Література (продовження)

1. А.А. Борисенко. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий.

2. Ю.А. Аминов. Геометрия подмногообразий.

3. B.-Y. Chen. Geometry of submanifolds and its applications.

4. M. Dajczer. Submanifolds and isometric immersions.

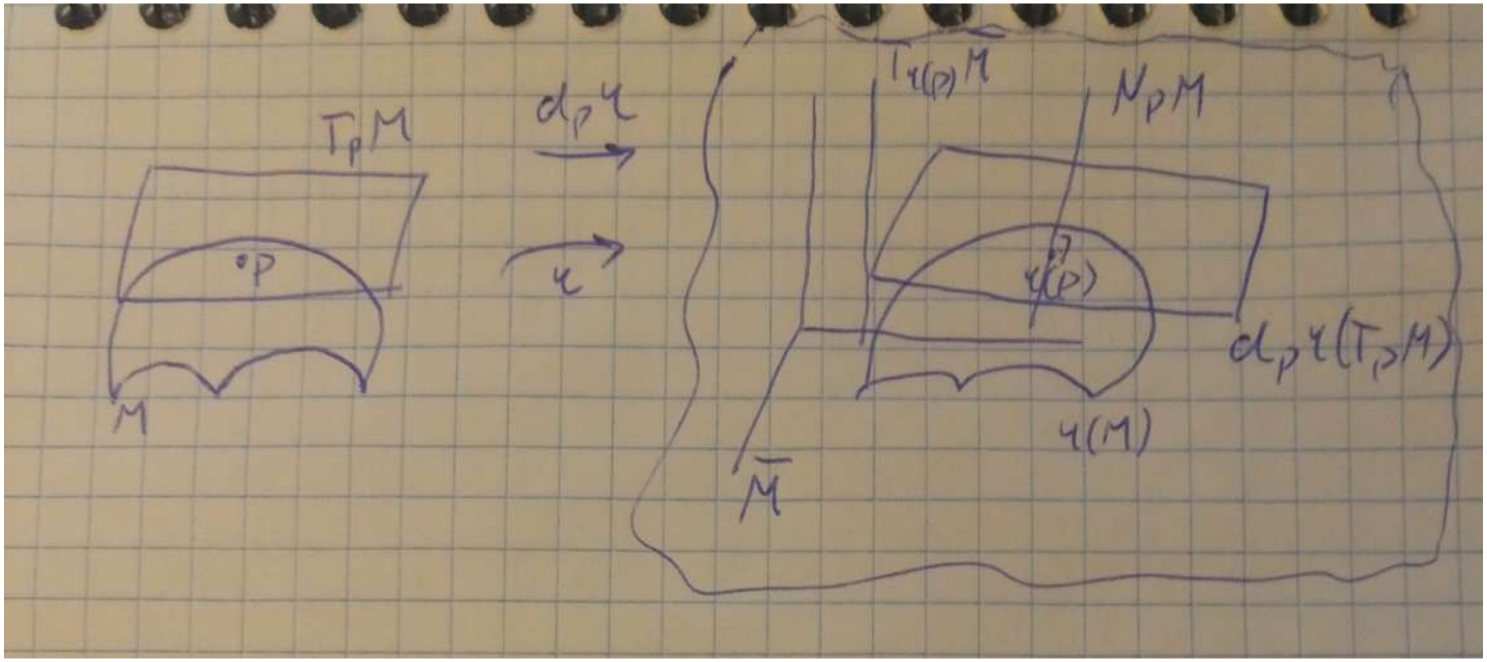
5. M. Dajczer, R. Tojeiro. Submanifold theory.

Підмноговиди ріманового многовида і перша фундаментальна форма

Тут і далі зазвичай будемо розглядати k-гладкий ріманoвий многовид $(\overline{M}, \overline{g})$, $k \geqslant 1$ (де $\overline{g}$ – $(k-1)$-гладка ріманова метрика), $\dim \overline{M} = n + q$. Нехай (M, r) – k-гладкий n-вимірний підмноговид у $\overline{M}$, тобто $r\colon M \to \overline{M}$ – k-гладке занурення. Тоді для кожної $p \in M$ $d_p r$ – лінійна ін'єкція, а отже $d_p r\colon T_pM \to d_p r(T_pM)$ – лінійний ізоморфізм.

<u>def.</u> Нормальним простором (до) (M, r) (або просто до M) у точці $p \in M$ називається ортогональне доповнення до $d_p r(T_pM)$ в $T_{r(p)}\overline{M}$ (відносно $\overline{g}_{r(p)}$):

$$N_pM := d_p r(T_pM)^{\perp}.$$



<u>Rem.</u> Тобто у кожній $p \in M$ маємо ортогональне розкладення

$$T_{r(p)}\overline{M} = d_p r(T_p M) \overset{\perp}{\underset{\overline{g}_{r(p)}}{\bigoplus}} N_p M.$$

Rem. У спрощених позначеннях (якщо ототожнити p з $r(p)$, а T_pM – з $d_pr(T_pM)$) воно має вигляд $T_p\overline{M} = T_pM \oplus N_pM$.

