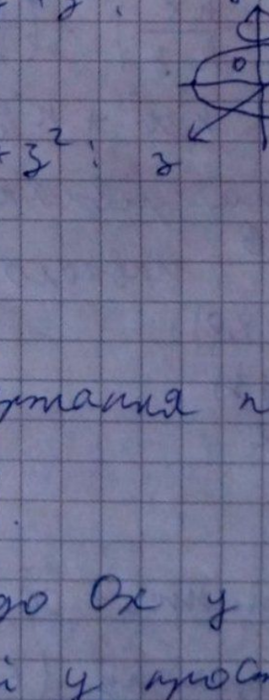
(еліпсоїди обертання).

352. Знайти рівн. поверхні обертання параболи $\begin{cases}y^2=2px\\ z=0\end{cases}$ навколо осі (тобто Ox)

Знову ж, y^2 – квадрат відстані до Ox у $z=0$, замінимо його на квадрат відстані у просторі:

$$y^2+z^2=2px$$

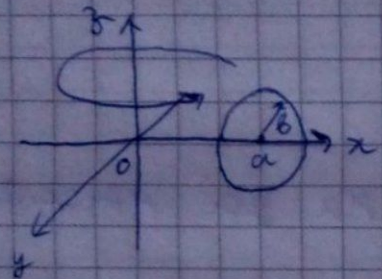
(параболоїд обертання)

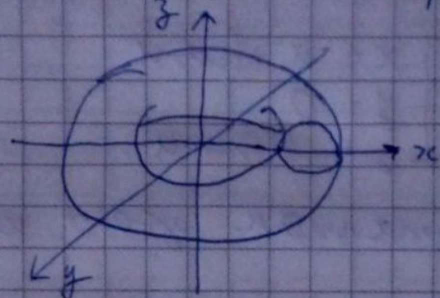


353. Знайти рівн. пов. обертання кола $\begin{cases}(x-a)^2+z^2=b^2\\ y=0\end{cases}$,

$a>b>0$, навколо Oz.

Тобто це коло з центром $(a,0,0)$ радіуса b у Oxz:





Круговий тор

Ще раз: твірною, що прох. через $(x,y,z) \in$ тору, є $\begin{cases} X^2+Y^2 = x^2+y^2 \\ Z = z \end{cases}$, її перетин з Oxz: $Y=0$, тобто $X = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, і це $(\pm\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)$, що треба підставити у рівняння кола $(x-a)^2+z^2=b^2$. Тобто заміняємо x, що відп. $\bullet$ за відстань до Oz, на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2.$$

{Оскільки коло лежить у $x>0$, можна залишити лише $+$:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$$

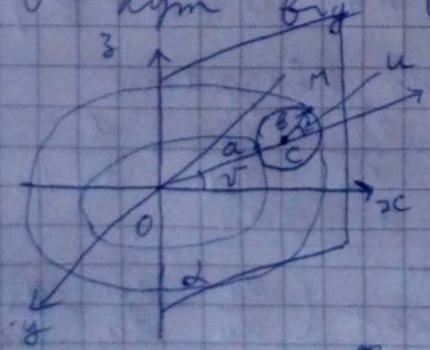
$$x^2+y^2+a^2+z^2-b^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$$

Це поверхня 4 порядку.

<u>359.</u> Записати параметричні рівняння кругового тора з попер. задачі у наступних параметрах:

$M(x,y,z)$ – точка тора T, α – пів площина: $Oz \subset \alpha$, $M \in \alpha$ (півплощина, що обмежена Oz). $\alpha \cap T$ = коло ω $(\ni M)$ з центром C. Тоді параметри u – кут від $\overline{OC}$ до $\overline{CM}$, v – кут від Ox до $\overline{OC}$.



При $v=0$ маємо напрямне коло $\begin{cases}(x-a)^2+z^2=b^2\\ y=0\end{cases}$

з параметризацією $\begin{cases}x=a+b\cos u\\ y=0\\ z=b\sin u.\end{cases}$

Тор отримуємо обертанням цього кола на усі можливі кути v навколо Oz:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+b\cos u\\ 0\\ b\sin u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+b\cos u)\cos v\\ (a+b\cos u)\sin v\\ b\sin u\end{pmatrix}$$

Або: $C(a\cos v, a\sin v, 0)$. Вектор $\overline{CM}=(b\cos u, 0, b\sin u)$ при $v=0$, а для інших v утворюється обертанням з цього на v навколо Oz:

$$\overline{CM}=\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\cos u\\ 0\\ b\sin u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\cos u\cos v\\ b\cos u\sin v\\ b\sin u\end{pmatrix},\quad і$$

$M=C+\overline{CM}$. В будь-якому разі параметризація:

$$\begin{cases}x=(a+b\cos u)\cos v\\ y=(a+b\cos u)\sin v\\ z=b\sin u\end{cases}\qquad u,v\in[0,2\pi).$$

942. За яких умов

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

є рівнянням сфери?

