764. Лінія II пор. має фокус $F(2,0)$, відп. директрису $d: x = 8$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Знайти рів.

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$ еліпс. Директ. властивість для $M(x,y)$:

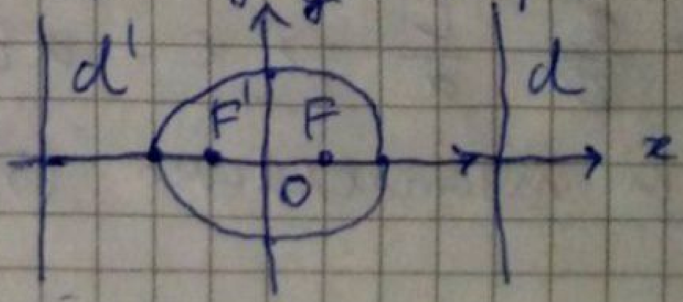
$$\frac{1}{2} = \varepsilon = \frac{MF}{dist(M,d)} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-8|}$$

$$4(x^2-4x+4+y^2) = x^2-16x+64$$

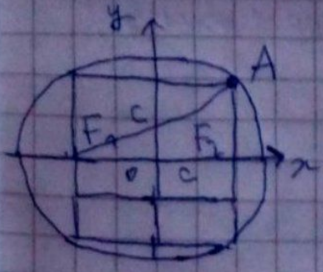
$$3x^2+4y^2=48, \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

Це канонічний еліпс, тому інші фокус і дир. симетричні відн. центра $(0,0)$!

$F'(-2,0)$, $d': x=-8$.



772. Сторони вписаного квадрата проходять через фокуси еліпса. Знайти ε.



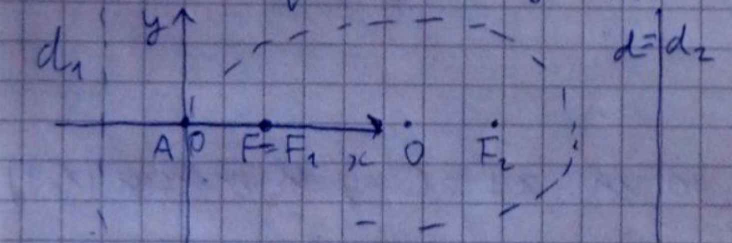
Для канон. коорд.: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $F_{1,2}(\pm c,0)$.

Тоді $(\pm c,\pm c)$ - вершини квадрата, $\in$ еліпсу.

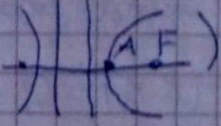
Можна підставити у рівняння, але краще використати фокальну власт.: для $A(c,c)$ $\quad 2a = AF_2+AF_1 = c+\sqrt{4c^2+c^2} = (1+\sqrt{5})c$. Тоді $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

784. Вершина лінії II пор. - у $A(0,0)$, найближчий фокус - у $F(2,0)$, директриса d перетинає фок. вісь у $(12,0)$.

Тобто фок. вісь - це $AF = Ox$, а d: $x=12$.



За розташуванням цих ел-тів, це еліпс, A - ліва вершина, F - лівий фокус, d - права дир.

(для гіперболи і параболи усі дир. були б лівіше A: )

Рівн.: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\quad a>b$.

При цьому центр $O(x_0,0)$ правіше F, тобто $x_0>2>0$, і $x_0 = AO = a$.

$F=F_1(2,0)$: $\quad 2 = x_0-c = a-a\varepsilon = a(1-\varepsilon)$.