Rem. Для $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+q}$ можна ототожнити $T_{r(p)}\overline{M}$ з $\mathbb{R}^{n+q}$, тоді $N_pM \subset \mathbb{R}^{n+q}$.

Rem. $\dim N_pM = q$. Якщо $q = 1$, (M, r) (або просто M) називається гіперповерхнею у $\overline{M}$; q зветься ковимірністю підмноговида M у $\overline{M}$: $q = \dim \overline{M} - \dim M$.

Впр. Аналогічно до TM побудувати структури $(k-1)$-гладких многовидів на

$$T_M\overline{M} := \bigcup_{p \in M} T_{r(p)}\overline{M} \subset T\overline{M}$$

та

$$NM := \bigcup_{p\in M} N_pM \subset T_M\overline{M}.$$

<u>Rem.</u> Їхні вимірності дорівнюють $2n+q$ та $n+q$ відповідно.

<u>def.</u> NM зветься нормальним розшаруванням підмноговида (M,r) у $(\overline{M},\overline{g})$.

<u>def.</u> Векторним полем на M зі значеннями в $T\overline{M}$ будемо називати

$$\eta\colon M \to T_M\overline{M}\colon p \mapsto \eta_p \in T_{r(p)}\overline{M}$$

Ex. Для векторного поля X на M визначимо поле $dr(X)$ наступним чином:

$$dr(X)_p := d_pr(X_p) \in d_pr(T_pM) \subset T_{r(p)}\overline{M}$$

для кожної $p \in M$. Це буде поле на M зі значеннями в $T\overline{M}$, а точніше – зі значеннями у $dr(TM) \subset T_M\overline{M}$.

def. Нормальним векторним полем на M називається

$$\xi\colon M \to NM\colon p \mapsto \xi_p \in N_pM.$$

Впр. Сформулювати локальні критерії гладкості для таких полів аналогічно до векторних полів та форм.

Rem. Далі всі поля і форми вважаємо максимальної можливої гладкості $k-1$, якщо не вказано інше.

def. Нехай (M, r) – k-гладкий підмноговид у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$. Першою фундаментальною (квадратичною) формою (M, r) зветься 2-форма g на M, що визначається наступним чином:

$$g(X, Y) := \overline{g}(dr(X), dr(Y))$$

для будь-яких полів $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$.

Rem. В означенні записана рівність функцій на M. Вона означає, що для кожної точки $p \in M$

$$g(X, Y)(p) = \overline{g}_{r(p)}(d_p r(X_p), d_p r(Y_p)).$$

Звідси випливає, що для будь-яких $v, w \in T_p M$

$$g_p(v, w) = \overline{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(w)).$$

Rem. Локально: нехай $\{\overline{g}_{ab}\}_{a,b=1}^{n+q}$ – коефіцієнти $\overline{g}$ у локальних координатах $(x^1, \dots, x^{n+q})$ на $V \subset \overline{M}$, а $(u^1, \dots, u^n)$ – локальні координати на $U \subset M$. У точках $p \in U \cap r^{-1}(V)$ для $i, j = \overline{1, n}$ маємо:

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \overline{g}_{r(p)}\left(d_p r\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), d_p r\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right) =$$

$$= \overline{g}_{r(p)}\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(p)\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial x^b}{\partial u^j}(p)\frac{\partial}{\partial x^b}\right) = \overline{g}_{ab}(r(p))\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(p)\frac{\partial x^b}{\partial u^j}(p),$$

де $\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(p)$ – частинні похідні координатного задання r у відповідних локальних координатах. Тут за індексами a і b сума від 1 до $n+q$. Далі будемо позначати (як ми вже робили для підмноговидів у $\mathbb{R}^{n+q}$) для $i = \overline{1, n}$

$$r_i := dr\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Це поля, що задані на координатному околі, і значення яких утворюють базиси $d_p r(T_p M)$ у кожній його точці $p \in M$.

<u>Ex.</u> Для $(\overline{M}, \overline{g}) = E^{n+q}$, тобто $\mathbb{R}^{n+q}$ з евклідовою метрикою в декартових координатах:

$$\overline{g}_{ab} = \delta_{ab} = \left[\begin{array}{l} 1, a = b, \\ 0, a \neq b. \end{array} \right.$$

Тому

$$g_{ij} = \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j} = \sum_{a=1}^{n+q} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^a}{\partial u^j} = \langle r_i, r_j \rangle$$

для $i, j = \overline{1, n}$.

Pr. g – ріманова метрика на M.

▶ За лінійністю dr і білінійністю $\overline{g}$ у кожній точці, g – 2-форма, з вигляду локальних коефіцієнтів вище, вона $(k-1)$-гладка. Симетричність випливає з симетричності $\overline{g}$:

$$g(Y,X) = \overline{g}(dr(Y), dr(X)) = \overline{g}(dr(X), dr(Y)) = g(X,Y).$$

Додатна визначеність: у будь-якій $p \in M$

$$g_p(v,v) = \overline{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(v)) > 0$$

для будь-якого $0 \neq v \in T_pM$, оскільки d_pr – лінійна ін'єкція, отже $d_pr(v) \neq 0$, і $\overline{g}$ додатно визначена. ◀

Cor. На будь-якому k-гладкому многовиді M існує $(k-1)$-гладка ріманова метрика.

