39.6. Класифікувати літери латинського алфавіту з точністю до гомотопічної еквівалентності.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

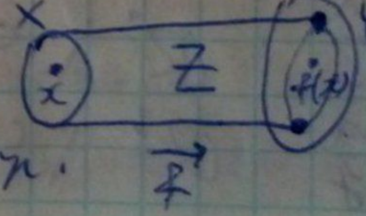
$-$ — cmgneni

$=$ $\sim S^1$

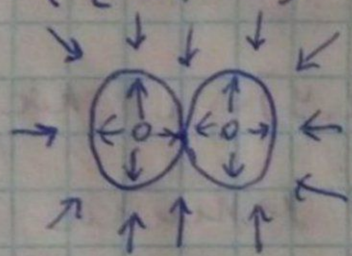
$\equiv$ $\sim S^1 \vee S^1$.

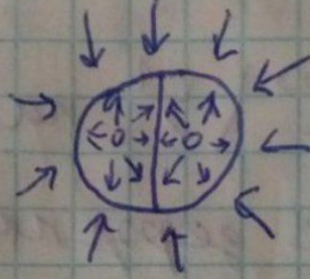
39.14. $X \sim Y \Rightarrow \exists$ ТП Z і деф. ретракти $\hat{X} \cong X$, $\hat{Y} \cong Y$ у ньому.

Ідея: нехай $f: X \to Y$ задає гом. екв-сть (тобто $\exists\, g: Y \to X: f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$). Z – конус відображення f: $Z := X \times I \sqcup Y/\sim$, де $(x,1) \sim f(x)\ \forall x \in X$. Тоді $\hat{X} := p(X \times \{0\})$, $\hat{Y} := p(Y)$, де p – канон. пр.



39.7(2) $S^1 \vee S^1$ і $S^1 \cup [x,y]$ (де $x,y \in S^1$, $x \neq y$) – деф. ретракти $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\}$:





Гомотопії між цими ретракціями і id – лінійні ($F(x,s) = (1-s)f(x) + sx$).

39.9 Нехай $x,y \in S^2$, $x \neq y$. Тоді $S^2/\{x,y\} \sim S^2 \vee S^1$.

Використавши гомео-зм, можемо вважати, що $y = -x = (0,0,1)$.

Нехай $S^2/\{x,y\}$ гомеоморфна підмножині $\mathbb{R}^3$ (точніше $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$,

де $S^1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = \frac{1}{2}, z=0\}$). (або  але так несиметрично)

Ототожнимо їх.

Нехай $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\} \to S^1 \vee S^1$ і $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\} \to S^1 \cup [x,y]$ – ретракції з попереднього розв'язку. Будемо їх "обертати":

$\hat{f}: \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \to S^2 / \{x, y\} : (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \mapsto (f^1(\rho, z)\cos\varphi, f^1(\rho, z)\sin\varphi, f^2(\rho, z))$,

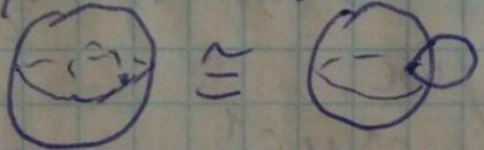
$\hat{g}: \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \to S^2 \cup [x, y] : (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \mapsto (g^1(\rho, z)\cos\varphi, g^1(\rho, z)\sin\varphi, g^2(\rho, z))$.

Отримаємо теж ретракції $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ на $S^2/\{x,y\}$ і на $S^2 \cup [x,y]$:

