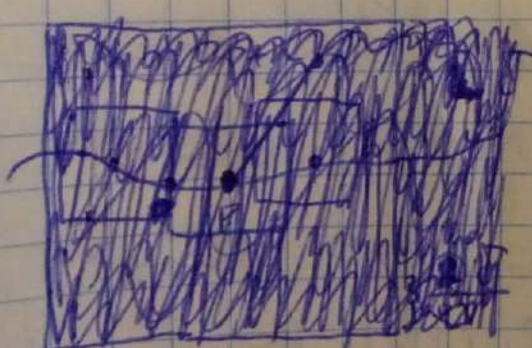
міри 0.

3. Доведемо, що $\exists\, k : F(C_k)$ - міри 0.

$\forall\, p \in C_k$ із ф-ли Тейлора випливає (для евкл. норм):

$$|F(p+h) - F(p)| \leq L\,|h|^{k+1}$$

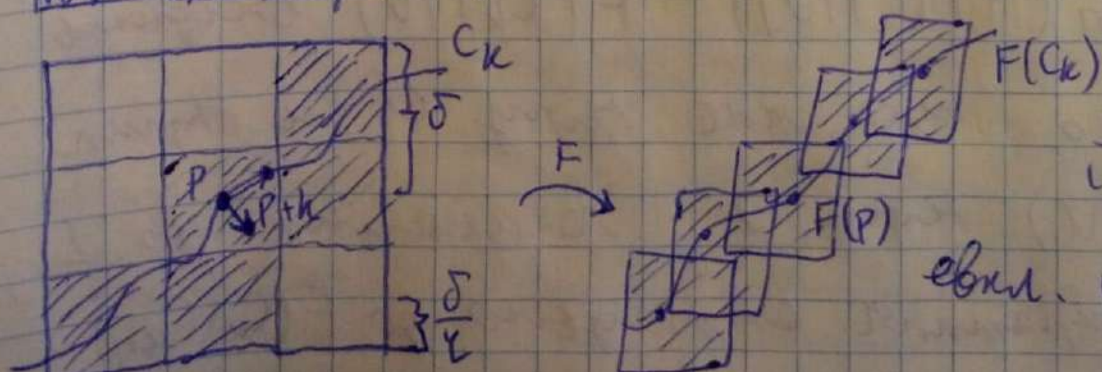
зокрема для дост. малих h: $|h| < \sqrt{m}\,\delta$, тобто для точок $p+h$ з куба з центром p і ребром 2δ. $\forall\, q \in \mathbb{N}$ покриємо C_k кубиками з ребром $\frac{2\delta}{q}$ (їх $\leq q^m$ у вихідному кубі).



Тепер $|h| < \sqrt{m}\,\frac{\delta}{q}$, і

$$|F(p+h) - F(p)| \leq \frac{L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}}{q^{k+1}}$$

Тобто образ кожного кубіка міститься у



кубі з центром $F(p)$ і ребром $\frac{2L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}}{q^{k+1}}$, $2L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1} =: a$

евкл. об'єму $a^n q^{-n(k+1)}$.

Їх загальний об'єм $\leq a^n r^{m-n(k+1)}$. Якщо $m-n(k+1)<0$, це $\to 0$ при $r \to +\infty$. Тобто образ частини C_k, що міститься у кубі зі стороною 2δ, має міру 0. Оскільки C_k можна покрити $\leq$ злічен. кількістю таких кубів, $F(C_k)$ - міри 0.

<u>1.</u> - <u>3.</u> разом і дають, що $F(C)$ - міри 0. ▲

<u>Rem.</u> Для доведення <u>Cor.</u> з $\dim M < \dim N$ і $F \in C^k(M,N)$, $k \geq 1$ достатньо лише кроку <u>3.</u> вище, застосованого до $\underbrace{C = M}_{(C=U\subset\mathbb{R}^m)}$ замість C_k (і формально $k=0$: у цьому випадку $m-n(k+1)=m-n<0$ вже); для цієї ф-ли Тейлора достатньо гладкості 1.

<u>Впр.</u> Якої гладкості достатньо для справедливості <u>Тм</u> Сарда у загальному випадку?

<u>Rem.</u> Як ми бачили, для <u>Тм</u> Уітні достатньо лише цього

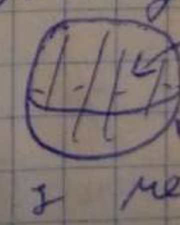
Наведемо приклад застосування більш загального випадку Тм. Сарда (але для многовидів з межею).

def. n-вимірним многовидом з межею ($n \in \mathbb{N}$) зветься хаусд. топ. простір M з $\leq$ злічен. базою такий, що $\forall\, p \in M$

- або $\exists$ відкр. $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$
- або $\exists$ відкр. $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \geq 0\}$, і $\varphi(p) \in \{x^1 = 0\}$.