▶ З теореми про вкладення, існує k-гладке вкладення $r\colon M \to \mathbb{R}^N$ для деякого натурального N. Введемо на $\mathbb{R}^N$ евклідову метрику і розглянемо першу фундаментальну форму g на M. ◀

Rem. g ще називають метрикою, що індукована на M метрикою $\overline{g}$ (і зануренням r). Відображення ріманових многовидів $r\colon (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ в цьому випадку (тобто коли g – перша ф.ф.) називається ізометричним зануренням.

Впр. Занурення r є ізометричним тоді й тільки тоді, коли воно переводить кусково гладкі шляхи (M, g) у шляхи $(\overline{M}, \overline{g})$ тієї ж довжини: $l_g(\gamma) = l_{\overline{g}}(r \circ \gamma)$.

Аналогічно до теорем про вкладення існують (суттєво складніші) теореми про існування ізометричних вкладень:

<u>Th.1.</u> (Дж. Неш) Для будь-якого k-гладкого ріманового (M, g), де $k \geq 3$, існує k-гладке ізометричне вкладення $r\colon (M, g) \to E^N$ для деякого N.

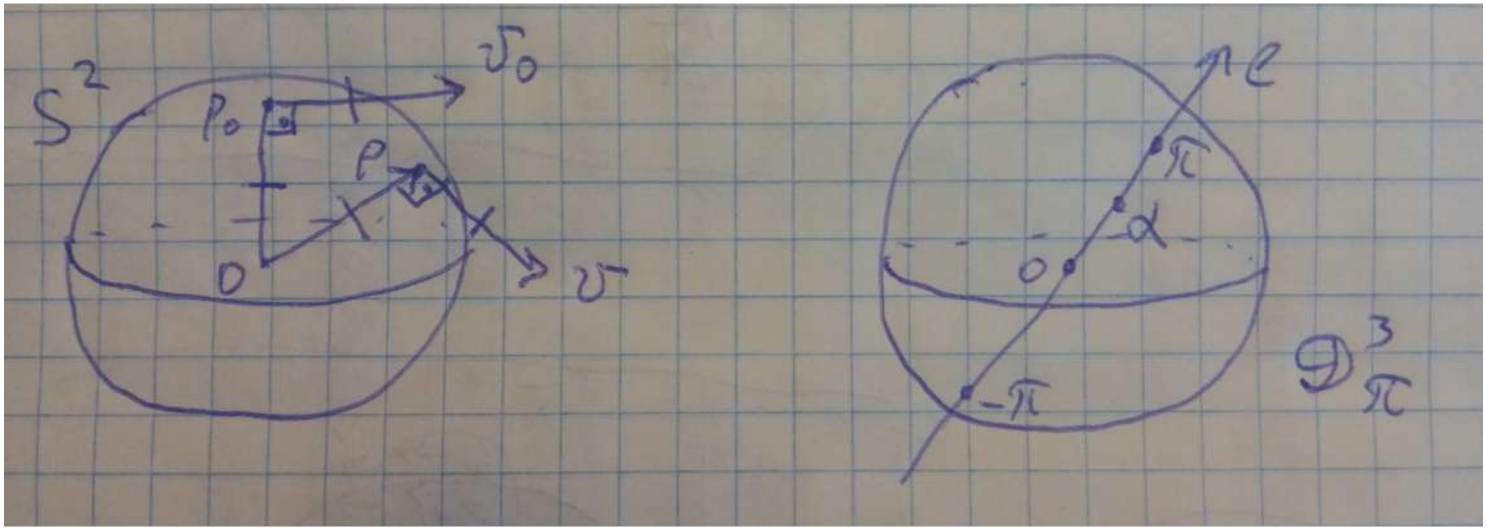
<u>2.</u> (Дж. Неш – К. Кейпер) Для будь-якого ∞-гладкого n-вимірного ріманового (M, g) і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує 1-гладке ізометричне вкладення $r\colon (M, g) \to B_\varepsilon(0) \subset E^{2n}$ (тобто у $2n$-вимірну відкриту евклідову кулю радіуса ε).

Розшарування одиничних векторів і теорема Уітні

def. Розшаруванням одиничних векторів ріманового многовида (M, g) називають

$$T_1M := \{(p, v) \in TM \mid g_p(v, v) = 1\}.$$

Ex. Для S^2 (зі стандартною метрикою, індукованою вкладенням $S^2 \to E^3$) T_1S^2 можна ототожнити з SO(3) – групою ортогональних 3×3-матриць з визначником 1. Дійсно, для кожного (p, v) існує рівно один рух, що зберігає орієнтацію тривимірного простору і переводить фіксовану пару векторів (p_0, v_0) у дану (p, v). Тоді елемент SO(3), що відповідає (p, v), – матриця цього руху.