$d=d_2$: $x=12$: $\quad 12 = x_0+\frac{a}{\varepsilon} = a+\frac{a}{\varepsilon} = a\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$6 = \frac{12}{2} = \frac{a\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{a(1-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-\varepsilon^2}.$$

$$6\varepsilon-6\varepsilon^2 = \varepsilon+1$$

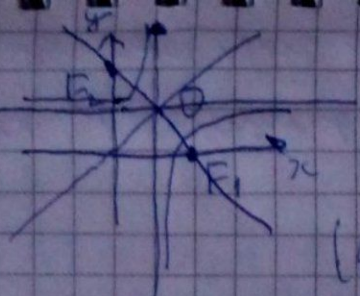
$$6\varepsilon^2-5\varepsilon+1=0.$$

$$\varepsilon = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12} = \frac{5\pm 1}{12}$$

$\varepsilon=\frac{1}{2}$: $\quad a=\frac{2}{1-\varepsilon}=4$, $c=a\varepsilon=2$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{12}$: $\quad \frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

$\varepsilon=\frac{1}{3}$: $\quad a=\frac{2}{1-\varepsilon}=3$, $c=a\varepsilon=1$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{8}$: $\quad \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

788: Фокуси гіп. у $F_1(1,0)$, $F_2(0,1)$, асимптоти $\parallel$ осям коорд.



Тоді це гіп. $2(x-x_0)(y-y_0) = -a^2$ з фокусами $F_1(x_0+a, y_0-a)$, $F_2(x_0-a, y_0+a)$ (див. задачу 786), причому центр $O(x_0, y_0)$ - середина F_1F_2: $O = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тоді $a = 1 - x_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Рівн.: $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $8xy - 4x - 4y + 3 = 0$.

Або використати фок. властивість: $|MF_1 - MF_2| = 2a = \sqrt{2}c = \frac{\sqrt{2}}{2} F_1F_2 = 1$.

803 Використати ~~фокальне~~ полярне рівняння $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$:

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{\rho(\varphi)} + \frac{1}{\rho(\varphi+\pi)} = \dots$$

829. Знайти рівн. дотичних до гіп. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, що прох. через $(1,4)$

I спосіб: рівн. дотичної до $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у (x_0, y_0) - це $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$:

$\frac{xx_0}{1} - \frac{yy_0}{4} = 1$. Містить $(1,4)$:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1 + y_0$$

$$(1+y_0)^2 - \frac{y_0^2}{4} = 1$$

$$\frac{3}{4}y_0^2 + 2y_0 = 0 \qquad y_0\left(y_0 + \frac{8}{3}\right) = 0$$

$y_0 = 0$: $x_0 = 1 + y_0 = 1$, рівн. $x = 1$.

$y_0 = -\frac{8}{3}$: $x_0 = 1 + y_0 = -\frac{5}{3}$, рівн. $-\frac{5}{3}x - \frac{1}{4}y\left(-\frac{8}{3}\right) = 1$

$$5x - 2y + 3 = 0.$$

II спосіб: перетин $\forall$ прямої, що прох. через $(1,4)$ $\begin{cases} x = 1 + \lambda t \\ y = 4 + \mu t \end{cases}$ з гіперболою: $(1+\lambda t)^2 - \frac{1}{4}(4+\mu t)^2 = 1$

$$\left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{4}\right)t^2 + (2\lambda - 2\mu)t - 4 = 0$$

Точки перетину співпадають:

$$0 = \frac{D^2}{4} = (\lambda-\mu)^2 - \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{4}\right)(-4) = \lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 + 4\lambda^2 - \mu^2.$$

$$5\lambda^2 - 2\lambda\mu = 0$$

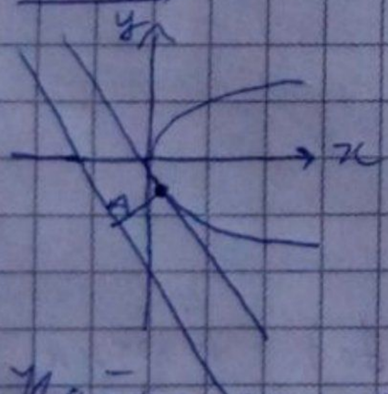
$$\lambda\left(\lambda - \frac{2}{5}\mu\right) = 0$$

$\lambda = 0$: напр. вектор $(0,1)$, рівн. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-4}{1}$, $x = 1$.

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5}$: напр. вектор $(2,5)$, рівн. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$, $5x - 5 = 2y - 8$

$$5x - 2y + 3 = 0$$

832. Знайти відстань від пар. $y^2 = 64x$ до $4x + 3y + 46 = 0$.



