Задача 0.1. **З**найдіть формулу для обчислення кривини довільної (класу C^2) явно заданої кривої $y=F(x)$.

Застосуйте знайдену формулу для обчислення кривини наступних явно заданих кривих:

1) $y=\sin x$,

2) $y = \mathrm{tg}\, x$

3) $y = x^2$

4) $y = x^3$

5) $y = \ln x$

Проаналізуйте, в яких точках на кривій: 1) кривина обертається в нуль, 2) кривина приймає максимальне значення. 2) кривина приймає мінімальне значення.

Розв'язання. Розглянемо загальну явно задану криву на площині:

$$y = F(x).$$

Запишемо радіус-вектор кривої:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ F(t) \end{pmatrix}$$

Обчислимо першу та другу похідну радіус-вектора кривої:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ F' \end{pmatrix} \quad , \qquad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ F'' \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{1+(F')^2} \ , \quad \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ F' & F'' \end{vmatrix} = F''$$

Обчислюємо кривину:

$$k = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^3} = \frac{|F''|}{(1+(F')^2)^{3/2}}$$

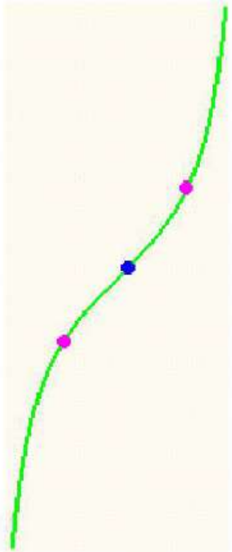
Застосуємо цю формулу:

1) $y=\sin x$,

$$k=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$$

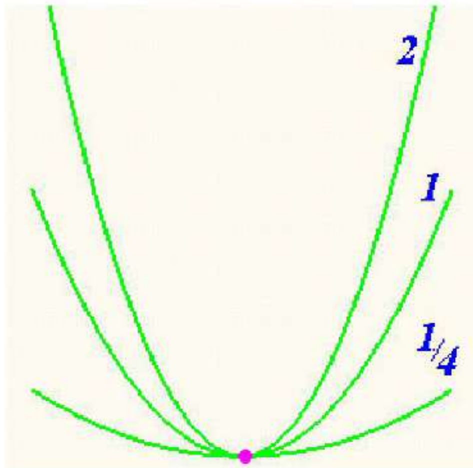
2) $y=\operatorname{tg} x$

$$k=\frac{2|\sin x\cos^3 x|}{(1+\cos^4 x)^{3/2}}$$



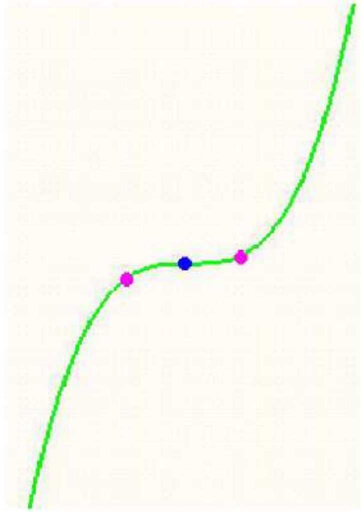
3) $y=C\,x^2$

$$k=\frac{2C}{(1+4C^2x^2)^{3/2}}$$



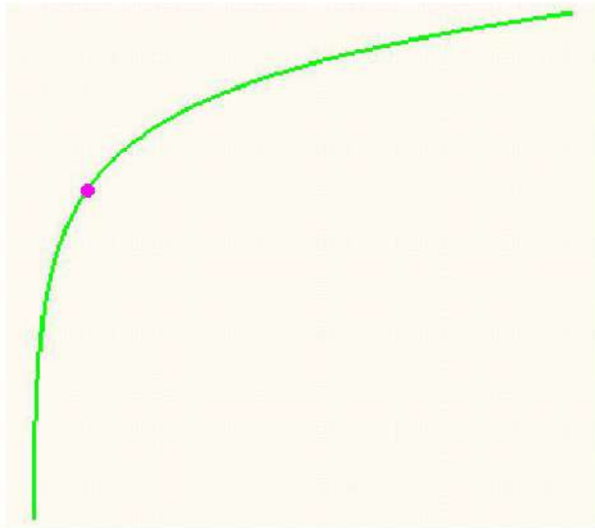
4) $y = x^3$

$$k = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$$



5) $y = \ln x$

$$k = \frac{|x|}{(1+x^2)^{3/2}}$$



Задача 0.2. Обчисліть кривину наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t = \ln 2)$

2) $\begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t + \tanh t) \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $P(t = t_0)$

3) $\begin{cases} x^1 = e^{at} \cos t \\ x^2 = e^{at} \sin t \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$