Rem. У другому випадку кажуть, що p належить до межі ∂M многовиду M.

Для многовидів з межею визначені поняття гл. структури, гл. відображень etc. При цьому ∂M — (гладкий) $(n-1)$-вимірний многовид.



$\mathcal{D}^n$

$\partial \mathcal{D}^n = S^{n-1}$

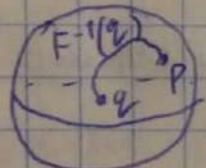
Ex. $\mathbb{R}^n_+$, куля $\mathcal{D}^n$ — ∞-гладкі мн. з межею.

Th (гладка теорема про барабан).

$\nexists$ гладкої ретракції $F \in C^\infty(\mathcal{D}^n, S^{n-1})$ (тобто такого F, що $\forall p \in S^{n-1}$ $F(p) = p$).

$\triangleright$ Ідея: Н/П $\exists$ таке F. **Th** Сарда $\Rightarrow$ $\exists$ регулярне значення $q \in S^{n-1}$ ($q \in F(\mathcal{D}^n) = S^{n-1}$, бо це ретракція).

Тоді з теореми про прообраз рег. значення, $F^{-1}(q)$ –

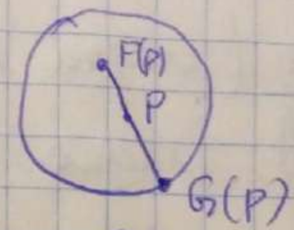


1-вимірний вкладений підмноговид з межею у $\mathcal{D}^n$ (причому його межа лежить у $\partial \mathcal{D}^n = S^{n-1}$).

Для таких мн. є аналог **Th** класифікації зв. 1-вим. многовидів (за якою зв'язні диф-ні $\mathbb{R}$ або S^1). Зокрема, зв. компонента $q \in F^{-1}(q)$ – дуга (криволінійний відрізок), що з'єднує q і $p \in S^{n-1}$, $p \neq q$. Але $p \in F^{-1}(q) \Rightarrow q = F(p) = p$ $\lightning$ $\triangleleft$

Сл. (гладка теорема Брауера)

$\forall F \in C^\infty(\mathcal{D}^n, \mathcal{D}^n)$ $\exists p : F(p) = p$.

⊳ ↗ $\forall p$ $F(p) \neq p$. Тоді можна побудувати 

гл. ретракцію $G \in C^\infty(\mathcal{D}^n, S^{n-1})$, провівши
$\forall p$ промінь з $F(p)$ через p до перетину $G(p)$ з S^{n-1} ⊲

<u>Rem.</u> Версії цих <u>Th.</u> нижчої гладкості (у т.ч. неперервні) можна вивести з гладких за допомогою техніки згладжування.

<u>Pr.</u> Нехай M і N — k-гл. многовиди. Сукупність підмножин вигляду

$$\left\{F \in C^k(M,N) \;\middle|\; \frac{\partial^l}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_l}} (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(K) \subset W\right\}$$

для усіх можливих пар карт (U,φ), (V,ψ), пар з компактної $K \subset \varphi(\overset{\cap F^{-1}(V)}{U})$ і відкритої $W \subset \psi(F(U \cap F^{-1}(V)))$ і частинних похідних з $l \leq k$, утворює предбазу деякої топології на $C^k(M,N)$.

⊳ Див., наприклад, Рохлин, Фукс, Нач. курс топології, як і доведення теорем пізніше. $\blacktriangle$

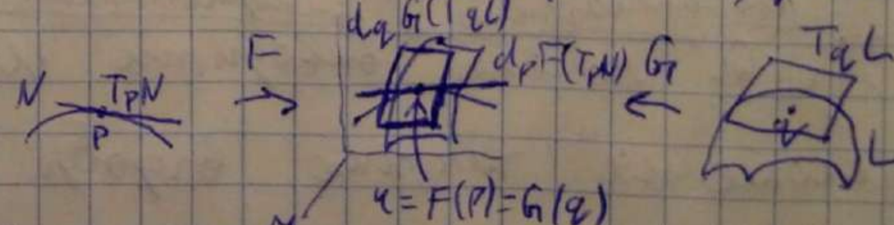
<u>Th.</u> (про згладжування)

Якщо M і N — ℓ-гладкі і компактні мн., то $\forall\ 0 \le k \le \ell \le \infty$ $C^\ell(M,N)$ всюди щільна у $C^k(M,N)$ (з топологіями з минулого <u>Рм.</u>, причому на C^ℓ ця топ. збігається з індукованою з C^k).