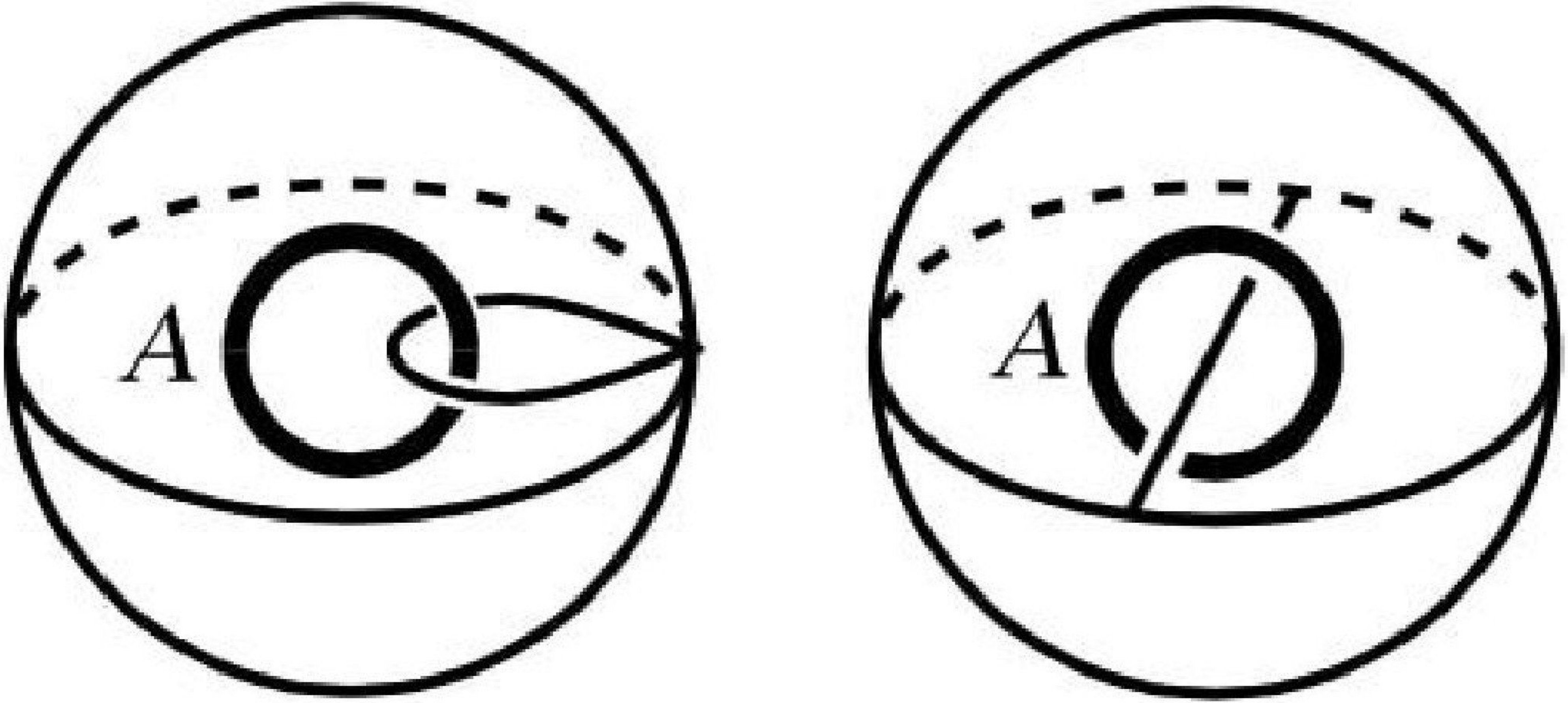
Вони деформаційні (лінійна гомотопія працює і тут).

Деформуємо $S^2 \cup [x,y]$, наближаючи точки одна до іншої, разом з тим деформуємо $\hat{g}$ і гомотопію:

Отримаємо деф. ретракцію $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ на підмножину, гомеоморфну $S^2 \vee S^1$:



Отже, $S^2/\{x,y\} \sim \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \cup [x,y] \sim S^2 \vee S^1$.


A
A

39.21 Знайти фундаментальні групи:

2. $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m$ $\leftarrow$ при $n \geq m+1$

За 39.13(2), $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \sim S^{n-m-1}$. Тому:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m, x) \cong \pi_1(S^{n-m-1}, \varphi(x)) = \begin{cases} \{[e_{\varphi(x)}]\}, & n = m+1 \\ \cong \mathbb{Z}, & n = m+2 \\ \{[e_{\varphi(x)}]\}, & n \geq m+3 \end{cases}$$

(тут φ - деформаційна ретр.)

