gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 7. Еволюта і евольвента плоскої кривої

Розглядаємо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $I\!R^2$, параметризовану натуральним параметром:

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

В кожній точці кривої γ обчислюється модифікований базис Френе $\vec{\tau} = \vec{f}\,'$, $\vec{n}$, який є ортонормованим і додатно орієнтованим базисом в $I\!R^2$.

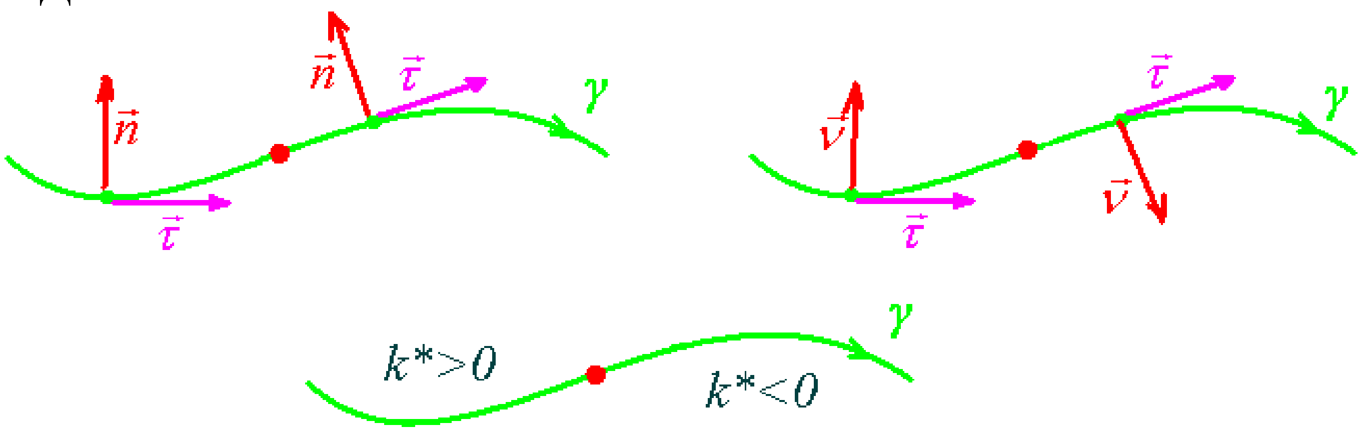
Також в кожній точці кривої γ обчислюється кривина:

$$k = |\,\vec{f}\,''\,|$$

і кривина зі знаком

$$k^* = \pm\, k\,,$$

знак якої визначається тим, чи є базис Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ додатно або від'ємно орієнтованим відповідно.



7.1. Щільнодотичне коло

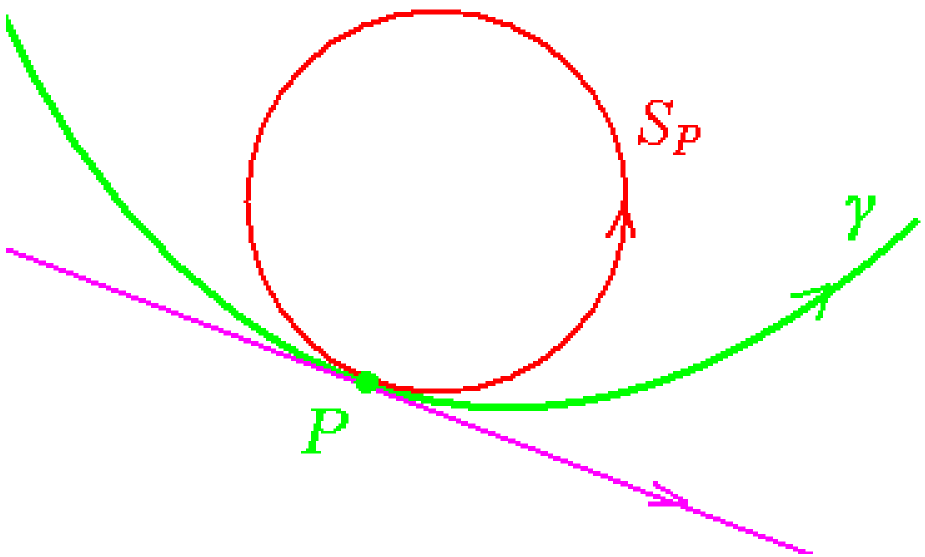
Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ, що не є точкою перегину

Розглянемо коло S_P, яке має такі властивості:

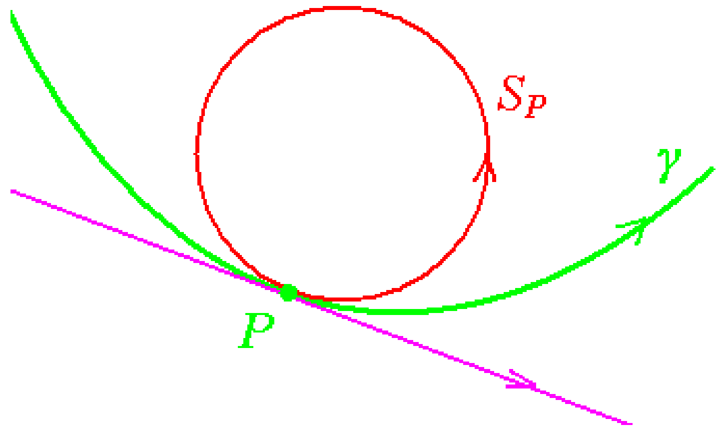
1) коло S_P проходить через точку P,

2) коло S_P дотикається в точці P дотичної прямої кривої γ в точці P і розташоване відносно цієї прямої в тій же півплощині, що і крива γ,

3) радіус кола S_P дорівнює $r = \dfrac{1}{k(s_0)}$.



Твердження. *1. Базиси Френе кривої γ і кола S_P в точці P співпадають.*
2. Кривини кривої γ і кола S_P в точці P співпадають.



Доведення.

1. Крива γ і коло S_P мають однакову дотичну пряму в точці P. Значить, за умови однакової орієнтованості, одиничні дотичні вектори $\vec{\tau}_\gamma$ і $\vec{\tau}_S$ кривої γ і кола S_P, як одиничні напрямні вектори спільної дотичної прямої, співпадають.

З ортонормованості базисів Френе випливає, що одиничні вектори $\vec{\nu}_\gamma$ і $\vec{\nu}_S$, ортогональні до $\vec{\tau}_\gamma = \vec{\tau}_S$, співпадають з точністю до знаку. А оскільки крива γ і коло S_P лежать по одну сторону від спільної дотичної прямої в точці P, і саме в цю сторону спрямовані $\vec{\nu}_\gamma$ і $\vec{\nu}_S$, то отримуємо $\vec{\nu}_\gamma = \vec{\nu}_S$. Отже базиси Френе кривої γ і кола S_P в точці P співпадають.