Сфера з центром (x_0,y_0,z_0) радіуса R має рівняння

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

що не містить xy, yz, xz. Тому $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. ~~Виділяємо повні квадрати~~ Коефіцієнти при x^2, y^2, z^2 рівні і $\neq 0$ (навіть якщо помножити на $0\neq\lambda\in\mathbb{R}$), тому $a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0$. Виділяємо повні квадрати:

$$a_{11}\left(\left(x+\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_2}{a_{11}}\right)^2+\left(z+\frac{a_3}{a_{11}}\right)^2-\frac{a_1^2}{a_{11}^2}-\frac{a_2^2}{a_{11}^2}-\frac{a_3^2}{a_{11}^2}+\frac{a}{a_{11}}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_2}{a_{11}}\right)^2+\left(z+\frac{a_3}{a_{11}}\right)^2=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-aa_{11}}{a_{11}^2}$$

Це сфера при $a_1^2+a_2^2+a_3^2>aa_{11}$ з центром $\left(-\frac{a_1}{a_{11}}, -\frac{a_2}{a_{11}}, -\frac{a_3}{a_{11}}\right)$ радіуса $\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-aa_{11}}}{|a_{11}|}$, точка $\left(-\frac{a_1}{a_{11}}, -\frac{a_2}{a_{11}}, -\frac{a_3}{a_{11}}\right)$ при $\ldots=0$, $\varnothing$ при $\ldots<0$.

945. Знайти центр і радіус кола

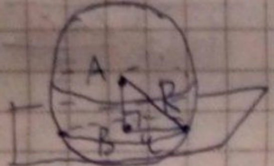
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0 \\ 2x+2y+z+1=0 \qquad (\alpha) \end{cases}$$

Це перетин сфери з площиною α. Знайдемо центр і радіус сфери:

$$(x^2-12x+36)-36+(y^2+4y+4)-4+(z^2-6z+9)-9+24=0$$

$$(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$$

Центр $A(6,-2,3)$, радіус $R=5$.



Центр B кола - це проекція A на площину.

Пряма AB прох. через A $\perp\alpha$: $\begin{cases} x=6+2t \\ y=-2+2t \\ z=3+t \end{cases}$

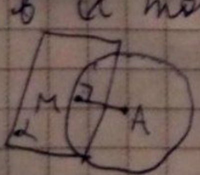
Перетином є B: $2(6+2t)+2(-2+2t)+(3+t)+1=0$

$$9t+12=0$$

$$t=-\frac{4}{3} \Rightarrow B\left(6-\frac{8}{3}, -2-\frac{8}{3}, 3-\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{10}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

З теореми Піфагора, радіус кола: $r=\sqrt{R^2-AB^2}=\sqrt{25-\left(6-\frac{10}{3}\right)^2-\left(-2+\frac{14}{3}\right)^2-\left(3-\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{16}{9}(4+4+1)}=3.$

947. Знайти рівняння дотичної площини сфери $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ в її точці $M(x_0,y_0,z_0)$.



Ця площина прох. через M $\perp \overline{AM}$, де $A(a,b,c)$ - центр сфери:

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)+(z_0-c)(z-z_0)=0.$$

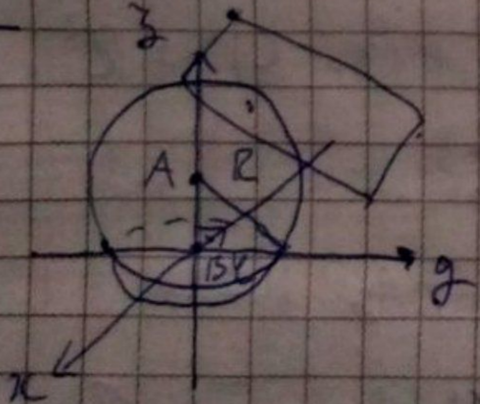
Або, якщо перетворити $x-x_0=(x-a)-(x_0-a)$, $y-y_0=(y-b)-(y_0-b)$, $z-z_0=(z-c)-(z_0-c)$ і використати $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=R^2$:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2.$$

952. Знайти рівняння сфери, що проходить через коло

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 11 \\ z = 0 \end{cases}$$

і дотикається до площини $x + y + z - 5 = 0$



Як у 945., центр шуканої сфери $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

проектується на $z=0$ у центр кола $B(0,0,0)$. Тому це $A(0,0,c)$; і за т. Піфагора $R^2 = AB^2 + r^2 = c^2 + 11$.

Сфера дотикається до площини $\Leftrightarrow$ відстань від її центра A до пл. дорівнює R:

$$\frac{|0+0+c-5|}{\sqrt{1+1+1}} = R = \sqrt{c^2+11}$$

$$\frac{(c-5)^2}{3} = c^2+11$$

$$c^2-10c+25 = 3c^2+33$$

$$2c^2+10c+8=0$$

$$c^2+5c+4=0$$

$$c = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$c=-1 \Rightarrow R=\sqrt{12}$, сфера $x^2+y^2+(z+1)^2=12$

$c=-4 \Rightarrow R=\sqrt{27}$, сфера $x^2+y^2+(z+4)^2=27$.