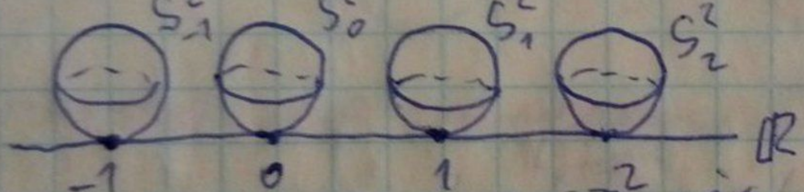
вузл. 3. $S^3 \setminus S^1$

За 39.13(3), $S^3 \setminus S^1 \sim S^1$, тому $\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \simeq \pi_1(S^1, \varphi(x)) \simeq$
$\simeq \mathbb{Z}$ (де φ – відп. деф. ретракція).

5. $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$

За 39.9, $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \vee S^1$

Універсальним накриттям $S^2 \vee S^1$ є $X := \left(\mathbb{R} \sqcup \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} S^2_n\right)/\sim$,
де $\sim$ $\forall n$ ототожнює 1 точку $x_n \in S^2_n$ з $n \in \mathbb{R}$:

X 

, "гірлянда". Однозв'язна.

$\mathbb{Z}$ діє на X: $\underbrace{\text{факторизацією}}_{}$ ($m \in \mathbb{Z}$ діє) $x \mapsto x+m$, $S^2_n \mapsto S^2_{n+m}$.
Це непер. цілком розр. дія, і $X/\mathbb{Z} \cong S^2 \vee S^1$ (намотуємо гірлянду). Тому дійсно $(X, S^2 \vee S^1, p)$ – унів. накр.,
і тому $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) \simeq \pi_1(S^2 \vee S^1, \varphi(x)) \simeq \mathbb{Z}$ $\left(\begin{array}{l} \pi_1(S^2 \setminus \{x,y\}, z) \simeq \mathbb{Z} \\ \pi_1(S^2 \cup [x,y], z) \simeq \mathbb{Z} \end{array}\right)$

<u>9.</u> Лист Мебіуса.

За <u>39.5.</u>, $X \sim S^1$ тому $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{Z}$.

—

<u>31.1.</u> Якщо X хаусдорфовий і $f, g, h \in C(I, X)$ - шляхи, то
$(f * g) * h = f * (g * h) \Leftrightarrow f = g = h = e_x$ (було в додаткових)

<u>31.4.</u> Якщо $X - T_1$ і $f \in C(I, X)$ - шлях, то
$e_x * f = f \Leftrightarrow f = e_x$. (і ан-но для $f * e_y = f$).

$\Leftarrow$ оч., $\Rightarrow$:

$$e_x * f(t) = \begin{cases} x, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
$$\| \\ f(t) \quad \forall t$$

Тобто $f(t) = x$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$. При $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ $2t-1 \in [0, \frac{1}{2}]$,
тому $f(t) = f(2t-1) = x$, etc., отримуємо, що $f(t) = x$
$\forall t \in [0, 1)$.

У T_1-просторі посл. $\{x_n = x\}_{n=1}^{\infty}$ має єдину границю x (бо
$\forall y \neq x$ $\exists$ відкр. $U \ni y : U \not\ni x$). Тому $1 - \frac{1}{n} \to 1$, $f(1 - \frac{1}{n}) = x$
$\forall n$ і f непер. $\Rightarrow f(1) = x$. Т.ч., $f = e_x$.

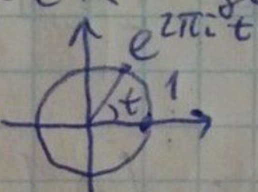
<u>31.5.</u> $f \in C(I, X)$ - шлях; $f * \overline{f} = e_x \Leftrightarrow f = e_x$ (і ан-но $\overline{f} * f = e_y$)

Дійсно, $f * \overline{f}(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = x \iff f(t) = x \ \forall t.$

Т.ч., в усіх гомотопічних властивостях добутку шляхів "гомотопічність" суттєва.

32. C-D, 2-4 (Впр. 4.1. лекцій)

X – ТП. Кругова петля в $x \in X$ – це $\hat{f} \in C(S^1, X) : \hat{f}(1) = x$

(де $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$: 

).