2. Кривина кола обернено пропорційна радіусу. Оскільки радіус $r = \dfrac{1}{k_\gamma}$, то кривина кола S_P дорівнює кривині кривої γ в точці P.

Наслідок. *Розкладання в ряд Тейлора для кривої γ і кола S_P в точці P співпадають з точністю до членів другого порядку.*

Доведення. Будемо вважати, що крива γ параметризована натуральним параметром, що відраховується від точки P.

Аналогічним чином параметризуємо коло S_P.

Маємо розкладання Тейлора:

$$\vec{f}(s) = \vec{f}(0) + \vec{\tau}(0)s + \frac{1}{2}k(0)\vec{\nu}(0)s^2 + \vec{o}(s^2)$$

Оскільки *крива γ і коло S_P проходять через точку P*, мають однаковий базис Френе і однакову кривину в цій точці P, то і їх розкладання Тейлора в точці P співпадають з точністю до членів другого порядку.

Висновок. Для кривої γ :

– дотична пряма кривої γ в точці P є наближенням першого порядку,

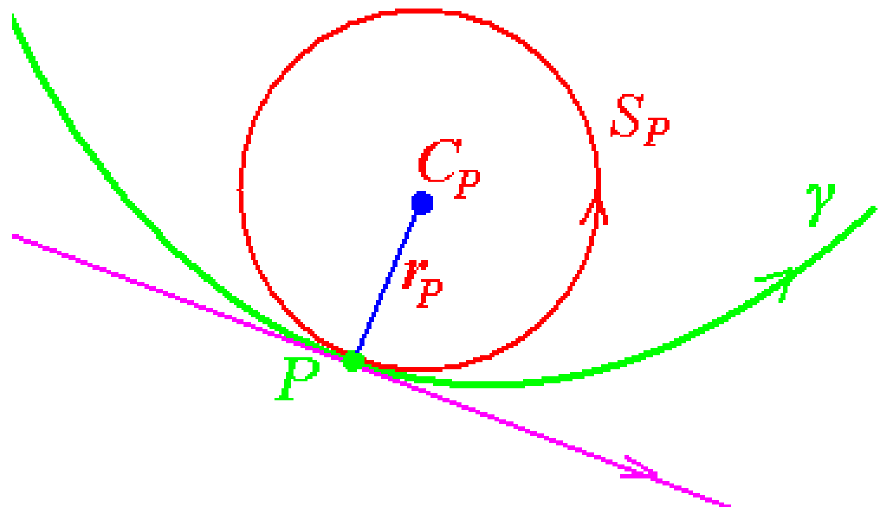
– коло S_P є наближенням другого порядку.

Визначення.

Коло S_P називається *щільнодотичним колом* кривої γ в точці P.

Радіус кола S_P називається *радіусом кривини* кривої γ в точці P: $r = \dfrac{1}{k}$.

Центр кола S_P називається *центром кривини* кривої γ в точці P.



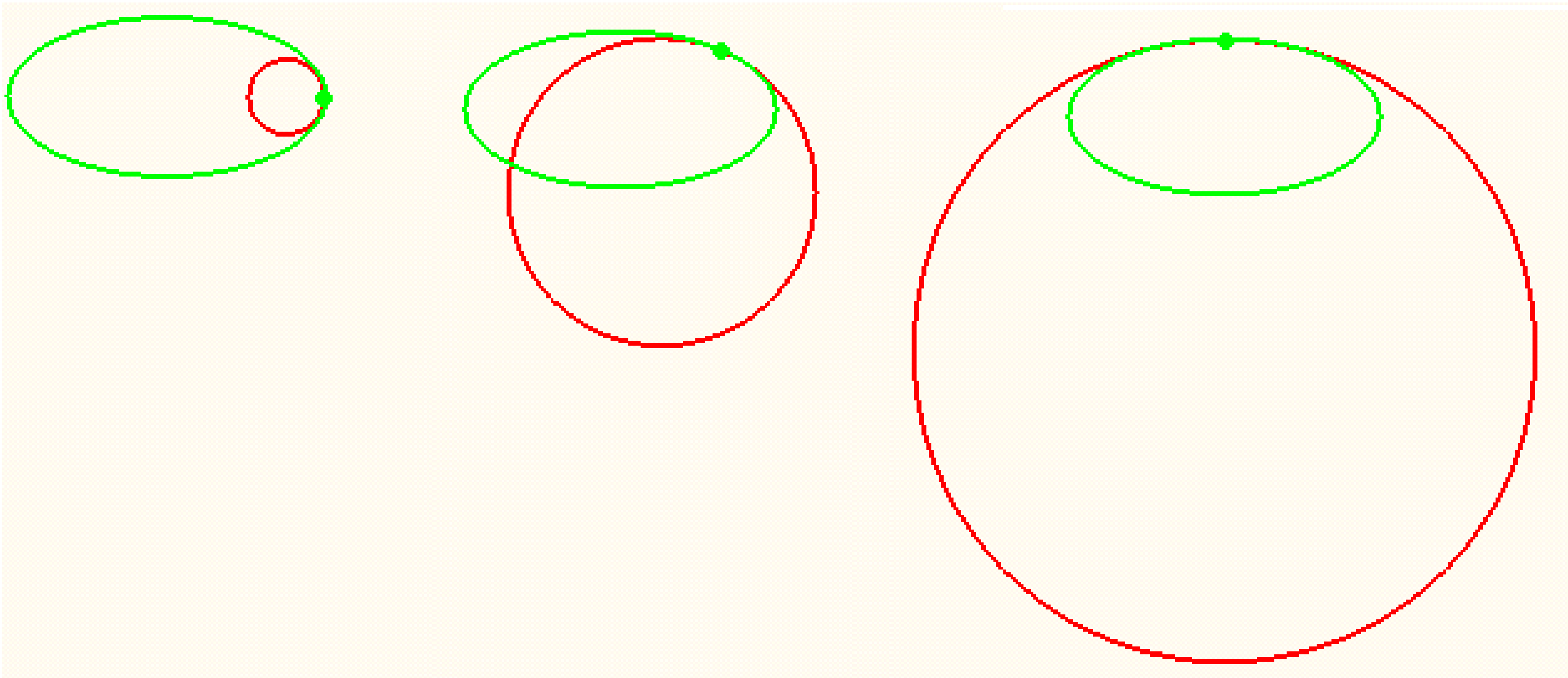
Зауваження 1. В кожній точці кривої γ, що не є точкою перегину, щільнодотичне коло (центр кривини і радіус кривини) визначається однозначно. В різних точках кривої – різні (взагалі кажучи) щільнодотичні кола.

Зауваження 2. В точках перегину, де $k=0$, роль щільно дотичного кола відіграє дотична пряма.

Приклади.

1. Якщо γ – коло, то для будь-якої його точки P щільнодотичне коло S_P співпадає з самим колом γ.