У свою чергу, SO(3) можна ототожнити з тривимірним проєктивним простором $\mathbb{R}P^3$, наприклад, наступним чином. За теоремою Шаля, будь-яка матриця з SO(3) задає обертання навколо (орієнтованої) осі l на кут $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Відмітимо на l точку з координатою α. Отримаємо точки замкненої кулі D^3_π радіуса π з центром у початку координат, причому цей центр буде відповідати тотожному руху (одиничній матриці), а діаметрально протилежні точки на границі кулі відповідають одному й тому ж руху і таким чином склеюються. Отже отримуємо ототожнення SO(3) з факторпростором $D^3_\pi/\sim \,\cong \mathbb{R}P^3$, де $\sim$ – відношення еквівалентності, що ототожнює діаметрально протилежні точки на границі кулі.

Отже, $T_1S^2 \cong \mathbb{R}P^3$. Можна показати, що це дифеоморфізм для ∞-гладкої структури на T_1S^2, яку ми зараз опишемо.

<u>Rem.</u> Для будь-якої $p \in M$ підмножина $S_p := \{v \in T_pM \mid g_p(v,v) = 1\}$ дифеоморфна сфері $S^{n-1} \subset E^n$ (де $n = \dim M$). Наприклад, можна ввести локальні

координати $(x^1, \ldots, x^n)$, обчислити власні значення $(\lambda_1)_p, \ldots, (\lambda_n)_p$ матриці g_p і побудувати стиснення з коефіцієнтами $\frac{1}{(\lambda_1)_p}, \ldots, \frac{1}{(\lambda_n)_p}$ відносно головних осей (тобто власних напрямків, що відповідають цим значенням). Нехай $\psi_p \colon S_p \to S^{n-1}$ – цей дифеоморфізм.

Впр. Записати ψ_p у локальних координатах явно і переконатися, що воно гладко залежить від p.

Згадаємо стандартний атлас S^{n-1}: він має вигляд $\{(S_N^{n-1}, \chi_N), (S_S^{n-1}, \chi_S)\}$, де точки $N = (0, \ldots, 0, 1)$, $S = (0, \ldots, 0, -1)$ – полюси сфери, носії карт $S_{N(S)}^{n-1} := S^{n-1} \backslash \{N\}(\{S\})$, а $\chi_{N(S)} \colon S_{N(S)}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ – стереографічні проєкції.

Нехай $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ – атлас M; $\pi\colon T_1M \to M$ – як вище: $(p, v) \mapsto p$ (канонічна проєкція). Тоді

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{p \in U_\alpha} S_p.$$

Покладемо для кожного індекса α

$$V_{\alpha N} := \bigcup_{p \in U_\alpha} \psi_{\alpha p}^{-1}(S_N^{n-1}),$$

$$V_{\alpha S} := \bigcup_{p \in U_\alpha} \psi_{\alpha p}^{-1}(S_S^{n-1}),$$

де $\psi_{\alpha p}\colon S_p \to S^{n-1}$ – дифеоморфізм, що побудований, як описано вище, з використанням локальних координат карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Таким чином, $\pi^{-1}(U_\alpha) = V_{\alpha N} \cup V_{\alpha S}$.

Як і у випадку TM, побудуємо ''кандидатів'' у координатні відображення: для кожного α

$$\Omega_{\alpha N}\colon V_{\alpha N} \to \mathbb{R}^{2n-1}\colon (p, v) \mapsto (\varphi_\alpha(p), \chi_N(\psi_{\alpha p}(v))).$$

Зауважимо, що $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$, а $\chi_N(\psi_{\alpha p}(v)) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Аналогічно будуємо $\Omega_{\alpha S}\colon V_{\alpha S} \to \mathbb{R}^{2n-1}$.

<u>Впр.</u> Виписати відображення переходу (разом з їхніми областями визначення і значень) та аналогічно до TM переконатися в існуванні $(k-1)$-гладкої структури $(2n-1)$-вимірного многовида на T_1M.

<u>Rem.</u> Це приклад не векторного розшарування (з шаром S^{n-1}).

Нехай тепер (M, r) – підмноговид у $\mathbb{R}^N$ (занурений), g – перша ф.ф., що індукована евклідовою структурою на $\mathbb{R}^N$. Трошки модифікуємо відображення, яке ми побудували раніше:

$$F\colon T_1M \to S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N\colon (p, v) \mapsto d_pr(v).$$

Зауважимо, що оскільки це ізометричне занурення, довжина вектора v зберігається: $|d_pr(v)| = 1$. Як ми бачили вище, композиція проєкції на $\nu^\perp$ і r теж буде зануренням тоді й тільки тоді, коли $\nu \notin F(T_1M)$.

<u>Впр.</u> Перевірити гладкість F.

Таким чином, з <u>Th.</u> Сарда випливає, що при $2n-1 < N-1$ такий вектор ν існує, і за його допомогою можна побудувати занурення M у $\mathbb{R}^{N-1}$. Так можна робити (також забезпечуючи до передостаннього кроку вкладеність за іншою конструкцією; об'єднання образів F та відображення G з цієї конструкції – також міри 0 за Th. Сарда), поки не стане $2n - 1 = N - 1$, тобто $N = 2n$. Це завершує доведення (слабкого формулювання) Th. Уітні.

Розкладення Гаусса і Вейнгартена. Друга фундаментальна форма

Як і раніше, нехай $(\overline{M}, \overline{g})$ – $(n+q)$-вимірний ріманів многовид. У цьому розділі його гладкість $k \geqslant 2$. Нехай (M, r) – k-гладкий n-вимірний підмноговид у $\overline{M}$, g – його перша ф.ф.