<u>Rem.</u> Ідея полягає у використанні апроксимації гл. ф-цій поліномами за Веєрштрассом.

<u>Def.</u> Нехай M, N, L — ∞-гл. многовиди. Відображення $F \in C^\infty(N, M)$ і $G \in C^\infty(L, M)$ звуться трансверсальними, якщо $\forall\ p \in N, q \in L$ таких, що $F(p) = G(q) = \psi \in M$

$$T_\psi M = d_p F(T_p N) + d_q G(T_q L).$$



<u>Rem.</u> Зокрема, при $\dim N + \dim L < \dim M$ ця умова означає, що таких точок немає, тобто $F(N) \cap G(L) = \varnothing$.

Наступна теорема доводиться за допомогою Th. Сарда:

Th. (про трансверсалізацію)

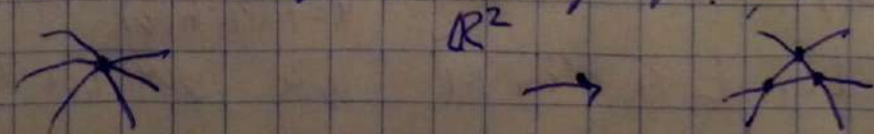
Нехай $F \in C^\infty(N, M)$ (зокрема, коли це підмноговид у M). Тоді $\forall L$ множина трансверсальних до F відображень всюди щільна у $C^\infty(L, M)$ (з топологією з Pr.).

Rem. Це означає, що нетрансверсальне відображення завжди можна малою деформацією перевести у трансверс.:

Є утоми

або аналогічно (трансверс) з використанням Th. Сарда

Звідти можна виводити й інші результати про "загальне положення" гладких відобр., наприклад:



потрійний перетин

Дотичне розшарування

Наступна конструкція знадобиться нам як для завершення доведення теореми Уітні, так і для подальшого вивчення гладких (під)многовидів. Нехай M – k-гладкий многовид, де $k \geqslant 1$, $\dim M = n$.

def. Дотичним розшаруванням M зветься

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\},$$

тобто (формальне) об'єднання дотичних просторів у всіх точках M.

Rem. Для кожної $p \in M$ існує (U, φ) – карта M така, що $p \in U$. Введемо канонічну проєкцію $\pi \colon TM \to$

$M\colon (p,v) \mapsto p$. Тоді

$$\pi^{-1}(U) = \{(p,v) \in TM \mid p \in U\}.$$

Нехай $(x^1, \ldots, x^n)$ – локальні координати, що відповідають (U, φ). Побудуємо

$$\psi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}:$$

$$\left(p, v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mapsto (\underbrace{x^1(p), \ldots, x^n(p)}_{\varphi(p)}, v^1, \ldots, v^n).$$

Це схоже на карту (зокрема, це бієкція). Що буде аналогами відображень переходу для таких ''карт''?

Отже, нехай $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) – карти M такі, що $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$, $(x^1_\beta, \ldots, x^n_\beta)$ – відповідні локальні координати. Побудуємо $\psi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n}$ і $\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to \mathbb{R}^{2n}$ як вище.

Зауважимо, що

$$\psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

є відкритою підмножиною $\mathbb{R}^{2n}$, і аналогічно для

$$\psi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n.$$

Відображення переходу діє таким чином з $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ у $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$:

$$\psi_\beta \circ {\psi_\alpha}^{-1}(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) =$$

$$= \psi_\beta \left({\varphi_\alpha}^{-1}(x^1, \ldots, x^n), v^i \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} \right) =$$

Використаємо відоме нам правило перетворення координат вектора:

$$= \psi_\beta \left({\varphi_\alpha}^{-1}(x^1, \dots, x^n), v^i \frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j_\beta} \right) =$$

$$= \Bigg((\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1})(x^1, \dots, x^n), v^i \frac{\partial x^1_\beta}{\partial x^i_\alpha}(x^1, \dots, x^n), \dots$$

$$\dots, v^i \frac{\partial x^n_\beta}{\partial x^i_\alpha}(x^1, \dots, x^n) \Bigg).$$

Це відображення $(k-1)$-гладке, як і повинно бути для відображень переходу. Але чи задовольняє TM означення многовида?

Впр.1. Топологію на TM можна ввести наступним чином. Нехай $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ – атлас M (з k-гладкої структури). Скажемо, що $W \subset TM$ – відкрита, якщо для кожного $\alpha \in A$ $\psi_\alpha(W \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ відкрита у $\mathbb{R}^{2n}$. Простір TM з такою топологією хаусдорфовий і має не більш ніж зліченну базу.