2. Нехай γ – еліпс. Тоді в кожній точці P буде своє щільнодотичне коло S_P

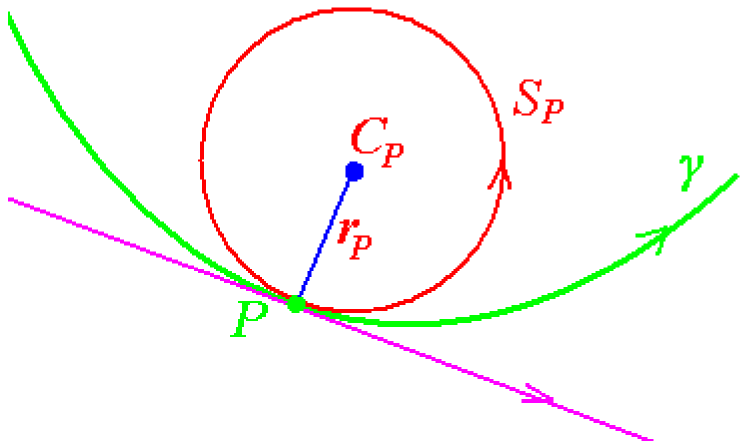


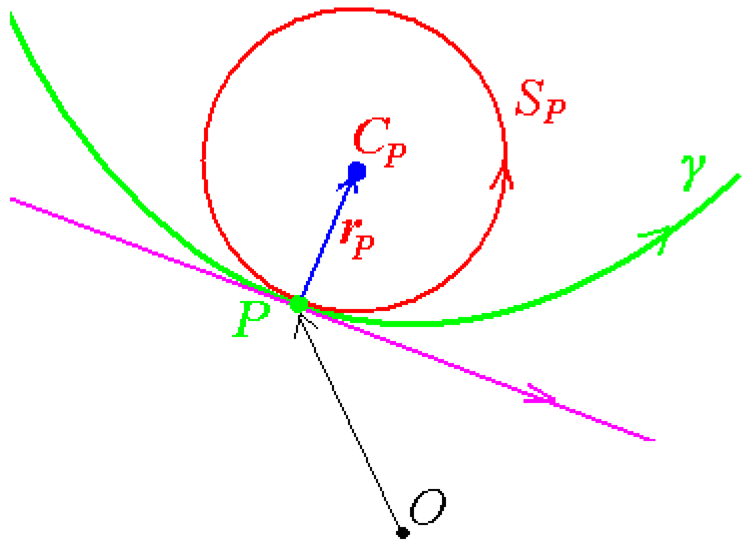
Чим більша кривина кривої, тим менше радіус щільнодотичного кола.

Чим менша кривина кривої, тим більше радіус щільнодотичного кола.

Радіус-вектор центра кола S_P, тобто, радіус-вектор центра кривини C_P:

$$\vec{x} = \vec{f}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\vec{v}(s_0)$$





7.2. Еволюта

Визначення. *Еволютою* регулярної (класу C^2) кривої γ в $\mathbb{R}^2$ називається геометричне місце її центрів кривини.

Позначення еволюти – γ°

Якщо крива γ параметризована натуральним параметром і задається радіус-вектором

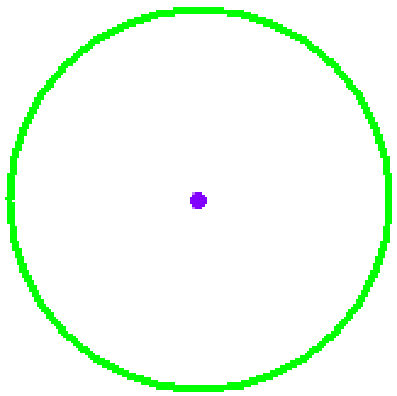
$$\vec{x} = \vec{f}(s) \ ,$$

то її еволюта γ° задається радіус-вектором

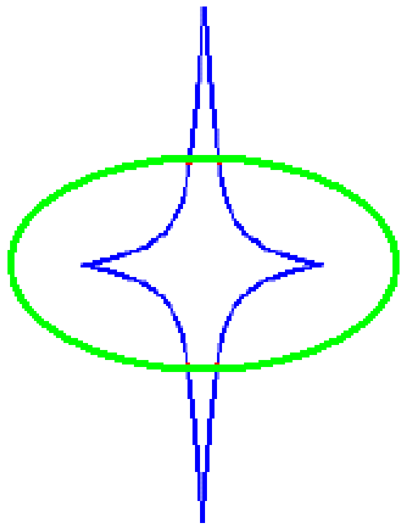
$$\vec{x} = \vec{f}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{\nu}(s).$$

Задача. Запишіть радіус-вектор еволюти в довільній параметризації на кривій γ .

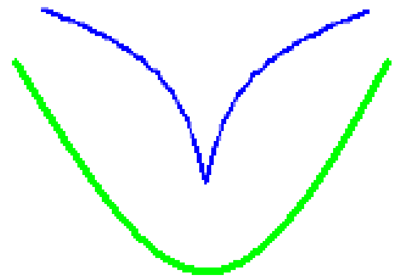
Приклади.



γ - коло



γ - еліпс



γ - парабола

Проаналізуємо регулярність еволюти γ°. Для цього продиференціюємо радіус-вектор еволюти:

$$\vec{f}^\circ(s) = \vec{f}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{v}(s)$$

Маємо:

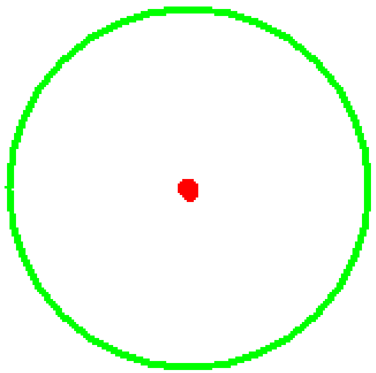
$$\frac{d\vec{f}^\circ}{ds} = \frac{d\vec{f}}{ds} - \frac{k'}{k^2}\vec{v} + \frac{1}{k}\frac{d\vec{v}}{ds} = \vec{\tau} - \frac{k'}{k^2}\vec{v} + \frac{1}{k}(-k\vec{\tau}) = -\frac{k'}{k^2}\vec{v}$$

Як наслідок, отримуємо: $\left|\frac{d\vec{f}^\circ}{ds}\right| = \frac{|k'|}{k^2}$

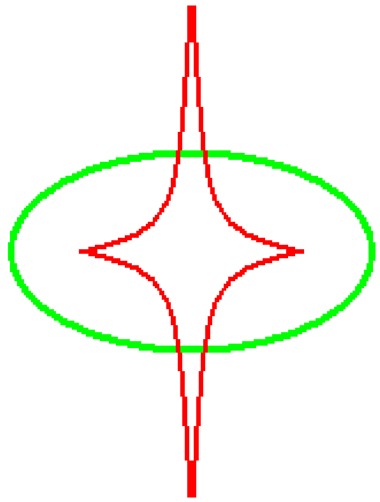
Висновок. Якщо на кривій γ немає екстремальних точок кривини ($k' \neq 0$), то її еволюта γ° є регулярною кривою.