Позначимо через $\overline{\nabla}$ ріманову зв'язність $\overline{g}$ (зв'язність Леві-Чівіта), що однозначно визначена метрикою. Згадаємо її означення. Це відображення

$$\overline{\nabla} \colon \mathcal{X}^{k-2}(\overline{M}) \times \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \to \mathcal{X}^{k-2}(\overline{M}) \colon X, Y \mapsto \overline{\nabla}_X Y$$

таке, що

- $\overline{\nabla}_{fX+hY}Z = f\overline{\nabla}_X Z + h\overline{\nabla}_Y Z,$
- $\overline{\nabla}_X(Y+Z) = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z,$
- $\overline{\nabla}_X(fY) = f\overline{\nabla}_X Y + X(f)Y,$
- $\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X,Y],$
- $X(\overline{g}(Y,Z)) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z)$

для будь-яких векторних полів X, Y, Z і функцій f, h на $\overline{M}$ відповідних гладкостей. При цьому $\overline{\nabla}_X Y$ називається коваріантною похідною поля Y за X.

<u>Rem.</u> Далі для простоти будемо брати X і Y однакової гладкості $k-1$. Згадаємо, що перші три умови тут означають, що $\overline{\nabla}$ – це афінна зв'язність, четверта – що це зв'язність без скрута, п'ята – що вона узгоджена з $\overline{g}$.

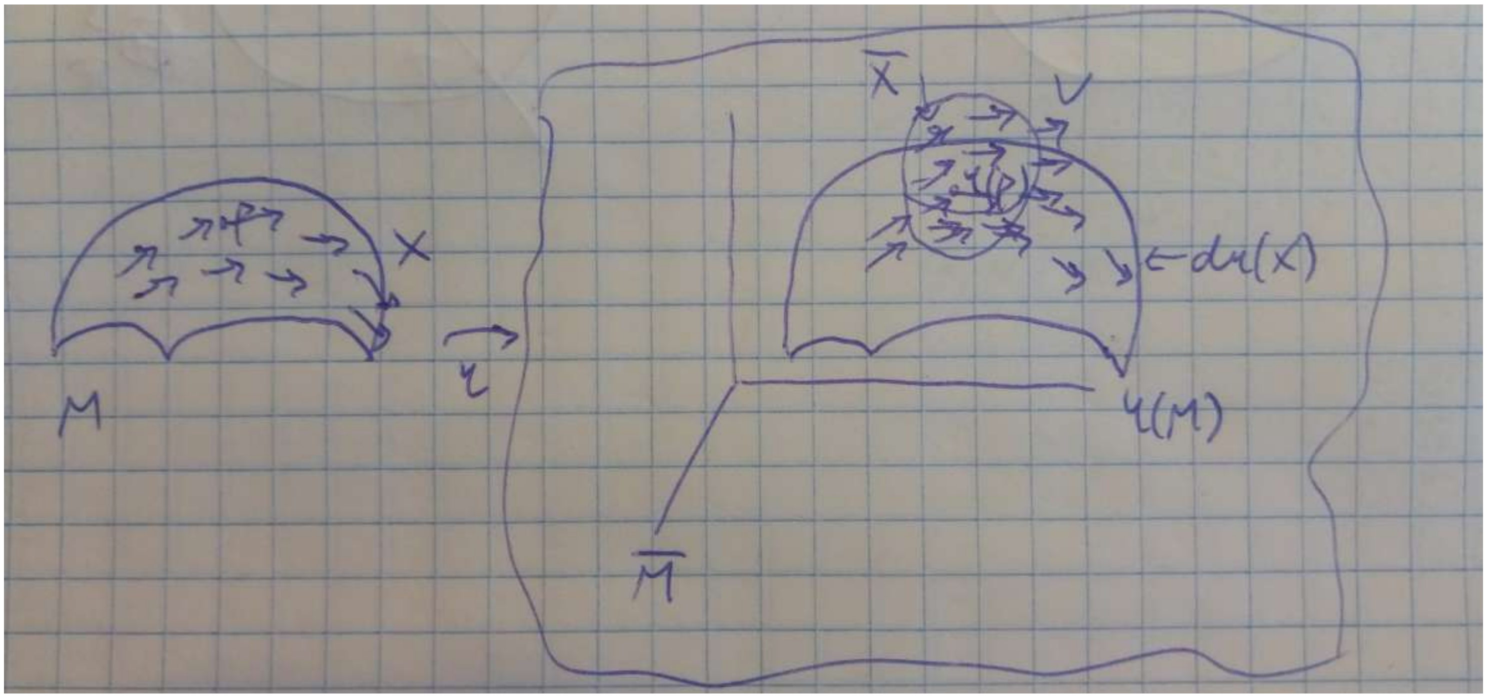
Виникає природне питання: як ''перенести'' цю структуру на підмноговид M за аналогією з першою ф.ф.?