2. У позначеннях вище тоді $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ – атлас, що задає на TM структуру $(k-1)$-гладкого $2n$-вимірного многовида.

3. Ця структура не залежить від вибору початкового атласу M, а лише від гладкої структури M.

Ex. Існує природне ототожнення (і ∞-дифеоморфізм) $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, оскільки на $\mathbb{R}^n$ координати глобальні:

$$\left((x^1, \ldots, x^n), v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n).$$

Аналогічно, для відкритих $U \subset \mathbb{R}^n$ TU ототожнюється з $U \times \mathbb{R}^n$.

<u>Rem.</u> Взагалі кажучи, TM не гомеоморфне прямому добутку M на $\mathbb{R}^n$. Це приклад більш складної топологічної конструкції – векторного розшарування. Детальніше див., наприклад, у М.М. Постников, Лекции по геометрии, семестр IV; або А.С. Мищенко, Векторные расслоения и их применения.

<u>def.</u> Векторним полем на M зветься відображення $X\colon M \to TM$ таке, що $\pi \circ X = id_M$.

<u>Rem.</u> Тобто для кожної $p \in M$ $p \mapsto X_p \in T_pM$.

Rem. У локальних координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ на $U \subset M$ для кожної точки $p \in U$ розкладемо за локальним базисом: $X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$; отримуємо таким чином функції $X^1, \ldots, X^n \colon U \to \mathbb{R}$. Далі у таких випадках будемо записувати $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ на U.

Тоді у відповідній парі карт (тобто коли ми будуємо карту TM за картою M як вище) локальне задання X має вигляд:

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n,$$

$$X^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n)).$$

Точніше, тут через X^i позначені композиції цих функцій з оберненим координатним відображенням відповідної карти.

<u>Cor.</u> Векторне поле X на k-гладкому M l-гладке (де $0 \leqslant l \leqslant k-1$) тоді й тільки тоді, коли для будь-яких локальних координат $(x^1 \ldots, x^n)$, що задані на координатному околі $U \subset M$, якщо $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на U, то $X^i \in C^l(U)$ для всіх $i = \overline{1, n}$.

<u>Rem.</u> Позначимо через $\mathcal{X}^l(M)$ множину l-гладких векторних полів на M.

<u>Rem.</u> $\mathcal{X}^l(M)$ – векторний простір над $\mathbb{R}$ (нескінченновимірний) та модуль над кільцем функцій $C^l(M)$, бо можна ввести лінійні операції над полями наступним чином:

$$(\lambda X + \mu Y)_p := \lambda X_p + \mu Y_p,$$

$$(fX + gY)_p := f(p)X_p + g(p)Y_p$$

для $X, Y \in \mathcal{X}^l(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^l(M)$.

Впр. Перевірити це.

def. Похідною функцій у напрямку векторного поля $X \in \mathcal{X}^l(M)$ зветься відображення

$$X\colon C^k(M) \to C^l(M)\colon f \mapsto X(f)\colon X(f)(p) := X_p(f).$$

Rem. Локально у позначеннях, що вводилися вище, якщо $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ (зокрема, це дійсно функція з $C^l(M)$). Зауважимо, що тоді $X^i = X(x^i)$ для всіх $i = \overline{1, n}$ (де, щоправда, i-та координатна функція x^i визначена лише локально).

Впр. Поле X однозначно визначається своєю дією на функції.

def. Нехай $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ (де тепер $k \geqslant 2$). Їх дужкою Лі зветься $[X, Y] \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$ таке, що

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

для будь-якої функції $f \in C^k(M)$.

Rem. У локальних координатах: нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ і нехай $[X, Y] = [X, Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тоді для будь-якого $i = \overline{1, n}$:

$$[X, Y]^i = [X, Y](x^i) = X(Y(x^i)) - Y(X(x^i)) =$$

$$= X(Y^i) - Y(X^i) = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

З цього, зокрема, можна вивести коректність означення $[X, Y]$ і його гладкість.

Ex. $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$.

Pr. (властивості дужки Лі). Для будь-яких $X, Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^k(M)$:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (антисиметричність, зокрема, маємо $[X, X] = 0$);

2. $[X+Y, Z] = [X, Z]+[Y, Z]$; $[X, Y+Z] = [X, Y]+[X, Z]$;

3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ (зокрема, $[\lambda X, \mu Y] = \lambda\mu[X, Y]$, тому маємо лінійність над $\mathbb{R}$);

4. $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (тотожність Якобі, тут $k \geqslant 3$).