Якщо ж на кривій γ є екстремальна точка P для функції кривини ($k' = 0$), на еволюті γ° виникає сингулярна точка, яка є центром кривини C_P кривої γ в точці P.

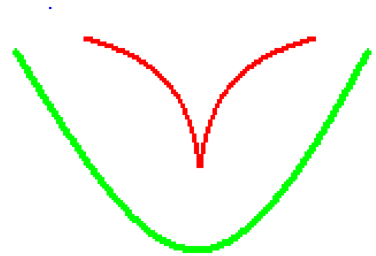
Приклади.



γ - коло



γ - еліпс



γ - парабола

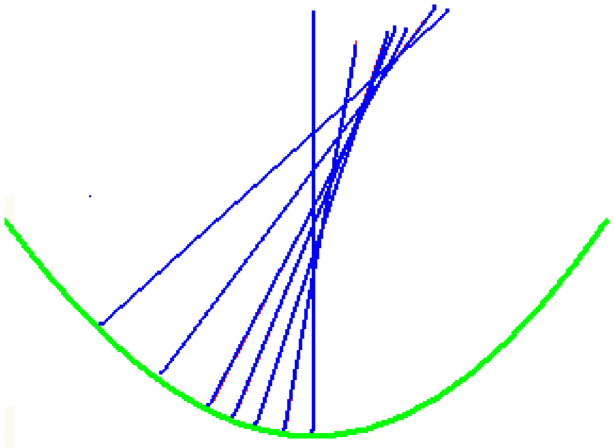
Еволюта як огинаюча

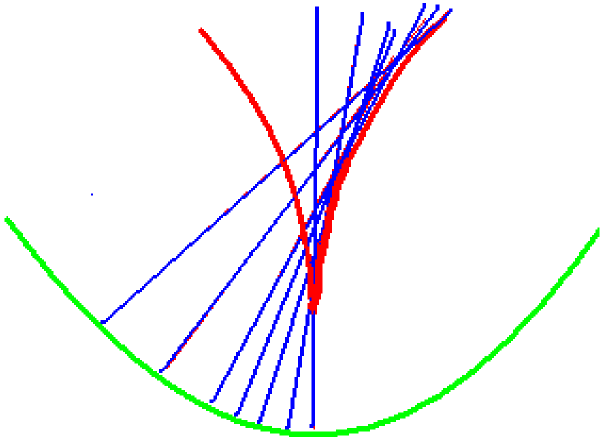
З формули

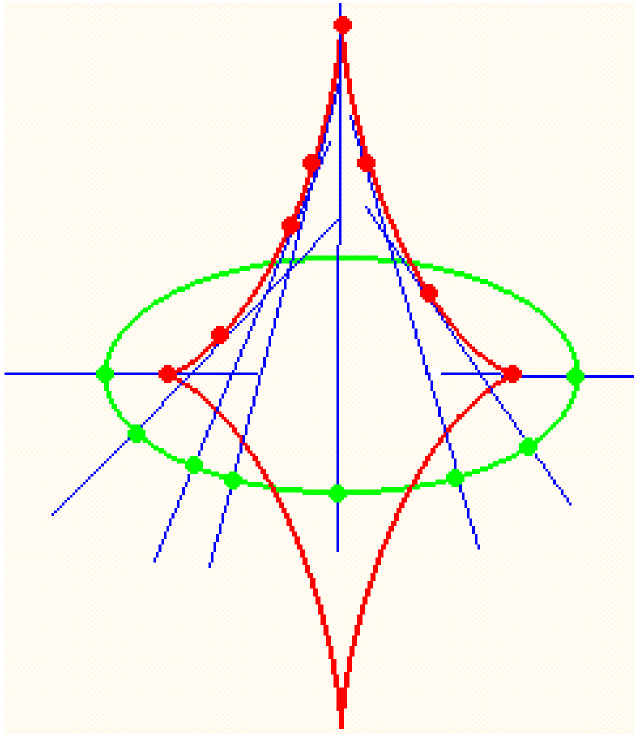
$$\frac{d\vec{f}^{\circ}}{ds} = -\frac{k'}{k^2}\vec{v}$$

витікає, що нормальні прямі кривої γ є дотичними прямими еволюти γ°.

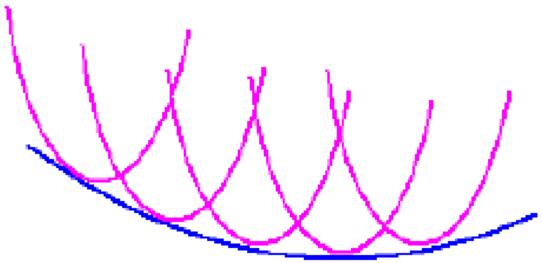
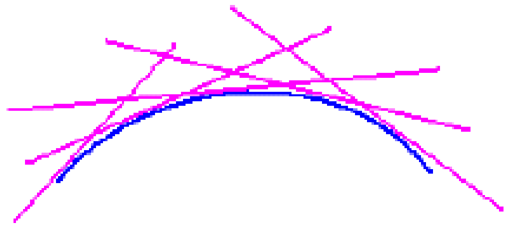
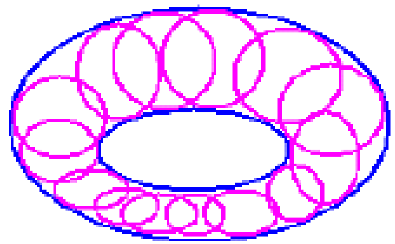
Інакше кажучи, якщо намалювати усі нормальні прямі кривої γ, то еволюта γ° буде *огинаючою* кривою (*обгорткою*) цієї сім'ї нормальних прямих кривої γ.







Існує загальне поняття *обгортки(огинаючої кривої)* заданого однопараметричного сімейства ліній на площині (дивись *В.А. Залгаллер, Теория огибающих*).

В нашому випадку мова йде про сімейство прямих ліній - головних нормалей заданої кривої γ. Обгорткою такого сімейства є еволюта γ°.