Для полів $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ розглянемо як у попередньому розділі $dr(X), dr(Y) \in C^{k-1}(M, T_M\overline{M})$ – поля на M зі значеннями у $T\overline{M}$ (або $T_M\overline{M}$). Продовжимо їх полями $\overline{X}, \overline{Y}$ на деякому околі точки $r(p)$ для $p \in M$ і знайдемо $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$:

<u>Lem.1.</u> Для будь-якого поля $X \in \mathcal{X}^l(M)$ на M $(0 \leqslant l \leqslant k-1)$ і для будь-якої точки $p \in M$ існують відкрита $V \ni r(p)$ у $\overline{M}$ та поле $\overline{X} \in \mathcal{X}^l(V)$ таке, що для всіх $q \in r^{-1}(V)$

$$\overline{X}_{r(q)} = d_q r(X_q)$$

(у цьому випадку будемо говорити, що $\overline{X}$ продовжує $dr(X)$ на V).



2. Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$, $p \in M$, $V \ni r(p)$ – відкрита, $\overline{X}$ і $\overline{\overline{X}}$ продовжують $dr(X)$ на V, а $\overline{Y}$ і $\overline{\overline{Y}}$ продовжують

$dr(Y)$ на V в сенсі п.1. Тоді

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})_{r(p)} = (\overline{\nabla}_{\overline{\overline{X}}}\overline{\overline{Y}})_{r(p)}.$$

Тобто значення $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ у $r(p)$ не залежить від вибору продовжень, а лише від самих X та Y (і, звичайно, від структури $(\overline{M}, \overline{g})$ і занурення).

▶ В силу Th. про ранг відображення, можемо вважати, що в околах p та $r(p)$ обрані локальні системи координат $(u^1, \ldots, u^n)$ та $(x^1, \ldots, x^{n+q})$ відповідно такі, що r локально має вигляд $(u^1, \ldots, u^n) \mapsto (u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0)$.

1. В якості V виберемо носій другої з цих систем (або будь-який відкритий окіл $r(p)$ в ньому). Нехай

$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Тоді $dr(X) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (тут суми від 1 до n). Покладемо:

$$\overline{X}^a(x^1, \ldots, x^{n+q}) := \left[\begin{array}{c} X^a(x^1, \ldots, x^n), a = \overline{1, n}, \\ 0, a = \overline{n+1, n+q}. \end{array} \right.$$

Тоді в точках $r(M)$ (тобто з координатами вигляду $(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$) $\overline{X} := \overline{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ збігається з $dr(X)$ за побудовою.

<u>2.</u> Локальні координати обираємо як вище. Нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\overline{X} = \overline{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ і $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (на перетині V та відповідного координатного околу). Аналогічно, нехай $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\overline{Y} = \overline{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ і $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Y}}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Тут всюди i сумується від 1 до n, а a – від 1 до $n+q$ (і аналогічні умови будемо використовувати для інших індексів).

Умова продовження: $\overline{X} = \overline{\overline{X}} = dr(X)$ у точках $r(M)$. Локально це означає, що для будь-яких $(u^1, \ldots, u^n)$

$$\overline{X}^a(u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0) = \overline{\overline{X}}^a(u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} X^a(u^1, \ldots, u^n), a = \overline{1, n}, \\ 0, a = \overline{n+1, n+q}. \end{array} \right.$$

Аналогічно для Y, $\overline{Y}$ і $\overline{\overline{Y}}$. Згадаємо формулу для коваріантної похідної у локальних координатах:

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{X}^a \left(\frac{\partial \overline{Y}^c}{\partial x^a} + \overline{\Gamma}^c_{ab}\overline{Y}^b \right) \frac{\partial}{\partial x^c},$$

тут сума за a, b, c від 1 до $n+q$, $\left\{\overline{\Gamma}^c_{ab}\right\}_{a,b,c=1}^{n+q}$ – символи Крістоффеля, що визначаються умовами $\overline{\Gamma}^c_{ab}\frac{\partial}{\partial x^c} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^a}}\frac{\partial}{\partial x^b}$. c-та координата цього розкладення у довільній точці $r(M)$ має вигляд

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^c(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)=$$

$$=\overline{X}^a(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)\left(\frac{\partial\overline{Y}^c}{\partial x^a}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)+\right.$$

$$\left.+\overline{\Gamma}^c_{ab}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)\overline{Y}^b(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)\right)=$$

$$=X^i(u^1,\dots,u^n)\left(\frac{\partial\overline{Y}^c}{\partial x^i}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)+\right.$$

$$\left.+\overline{\Gamma}^c_{ij}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)Y^j(u^1,\dots,u^n)\right).$$

Тут ми використали умови продовження, заміни індексів означають відповідні заміни границь додавання. Зауважимо, що для $i=\overline{1,n}$ з умов продовження і означення частинної похідної випливає

$$\frac{\partial \overline{Y}^c}{\partial x^i}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{\overline{Y}^c(u^1,\dots,u^i+\delta,\dots,u^n,0,\dots,0)-\overline{Y}^c(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)}{\delta}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{Y^c(u^1,\dots,u^i+\delta,\dots,u^n)-Y^c(u^1,\dots,u^n)}{\delta}, c=\overline{1,n},\\ 0, c=\overline{n+1,n+q}.\end{array}\right. =$$

$$=\left[\begin{array}{c}\frac{\partial Y^c}{\partial u^i}(u^1,\dots,u^n), c=\overline{1,n},\\ 0, c=\overline{n+1,n+q}.\end{array}\right.$$