Будемо називати дві кругові петлі $\hat{f}$ і $\hat{g}$ гомотопними, $\hat{f} \sim \hat{g}$, якщо вони $\{1\}$-гомотопні: $\overbrace{\exists}^{\text{гомотопія}} \hat{F} \in C(S^1 \times I, X) : \hat{F}(\cdot, 0) = \hat{f}$, $\hat{F}(\cdot, 1) = \hat{g}$, $\hat{F}(1, \cdot) = \hat{e}_x$ (тобто постійне $S^1 \to x$).

Розгл. множину гомотопічних класів:

$$\pi_1^c(X, x) := \{[\hat{f}] \mid \hat{f} \in C(S^1, X), \hat{f}(1) = x\}.$$

$\forall$ петлі f у x, тобто $f \in C(I, X)$: $f(0) = f(1) = x$

f факторизується у неперервне $[0,1]/\{0,1\} \to X$.

$[0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$ Ототожнимо їх, і отримаємо з f

$[t] \mapsto e^{2\pi i t} \leftarrow$ за допоміжного відобр. За побудовою, $\hat{f}(e^{2\pi i t}) = f(t)\ \forall t \in I$

$\hat{f} \in C(S^1, X) : \hat{f}(1) = x$ – кругову петлю.

Покажемо, що тоді кор. визначене $\alpha : \pi_1(X,x) \to \pi_1^c(X,x) : [f] \mapsto [\hat{f}]$.

Дійсно, нехай $f \overset{\text{гомотопія}}{\sim} g : \exists F \in C(I \times I, X) : F(\cdot, 0) = f,\ F(\cdot, 1) = g$,

$F(0,\cdot) = F(1,\cdot) = x$. Воно факторизується за $\sim : (0,s) \sim (1,s)$

$\forall s$ у $\hat{F} \in C(S^1 \times I, X)$, де $\hat{F}(e^{2\pi i t}, s) = F(t,s)\ \forall t,s \in I$.

При цьому $\hat{F}(e^{2\pi i t}, 0) = F(t,0) = f(t) = \hat{f}(e^{2\pi i t})$ і $\hat{F}(e^{2\pi i t}, 1) =$

$= F(t,1) = g(t) = \hat{g}(e^{2\pi i t})\ \forall t$ і $\hat{F}(1,s) = F(0,s) = x\ \forall s$.

Тому $\hat{F}$ – гомотопія $\hat{f}$ і $\hat{g}$: $\hat{f} \sim \hat{g}$.

У навпаки, нехай $\hat{f}$ – кругова петля в x. Тоді

$f : I \to X : t \mapsto \hat{f}(e^{2\pi i t})$ – неперервне як комп. непер., і

$f(0) = \hat{f}(1) = x$, тобто f – ~~петля~~ петля в x. Покажемо, що

$\boxed{f(1) =}$ $[\hat{f}] \mapsto [f]$ кор. визначає відобр. $\pi_1^c(X,x) \to \pi_1(X,x)$,

тобто що визначене α^{-1}.

Дійсно, якщо $\hat{f} \sim \hat{g}$ і $\hat{F}$ - відп. гомотопія, то

$F: I \times I \to X: (t,s) \mapsto \hat{F}(e^{2\pi i t}, s)$ неперервне, і

$F(t,0) = \hat{F}(e^{2\pi i t}, 0) = \hat{f}(e^{2\pi i t}) = f(t)$, $F(t,1) = \hat{F}(e^{2\pi i t}, 1) = \hat{g}(e^{2\pi i t}) =$

$= g(t) \quad \forall t$, $\underset{F(1,s)}{F(0,s)} = \hat{F}(1,s) = \hat{f}(1) = x \quad \forall s$. Тому F - гомот.

f, g, $f \sim g$.

Т.ч., $\alpha: \pi_1(X,x) \to \pi_1^c(X,x)$ - бієкц.