Еволюти та паралельні криві

Для заданої кривої γ з радіус-вектором

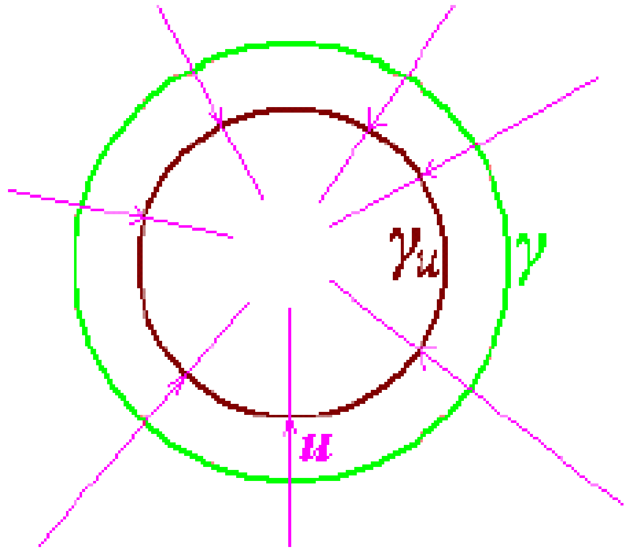
$$x = \vec{f}(s)$$

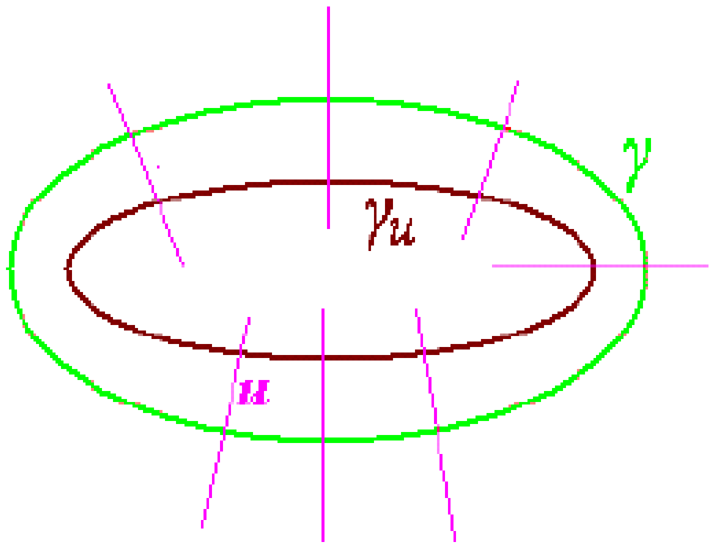
розглянемо криву γ_u з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s) + u\,\vec{v}(s),$$

де u - довільна константа.

З геометричної точки зору, крива γ_u утворюється з точок кривої γ, зсунутих вздовж її головних нормалей на одну й ту ж саму відстань u.





Обчислимо похідну вектор-функції

$$\vec{f}_u(s)=\vec{f}(s) + u\,\vec{v}(s),$$

що задає криву γ_u :

$$\vec{f}_u{}'=\vec{f}\,' + u\,\vec{v}\,' = \vec{\tau} + u\,(-k\,\vec{\tau})= (1- u\,k)\,\vec{\tau}.$$

Отже, крива γ_u буде регулярно параметризованою, якщо $1- uk\neq 0$. При цьому у відповідних точках на кривих γ і γ_u їх дотичні прямі є паралельними:

$$\vec{f}_u{}' \;||\; \vec{f}\,'=\vec{\tau}\,.$$

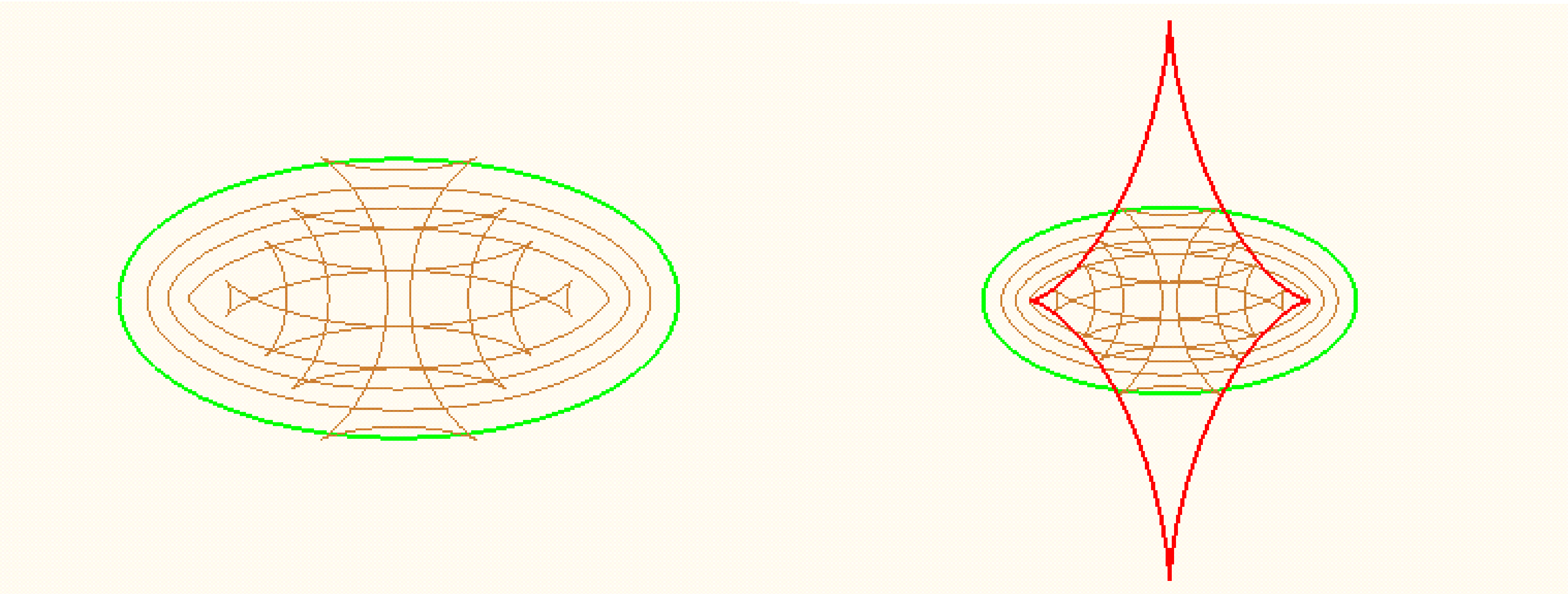
Тому прийнято казати, що криві γ і γ_u є *паралельними*.

А сингулярні точки на кривій γ_u будуть виникати, якщо на кривій γ є точки, де $1- uk = 0$. В таких точках на кривій γ маємо $u =1/k$. Тобто, u дорівнює радіусу кривини, а відповідні сингулярні точки на кривій γ_u - це центри кривини кривої γ !

Якщо змінювати параметр u , отримаємо однопараметричне сімейство кривих $\{ \gamma_u \}_{u\epsilon I}$.

Сингулярні точки кривих сімейства $\{ \gamma_u \}_{u\epsilon I}$ є центрами кривини кривої і разом утворюють *еволюту* γ° кривої γ.

Приклад. Еліпс, паралельні йому криві і еволюта



Зауваження. Замість кривини k та головної нормалі $\vec{v}$ можна взяти їх уточнені аналоги - кривину зі знаком k^* та вектор $\vec{n}$.