Найкоротшою буде відстань від точки дотику (x_0, y_0) дотичної, що паралельна даній прямій. Її рівн.

$$y \cdot y_0 = 32(x + x_0) \quad \left(\text{для канон. пар. } y^2 = 2px \text{ це } yy_0 = p(x + x_0)\right)$$

$$32x - y_0 y + 32x_0 = 0.$$

Паралельність $4x + 3y + 46$ разом з умовою належності (x_0, y_0) пар. утворюють систему:

$$\begin{cases} \dfrac{32}{4} = -\dfrac{y_0}{3} \\ y_0^2 = 64 \end{cases}$$

[redacted] x_0

$$y_0 = -24 \Rightarrow x_0 = \frac{(-24)^2}{64} = 9. \text{ Тобто відстань:}$$

$$d = \frac{|4\cdot 9 + 3(-24) + 46|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Знову ж могли шукати дотичну через точки перетину: візьмемо довільну пряму, що $\parallel$ даній:

$$\begin{cases} 4x + 3y + C = 0 \\ y^2 = 64x \end{cases} \qquad x = \frac{y^2}{64}$$

$$\frac{y^2}{16} + 3y + C = 0$$

$$y^2 + 48y + 16C = 0$$

Знову ж, повинен бути один розв'язок, тобто

$$0 = \frac{D}{2} = \sqrt{24^2 - 16C} = 4\sqrt{36 - C}, \quad C = 36, \text{ тобто рівняння:}$$

$$y^2 + 48y + 576 = 0$$

$$(y+24)^2 = 0$$

$$y = -24, \; x = 9.$$

839. Знайти рівняння дотичної до гіп. $xy = C$ у її точці (x_0, y_0).

Можна або скористатися заг. формулою: дотичні до $F(x,y) = 0$ — це $F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$.

тут $F(x,y) = xy - C$, тому $F'_x(x_0,y_0) = y_0$, $F'_y(x_0,y_0) = x_0$:

$$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = 0$$

$$y_0 x + x_0 y - 2C = 0.$$

Або шукати точки перетину з прямими, що прох. через (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ xy = C \end{cases} \qquad (\text{за умови } x_0 y_0 = C)$$

$$(x_0 + \lambda t)(y_0 + \mu t) = C$$

$$\cancel{x_0 y_0} + \lambda y_0 t + \mu x_0 t + \lambda\mu t^2 = \cancel{C}$$

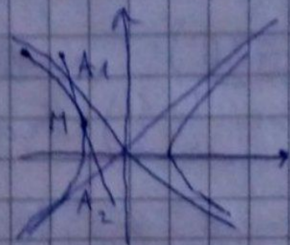
$$\lambda\mu t^2 + (\lambda y_0 + \mu x_0)t = 0.$$

Тут розв'язок єдиний $\Leftrightarrow$ $\lambda y_0 + \mu x_0 = 0$, тобто (з точністю до множення на коеф.) $\lambda = x_0$, $\mu = -y_0$. Рівн.:

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0}$$

$$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = 0, \quad y_0 x + x_0 y - 2C = 0.$$

841. Довести, що відрізок A_1A_2 дотичної до гіперболи у M, де A_1, A_2 – точки перетину з асимптотами, ділиться M навпіл: $MA_1 = MA_2$.

Канон. гіпербола: 

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дотична у $M(x_0, y_0)$ і асимптоти:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \pm\frac{b}{a}x \end{array}\right.$$

$$\frac{xx_0}{a^2} \mp \frac{b}{a}x \cdot \frac{y_0}{b^2} = 1.$$

$$x\left(\frac{x_0}{a^2} \mp \frac{y_0}{ab}\right) = 1.$$

$$x\,\frac{bx_0 \mp ay_0}{a^2b} = 1$$

$x = \dfrac{a^2b}{bx_0 \mp ay_0}$, $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \dfrac{ab^2}{-ay_0 \pm bx_0}$ – коорд. A_1, A_2.