Отже,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})_{(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)}=X^i(u^1,\dots,u^n)\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}(u^1,\dots,u^n)\frac{\partial}{\partial x^j}+$$

$$X^i(u^1,\dots,u^n)Y^j(u^1,\dots,u^n)\overline{\Gamma}^c_{ij}(u^1,\dots,u^n,0,\dots,0)\frac{\partial}{\partial x^c}$$

не залежить від координат $\overline{X}$ і $\overline{Y}$, тобто для $\overline{\overline{X}}$ і $\overline{\overline{Y}}$ має такий же вигляд. ◀

<u>def.</u> Коваріантною похідною Y за X в $\overline{M}$ (відносно $\overline{\nabla}$) будемо називати поле

$$\overline{\nabla}_X Y\colon p\in M\mapsto(\overline{\nabla}_X Y)_p := (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})_{r(p)}\in T_{r(p)}\overline{M},$$

де $\overline{X},\overline{Y}$ – деякі продовження $dr(X), dr(Y)$ відповідно на окіл $r(p)$.

<u>Rem.</u> За побудовою це поле на M зі значеннями в $T\overline{M}$. З <u>Lem.</u> випливає коректність цього означення, а з її доведення – що це поле $(k-2)$-гладке для $(k-1)$-гладких X та Y.

Rem. Ми ніде не використовували зв'язок $\overline{\nabla}$ з метрикою (або відсутність скрута). Ця конструкція працює для будь-якої афінної зв'язності $\overline{\nabla}$.

Rem. Згадаємо, що у кожній $p \in M$ маємо ортогональне розкладення

$$T_{r(p)}\overline{M} = d_p r(T_p M) \overset{\perp}{\oplus} N_p M.$$

Будемо позначати через $(\cdot)^T$ та $(\cdot)^\perp$ ортогональні проєкції на відповідні (дотичний і нормальний) компоненти цього розкладення.

def. Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$. Позначимо для $p \in M$

$$(\nabla_X Y)_p := (d_p r)^{-1}(((\overline{\nabla}_X Y)_p)^T) \in T_p M,$$

$$B(X,Y)_p := ((\overline{\nabla}_X Y)_p)^\perp \in N_p M.$$

Тоді відображення $\nabla\colon X, Y \mapsto \nabla_X Y$ називається індукованою зв'язністю підмноговида (M, r), а $B\colon X, Y \mapsto B(X, Y)$ – другою фундаментальною (квадратичною) формою (M, r).

<u>Rem.</u> Тут використали ін'єктивність $d_p r$ у кожній p. За побудовою, $\nabla_X Y$ – поле на M, а $B(X, Y)$ – нормальне поле, $(k-2)$-гладкі для $(k-1)$-гладких X і Y.

<u>Впр.</u> Перевірити це, тобто переконатися, що ортогональні проєкції не знижують гладкість.

<u>Cor.</u> (Розкладення Гаусса) Для будь-якої $p \in M$

$$(\overline{\nabla}_X Y)_p = d_p r((\nabla_X Y)_p) + B(X, Y)_p$$

– ортогональне розкладення на елементи з $d_p r(T_p M)$ і $N_p M$ відповідно.

Rem. Або простіше, переходячи від запису у точці до рівності полів на M зі значеннями у $T\overline{M}$:

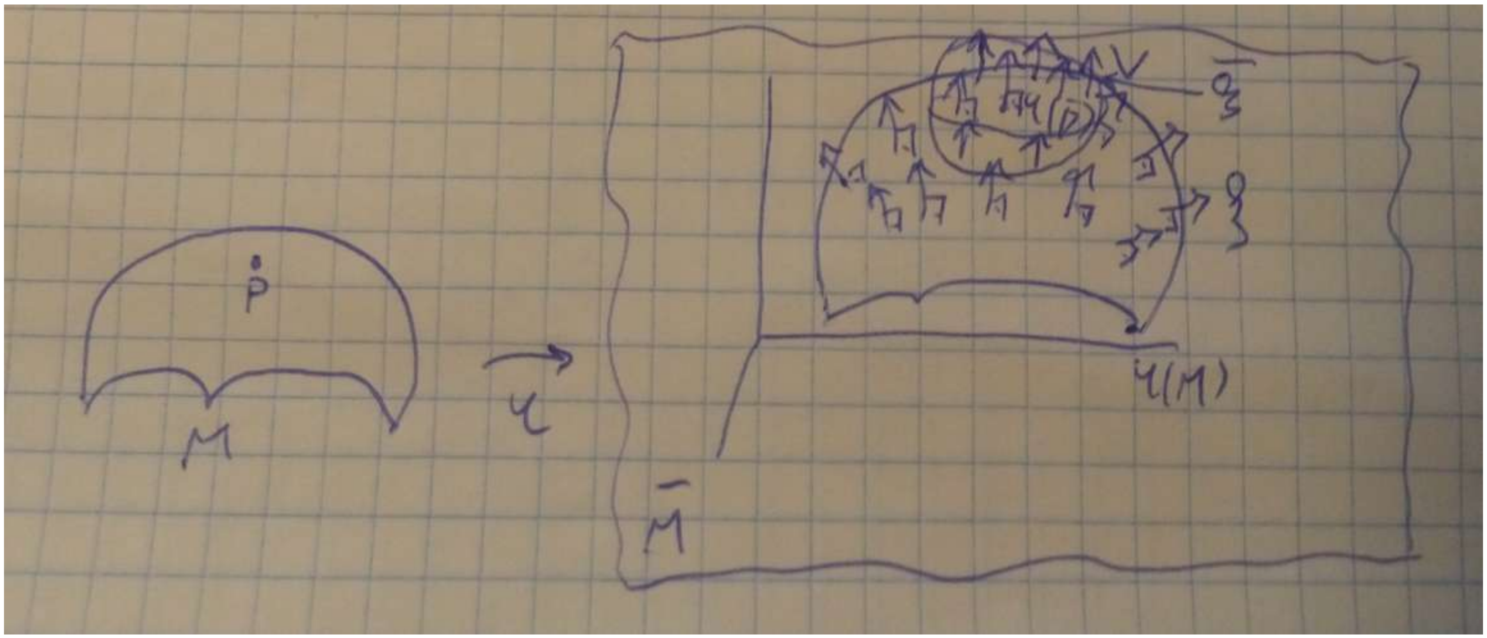
$$\overline{\nabla}_X Y = dr(\nabla_X Y) + B(X,Y).$$