Тоді, оскільки $k^* \vec{n} = k \vec{v}$, то для радіус-вектора еволюти має місце формула

$$\vec{x} = \vec{f} + \frac{1}{k^*} \cdot \vec{n}.$$

В координатній формі, якщо крива γ задана параметрично

$$x^1 = f^1(t),$$
$$x^2 = f^2(t),$$

то її еволюта γ° буде задаватися параметрично

$$x^1 = f^1 - \frac{(f^{1\prime})^2 + (f^{2\prime})^2}{f^{1\prime} \cdot f^{2\prime\prime} - f^{2\prime} \cdot f^{1\prime\prime}} \cdot f^{2\prime},$$

$$x^2 = f^2 + \frac{(f^{1\prime})^2 + (f^{2\prime})^2}{f^{1\prime} \cdot f^{2\prime\prime} - f^{2\prime} \cdot f^{1\prime\prime}} \cdot f^{1\prime}.$$

7.3. *Евольвента*

Нехай γ - регулярно параметризована класу C^2 крива в R^2, що задається радіус-вектором

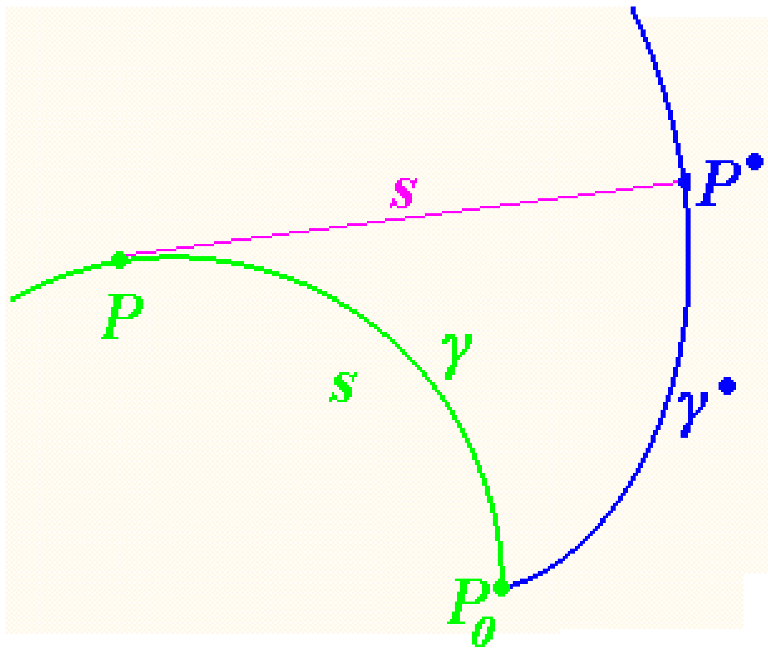
$$\vec{x}=\vec{f}(s)$$

відносно деякого натурального параметра s.

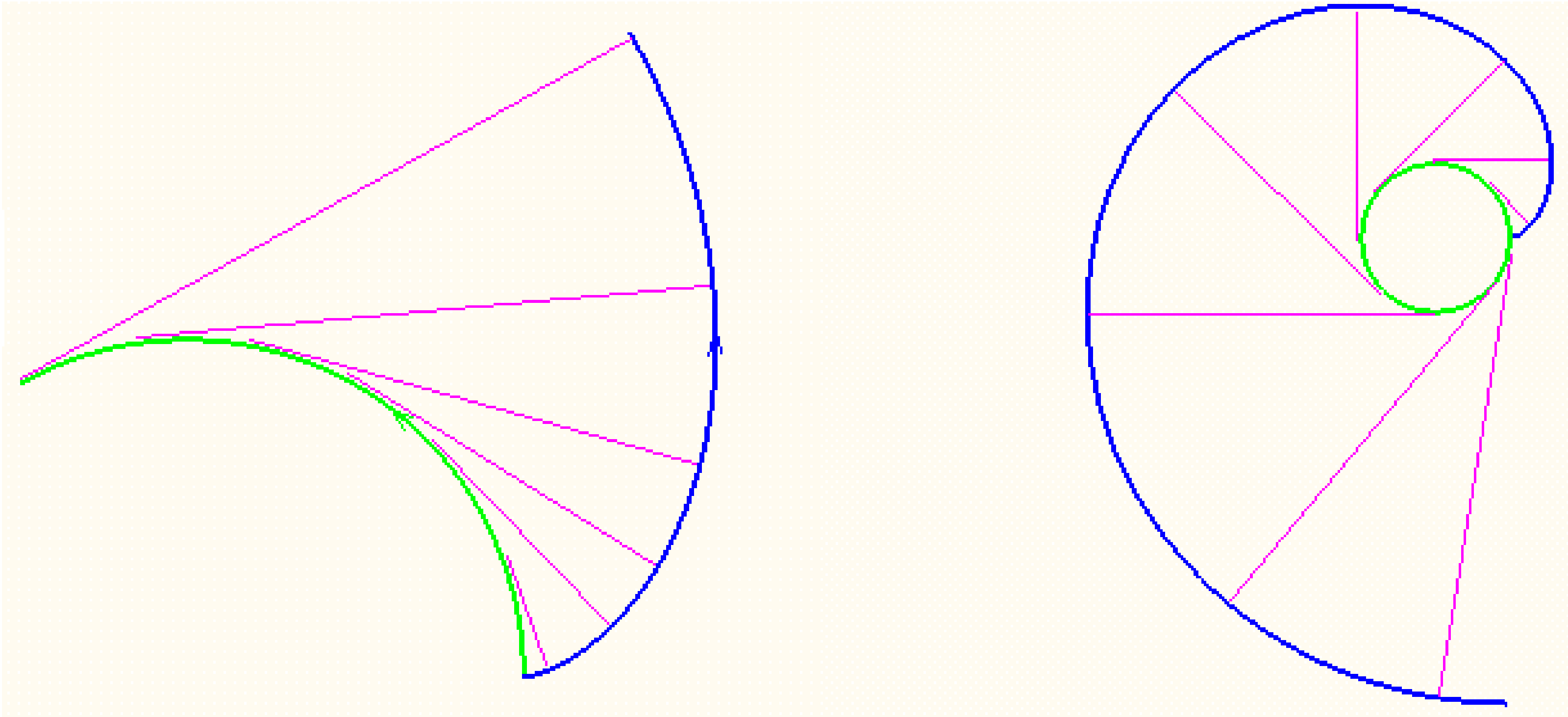
Визначення. *Евольвентою* кривої γ називається крива $\gamma^{\bullet}$, що задається радіус-вектором

$$\vec{x}=\vec{f}(s)-s\,\vec{\tau}(s)$$

Геометричний сенс: від кожної точки P кривої γ вздовж дотичної прямої (у протилежному до орієнтації напрямку) відкладаємо відрізок $PP^{\bullet}$, довжина якого дорівнює довжині дуги PP_0 кривої від точки P до початкової точки P_0 $(s=0)$.