Середина A_1A_2: $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0} + \frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{bx_0 - ay_0} + \frac{ab^2}{-bx_0 - ay_0}\right)\right) =$

$= \left(\frac{a^2b}{2}\,\frac{bx_0 + ay_0 + bx_0 - ay_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}, \frac{ab^2}{2}\,\frac{-bx_0 - ay_0 + bx_0 - ay_0}{a^2y_0^2 - b^2x_0^2}\right) = \left[\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow\right.$

$\left.\Rightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2\right] = \left(\frac{a^2b}{2}\,\frac{2bx_0}{a^2b^2}, \frac{ab^2}{2}\,\frac{-2ay_0}{-a^2b^2}\right) = (x_0, y_0) = M.$

848. Знайти умови дотику прямої $Ax + By + C = 0$ і

1) еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Дотична $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$ збігається з

$$Ax + By + C = 0:$$

$$\frac{x_0}{a^2A} = \frac{y_0}{b^2B} = -\frac{1}{C}$$

$x_0 = -\dfrac{a^2A}{C}$, $y_0 = -\dfrac{b^2B}{C}$, $(x_0, y_0) \in$ еліпсу:

$\dfrac{1}{a^2}\left(-\dfrac{a^2A}{C}\right)^2 + \dfrac{1}{b^2}\left(-\dfrac{b^2B}{C}\right)^2 = 1$ Домножимо на C^2:

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$$

2) гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Дослівно так же: $\dfrac{x_0}{a^2A} = -\dfrac{y_0}{b^2B} =$

$= -\dfrac{1}{C}$, $x_0 = -\dfrac{a^2A}{C}$, $y_0 = \dfrac{b^2B}{C}$, підставляємо:

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$$

3) параболи $y^2 = 2px$. Дотична: $yy_0 = p(x + x_0)$, тобто
$px - y_0 y + px_0 = 0$ співп. з
$Ax + By + C = 0$:
$\frac{p}{A} = -\frac{y_0}{B} = \frac{px_0}{C}$; $x_0 = \frac{C}{A}$, $y_0 = -\frac{pB}{A}$. $y_0^2 = 2px_0$:
$\left(-\frac{pB}{A}\right)^2 = 2p\frac{C}{A}$. Домн. на A^2:
$pB^2 = 2AC$.

844. Знайти рівн. гіперболи з асимптотами $y = \pm\frac{x}{2}$ і дотичною $5x - 6y - 8 = 0$.

З вигляду асимптот гіп. канонічна: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, і асимпт. $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $a = 2b$. Умова 848(2) (з урахуванням того, що права частина рівн. $-\pm 1$):
$a^2A^2 - b^2B^2 = \pm C^2$
Підставимо $A = 5$, $B = -6$, $C = -8$:
$25a^2 - 36b^2 = \pm 64$.
$a = 2b$: $100b^2 - 36b^2 = \pm 64$.
$64b^2 = \pm 64$.
Тобто повинен бути $+$, і $b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4$. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

849. Знайти рівн. еліпса з фокусами $(\pm 3, 0)$ і дотичною $x + y - 5 = 0$.

З вигляду фокусів, еліпс канонічний: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.
$3 = c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a^2 = 9 + b^2$. Умова 848(1):
$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$
$A = B = 1$, $C = -5$:
$a^2 + b^2 = 25$
$9 + 2b^2 = 25$
$b^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 17$
$\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

851. Знайти спільні дотичні еліпсів $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ і $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

Знову ж з 848(1): для дотичної $Ax+By+C=0$

$$\begin{cases} 5A^2+4B^2=C^2 \\ 4A^2+5B^2=C^2 \end{cases}$$

$A^2-B^2=0$, $C^2=5A^2+4B^2=9A^2$.

Оскільки A, B, C – з точністю до множ. на число: $A^2=B^2=1$, $C^2=9$.

$A=\pm 1$, $B=\pm 1$, $C=\pm 3$: $\pm x \pm y \pm 3 = 0$. Тобто це 4 прямі:

$x+y+3=0$, $x+y-3=0$, $x-y+3=0$, $x-y-3=0$.