Перетворимо її на ізоморфізм груп, перенесши множення з $\pi_1(X,x)$ на $\pi_1^c(X,x)$:

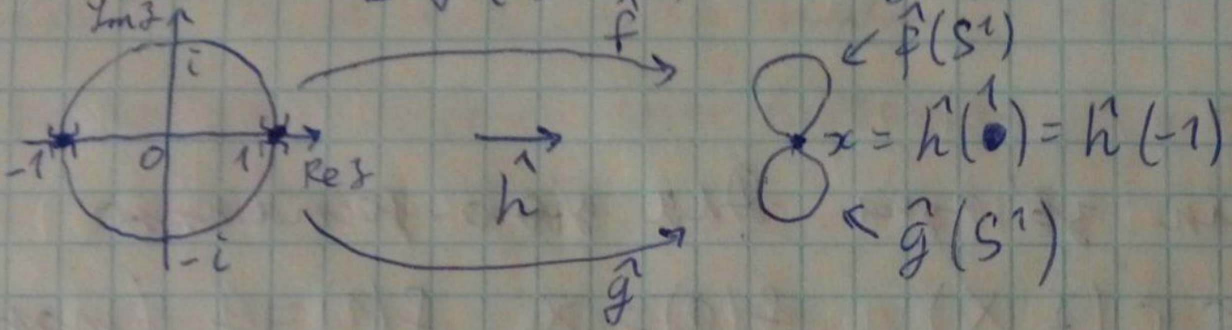
$\forall [\hat{f}], [\hat{g}] \in \pi_1^c(X,x) \qquad [\hat{f}][\hat{g}] := \alpha(\alpha^{-1}([\hat{f}]) \cdot \alpha^{-1}([\hat{g}]))$

Тобто (у позначеннях $[f] = \alpha^{-1}([\hat{f}])$, $[g] = \alpha^{-1}([\hat{g}])$ як вище):

$$[\hat{f}][\hat{g}] = [\hat{h}], \text{ де } \hat{h}(e^{2\pi i t}) = f * g(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \hat{f}(e^{4\pi i t}), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \hat{g}(e^{4\pi i t - 2\pi i}) = \hat{g}(e^{4\pi i t}), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} . \text{ Або:}$$

$$\hat{h}(z) = \begin{cases} \hat{f}(z^2), & \mathrm{Im}\, z \geq 0 \\ \hat{g}(z^2), & \mathrm{Im}\, z \leq 0 \end{cases};$$



За побудовою, тоді α – ізоморфізм груп.

32.5. X – антидискретний, $x \in X$. $\pi_1(X, x)$?

$\{[e_x]\}$ ($\forall$ відображення в X неперервне, тому $\forall f, g: Y \to X$ гомотопні і зокрема $\forall$ 2 петлі f, g у x гомотопні:

$$F(t,s): \begin{cases} f(t), & s = 0 \\ g(t), & s = 1 \\ x, & \text{решта } (t,s) \end{cases} \text{ – гомотопія}).$$

X – дискретний, $x \in X$. $\pi_1(X, x)$? Коли він однозв'язний

Теж $\{[e_x]\}$, бо усі петлі постійні: $f \in C(I, X) \Rightarrow$

$f(I)$ міститься у зв. компоненті x, тобто $\{x\}$.

X однозв'язний $\Leftrightarrow$ $|X| = 1$ (коли є лін. зв'язним).

32.7. Показати, що зв'язна двокрапка

$X = \{x, y\}$; $T = \{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}\}$ однозв'язна.

Показано, що вона лін. зв'язна. Для цього достатньо побудувати шлях $f \in C(I, X) : f(0) = x, f(1) = y$ (тоді $\overline{f}$ зв'язує y з x, e_x – x з собою, e_y – y з собою).

$$f(t) := \begin{cases} x, & t \in [0,1) \\ y, & t = 1 \end{cases}.$$

Непер.: $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\{x\}) = [0,1)$, $f^{-1}(\{x,y\}) = I$ – відкр. в I.

Тоді $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y)$ за лін. зв'язністю, тому достатньо знайти $\pi_1(X,x)$. Нехай $f \in C(I,X)$ – петля в x: $f(0) = f(1) = x$.

$$F(t,s) := \begin{cases} f(t), & s = 0 \\ x, & s \in (0,1] \end{cases}.$$

Воно непер. $I \times I \to X$: $F^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $F^{-1}(\{x\}) = (f^{-1}(\{x\}) \times I) \cup (I \times (0,1])$ і $F^{-1}(\{x,y\}) = I \times I$ відкр. в $I \times I$.

$F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = x$, тому це гом. $f \sim e_x$.