► Впр. ◄

Rem. Розглянемо m-лінійні форми на T_pM, $p \in M$, тобто відображення $\alpha\colon \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{m} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\alpha(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu w_i, v_{i+1}, \ldots, v_m) =$$

$$= \lambda\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) + \mu\alpha(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_m)$$

для будь-яких $i = \overline{1,m}$, $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_m \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Вони утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$. Позначимо його через T_pM^m (зокрема, $T_pM^1 =$

T_pM^* – спряжений простір лінійних функціоналів на T_pM).

<u>Впр.</u> Побудувати на $TM^m := \bigcup\limits_{p\in M} T_pM^m$ структуру $(k-1)$-гладкого многовиду аналогічно до TM. Якою є його вимірність?

<u>Rem.</u> Це ще один приклад векторного розшарування! Воно інколи називається розшаруванням m-форм на M.

<u>def.</u> m-формою на M зветься $\alpha\colon M \to TM^m$ таке, що $\pi \circ \alpha = id_M$.

Rem. Тобто кожна $p \in M$ відображається у $\alpha_p \in T_pM^m$. Локально для координат $(x^1, \dots, x^n)$ на U позначимо для кожної $p \in U$

$$\alpha_{i_1 \dots i_m}(p) := \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \right) \in \mathbb{R}$$

для будь-яких $i_1, \dots, i_m = \overline{1, n}$. Отримаємо тоді набір функцій

$$\left\{ \alpha_{i_1 \dots i_m} \colon U \to \mathbb{R} \right\}_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n}.$$

Впр. m-форма α – l-гладка (як відображення $M \to TM^m$) тоді й тільки тоді, коли для будь-яких локальних координат, що задані на околі U, відповідні коефіцієнти $\alpha_{i_1 \dots i_m} \in C^l(U)$ для будь-яких $i_1, \dots, i_m = \overline{1, n}$ (тут знову $0 \leqslant l \leqslant k - 1$).

Rem. В силу полілінійності, якщо $v_1, \ldots, v_m \in T_pM$ і для кожного $i = \overline{1, m}$ $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, то

$$\alpha_p(v_1, \ldots, v_m) = \alpha_p \left(v_1^{i_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, v_m^{i_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_m}} \right) =$$

$$= v_1^{i_1} \ldots v_m^{i_m} \alpha_{i_1 \ldots i_m}(p).$$

Rem. l-гладкі m-форми утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^l(M)$ аналогічно полям (Впр.).

Rem. Кожна l-гладка m-форма α на M визначає m-лінійне (відносно множення на функції з $C^l(M)$) відображення

$$\alpha\colon \underbrace{\mathcal{X}^l(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^l(M)}_{m} \to C^l(M):$$

$$\alpha(X_1, \ldots, X_m)(p) := \alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_m)_p).$$

Полілінійність тут випливає з відповідної властивості форм у точках.

Впр. Це відображення однозначно визначає α.

Rem. У локальних координатах: нехай $X_i = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ для $i = \overline{1, m}$ і $\{\alpha_{i_1 \ldots i_m}\}$ – коефіцієнти α. Тоді з виразу вище для кожної точки випливає

$$\alpha(X_1, \ldots, X_m) = X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m} \alpha_{i_1 \ldots i_m}.$$

Зокрема, це дійсно l-гладка функція.

Ex.1. Диференціал функції: згадаємо, що для $f \in C^l(M)$ (тут $1 \leqslant l \leqslant k$) і для кожної $p \in M$ $d_p f \colon T_p M \to$

$\mathbb{R}$ – лінійне, тобто $d_p f \in T_pM^* = T_pM^1$. Визначимо $df : p \mapsto d_p f$. Очевидно, це 1-форма. Локально: $d_p f(v) = v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, тобто коефіцієнти $(d_p f)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. Інакше кажучи, $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) d_p x^i$, де $d_p x^i$ – диференціали координатних функцій: $d_p x^i(v) = v(x^i) = v^i$. Тоді на координатному околі U: $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Зокрема, df – $(l-1)$-гладка.

2.Ріманова метрика: 2-форма g на M (скажімо, максимальної гладкості $k-1$), яка

– симетрична: $g(X, Y) = g(Y, X)$ для будь-яких X, Y (що еквівалентне $g_{ij} = g_{ji}$ для будь-яких i, j);

– додатно визначена: $g_p(v, v) > 0$ для всіх $p \in M$ і $0 \neq v \in T_pM$.

Інакше кажучи, g_p – скалярний добуток на T_pM для кожної $p \in M$.

Впр. Як змінюються коефіцієнти m-форми при заміні координат?