Ілюстрації



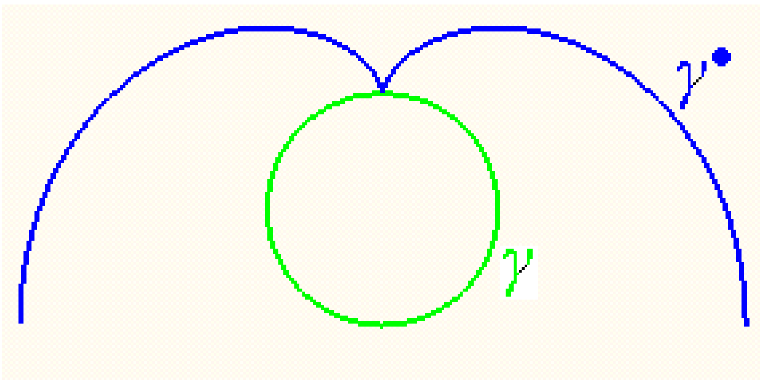
Зауваження. Визначення поняття евольвенти $\gamma^{\bullet}$ залежить від вибору натуральної параметризації (її початкової точки P_0) на кривій γ. Для однієї й тієї ж кривої γ можна побудувати різні евольвенти, обираючи при побудові різні положення початкової точки P_0 на кривій γ.

Позначимо відповідну вектор-функцію $\vec{f}^{\bullet} = \vec{f} - s\vec{\tau}$.

Обчислимо дотичний вектор евольвенти:

$$\vec{f}^{\bullet\prime} = \vec{f}' - \vec{\tau} - s\vec{\tau}' = \vec{\tau} - \vec{\tau} - s(k\vec{v}) = -sk\,\vec{v}.$$

Як наслідок, якщо крива γ має ненульову кривину $k \neq 0$, то її евольвента $\gamma^{\bullet}$ буде регулярно параметризованою кривою всюди за виключенням точки $P_0(s=0)$, що буде сингулярною точкою евольвенти $\gamma^{\bullet}$.



Теорема (про еволюту евольвенти). *Нехай γ - регулярно параметризована класу C^2 крива в $\mathbb{R}^2$ з ненульовою кривиною $k \neq 0$. Тоді еволюта евольвенти кривої γ співпадає з кривою γ.*

Доведення. Нехай крива γ задана в натуральній параметризації радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s) .$$

Тоді її евольвента $\gamma^{\bullet}$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f} - s\,\vec{\tau}.$$

Розглянемо еволюту кривої $\gamma^{\bullet}$, яку позначимо $(\gamma^{\bullet})^{\circ}$. Вона задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}^{\bullet} + \frac{1}{\vec{k}^{\bullet}}\,\vec{v}^{\bullet},$$

де $\vec{f}^{\bullet}$, $k^{\bullet}$ і $\vec{v}^{\bullet}$ - це радіус-вектор, кривина і головна нормаль кривої $\gamma^{\bullet}$.

Обчислимо похідну вектор-функції $\vec{f}^{\bullet} = \vec{f} - s\,\vec{\tau}$. Отримаємо:

$$\frac{d\vec{f}^{\bullet}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{ds} - \vec{\tau} - s\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{\tau} - \vec{\tau} - s(k\vec{\nu}) = -sk\,\vec{\nu}$$

Звідси отримуємо, що одиничний дотичний вектор $\tau^{\bullet}$ кривої $\gamma^{\bullet}$ має вигляд

$$\vec{\tau}^{\bullet} = \vec{\nu},$$

а натуральний параметр $s^{\bullet}$ на кривій $\gamma^{\bullet}$ пов'язаний з натуральним параметром s на кривій γ співвідношенням

$$\frac{ds^{\bullet}}{ds} = -sk.$$

Нам потрібно знайти кривину $k^{\bullet}$ та головну нормаль $\vec{\nu}^{\bullet}$ кривої $\gamma^{\bullet}$. Для цього обчислимо похідну

$$\frac{d\vec{\tau}^{\bullet}}{ds^{\bullet}} = \frac{d\vec{\nu}}{ds^{\bullet}} = \frac{d\vec{\nu}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^{\bullet}} = (-k\vec{\tau})\cdot(-\frac{1}{sk}) = \frac{1}{s}\,\vec{\tau}\ .$$

Згадуючи формулу Френе $\dfrac{d\vec{\tau}^{\bullet}}{ds^{\bullet}} = k^{\bullet}\vec{v}^{\bullet}$,

отримуємо

$$\frac{1}{s}\vec{\tau} = k^{\bullet}\vec{v}^{\bullet},$$

тому

$$k^{\bullet} = \frac{1}{|s|}, \qquad \vec{v}^{\bullet} = \operatorname{sign}(s)\cdot\vec{\tau}.$$

Обчислимо тепер вектор-функцію

$$\vec{f}^{\bullet\circ} = \vec{f}^{\bullet} + \frac{1}{k^{\bullet}}\vec{v}^{\bullet},$$

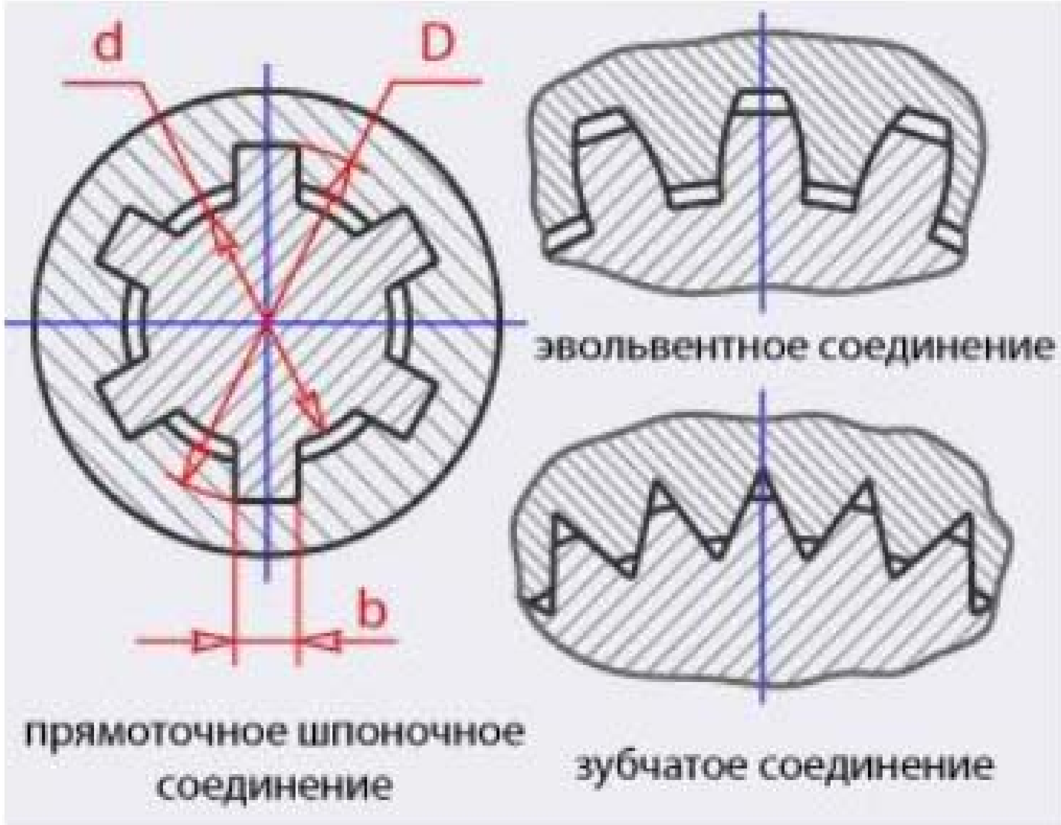
що задає шукану криву $(\gamma^{\bullet})^{\circ}$. Маємо:

$$\vec{f}^{\bullet\circ} = f^{\bullet} + \frac{1}{k^{\bullet}}v^{\bullet} = (\vec{f} - s\,\vec{\tau}) + |s|\cdot(\operatorname{sign}(s)\cdot\vec{\tau}) = \vec{f} - s\,\vec{\tau} + s\vec{\tau} = \vec{f}.$$

Таким чином, вектор-функції $\vec{f}^{\bullet\circ} = \vec{f}$, а отже криві $(\gamma^{\bullet})^{\circ}$ та γ співпадають, що і вимагалось довести.

Завдання. Знайти та заповнити прогалини у доведенні. Зокрема, як виглядає ситуація в точці s=0?

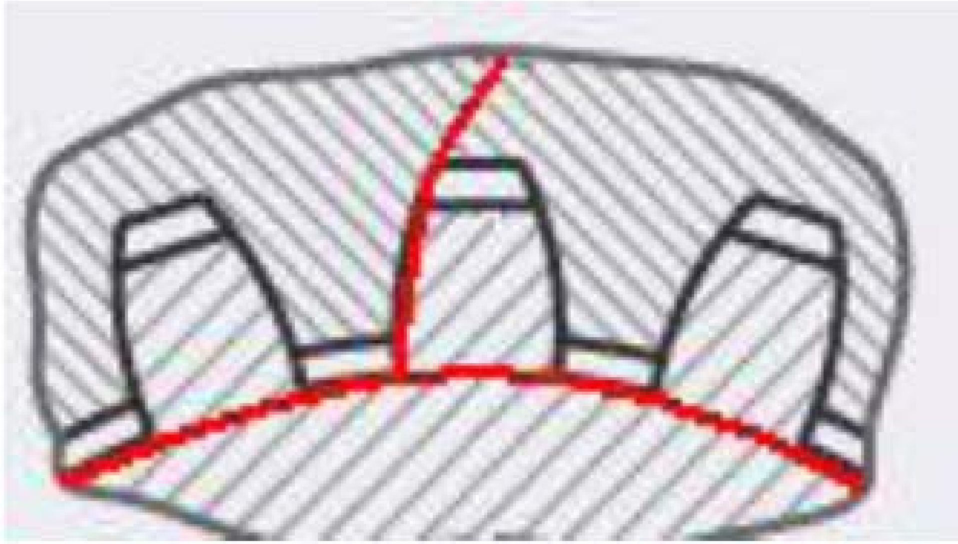
Прикладне застосування. *Евольвентні шліцові з'єднання.*



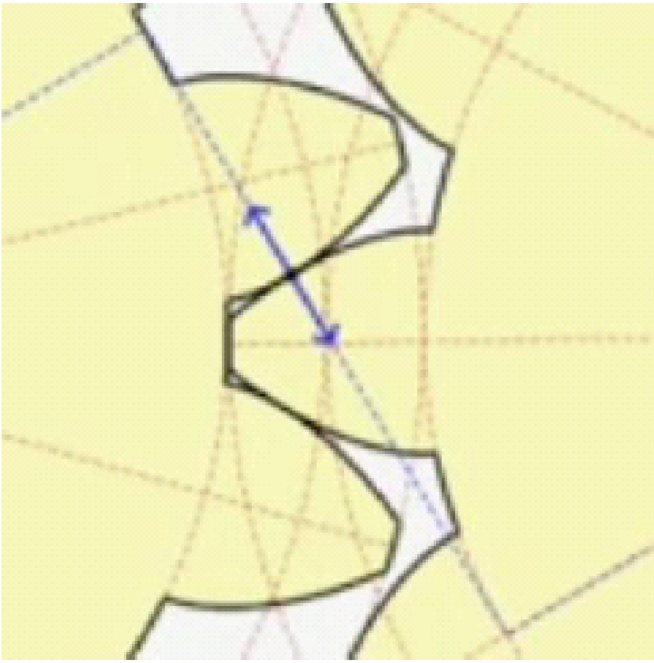
прямоточное шпоночное соединение

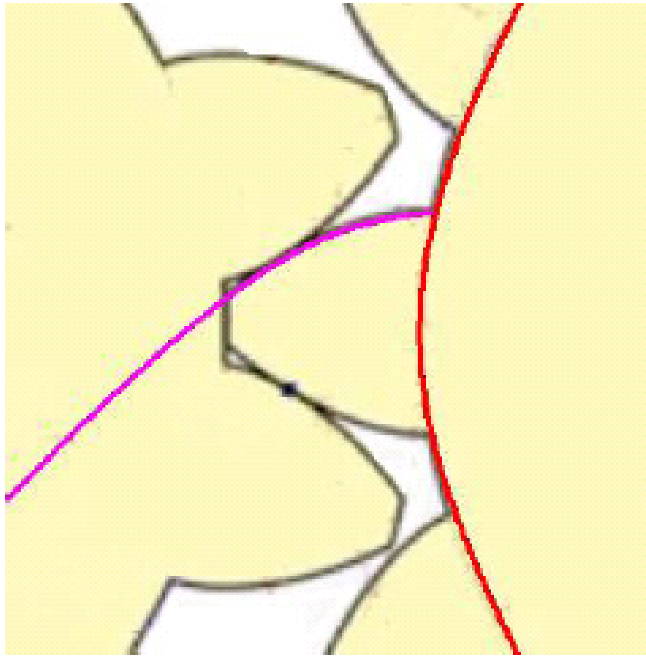
эвольвентное соединение

зубчатое соединение



Прикладне застосування. *Евольвентні зчеплення.*





Как построить эвольвентно...

youtube.com