У спрощеному запису (див. вище) це буде $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$.

Lem.1. Нехай ξ – l-гладке нормальне векторне поле на M ($0 \leqslant l \leqslant k-1$), $p \in M$. Існують відкрита $V \ni r(p)$ у $\overline{M}$ та поле $\overline{\xi}$, l-гладке на V і таке, що для будь-якої $q \in r^{-1}(V)$

$$\overline{\xi}_{r(q)} = \xi_q$$

(у цьому випадку будемо говорити, що $\bar{\xi}$ продовжує ξ на V).



<u>2.</u> Нехай X – поле на M, ξ – нормальне поле (($k-1$)-гладкі), $V \ni r(p)$ – відкрита, $\overline{X}$ і $\overline{\overline{X}}$ продовжують

$dr(X)$ на V у сенсі минулої леми, $\overline{\xi}$ і $\overline{\overline{\xi}}$ продовжують ξ на V у сенсі п.<u>1.</u>). Тоді

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\xi})_{r(p)} = (\overline{\nabla}_{\overline{\overline{X}}}\overline{\overline{\xi}})_{r(p)}.$$

Тобто $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\xi}$ у $r(p)$ не залежить від вибору продовжень, а лише від самих X та ξ, структури $(\overline{M}, \overline{g})$ і занурення.

▶ Аналогічно попередній <u>Lem.</u> (<u>Впр.</u>) ◀

<u>def.</u> Коваріантною похідною ξ за X в $\overline{M}$ (відносно $\overline{\nabla}$) будемо називати поле

$$\overline{\nabla}_X\xi \colon p \in M \mapsto (\overline{\nabla}_X\xi)_p := (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\xi})_{r(p)} \in T_{r(p)}\overline{M},$$

де $\overline{X}, \overline{\xi}$ – деякі продовження $dr(X), \xi$ відповідно на окіл $r(p)$.

Rem. Як і минулого разу, це поле на M зі значеннями в $T\overline{M}$, коректність означення випливає з Lem., $(k-2)$-гладкість $\overline{\nabla}_X \xi$ – з її доведення (Впр.), і важливо лише те, що $\overline{\nabla}$ – афінна зв'язність (взагалі, аналогічна Lem. вірна для будь-яких полів на M зі значеннями в $T\overline{M}$ – Впр.).

def. Нехай X – поле на M, ξ – нормальне поле на M, $(k-1)$-гладкі. Позначимо для $p \in M$

$$(A_\xi X)_p := -(d_p r)^{-1}(((\overline{\nabla}_X \xi)_p)^T) \in T_p M,$$

$$(\nabla^\perp_X \xi)_p := ((\overline{\nabla}_X \xi)_p)^\perp \in N_p M.$$

Тоді $A\colon \xi, X \mapsto A_\xi X$ називається оператором Вейнгартена підмноговида (M, r), а $\nabla^\perp\colon X, \xi \mapsto \nabla^\perp_X \xi$ – нормальною зв'язністю (M, r).

Rem. За побудовою, $A_\xi X$ – поле на M, а $\nabla^{\perp}_X \xi$ – нормальне поле на M ($(k-2)$-гладкі – Впр.).

Cor. (Розкладення Вейнгартена) Для кожної $p \in M$

$$(\overline{\nabla}_X \xi)_p = -d_p r((A_\xi X)_p) + (\nabla^{\perp}_X \xi)_p$$

– ортогональне розкладення на елементи з $d_p r(T_p M)$ і $N_p M$ відповідно.

Rem. Або простіше для полів:

$$\overline{\nabla}_X \xi = -dr(A_\xi X) + \nabla^{\perp}_X \xi.$$

У спрощених позначеннях маємо $\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi$.