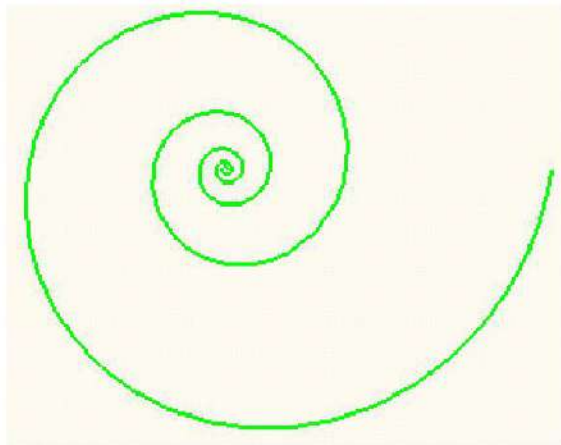
Намалюйте криві та спробуйте, дивлячись на малюнок, висловити гіпотези стосовно точок нульової кривини, точок максимальної кривини, точок мінімальної кривини на кожній з кривих. Підтвердіть або спростуйте гіпотези, проаналізувавши отримані функції кривини.

Розв'язання 3). Маємо

$$\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} e^{at}\cos t \\ e^{at}\sin t \end{pmatrix},\ \vec{f}'=\begin{pmatrix} e^{at}(a\cos t-\sin t) \\ e^{at}(a\sin t+\cos t) \end{pmatrix},\ \ \vec{f}''=\begin{pmatrix} e^{at}((a^2-1)\cos t-2a\sin t) \\ e^{at}((a^2-1)\sin t+2a\cos t) \end{pmatrix},$$

$$|\vec{f}'|=\sqrt{a^2+1}\,e^{at}$$

$$[\vec{f}',\vec{f}'']=\begin{vmatrix} e^{at}(a\cos t-\sin t) & e^{at}((a^2-1)\cos t-2a\sin t) \\ e^{at}(a\sin t+\cos t) & e^{at}((a^2-1)\sin t+2a\cos t) \end{vmatrix}=e^{2at}(a^2+1)$$



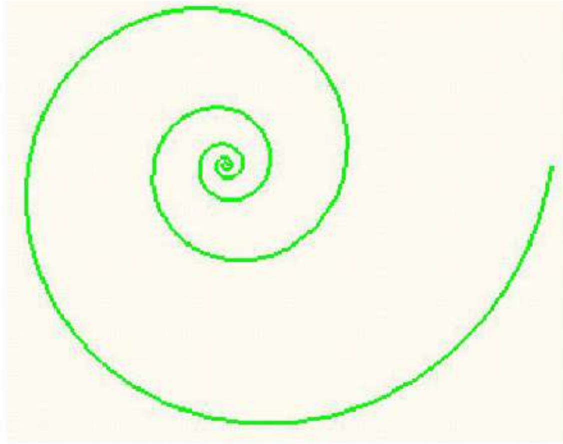
$$k=\frac{|[\vec{f}',\vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3}=\frac{e^{2at}(a^2+1)}{(\sqrt{a^2+1}\,e^{at})^3}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}\,e^{at}}$$

Відповідь: $k=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\,e^{at}}$

Додаток.

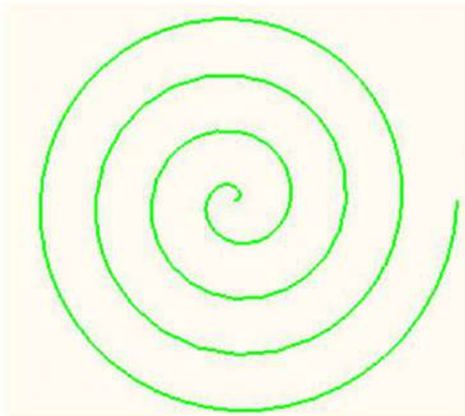
Логаріфмічна спіраль

$$\begin{cases} x^1 = e^{at} \cos t \\ x^2 = e^{at} \sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



Спіраль Архімеда

$$\begin{cases} x^1 = at \cos t \\ x^2 = at \sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$



Узагальнена спіраль

$$\begin{cases} x^1 = \rho(t) \cos t \\ x^2 = \rho(t) \sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

????

Задача 0.3. Розглянемо наступну кривої γ в тримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) \\ x^2 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) \quad , \; t \in (-\infty, +\infty). \\ \qquad x^3 = r \cdot \sin(\alpha t) \end{cases}$$

Проаналізуйте, в залежності від значень додатних параметрів c, r, α і β, коли радіус-вектор кривої γ є періодичною вектор функцією, а крива γ є замкнутою.

Обчисліть натуральний параметр s на кривій γ, який відраховується відточки $P(t=0)$.

Обчисліть кривину та скрут кривої γ в точці $P(t=0)$.

* Чи може задана крива γ бути плоскою при якихось значеннях додатних параметрів c, r, α і β ?

Спробуйте намалювати криву γ при якихось конкретних значеннях c, r, α і β.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) \\ (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) \\ r \cdot \sin(\alpha t) \end{pmatrix}$$

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є періодичною з періодом *T*, якщо

$$\alpha T = 2\pi\, m, \quad \beta T = 2\pi n$$

для деяких цілих *m, n*.

Існування такого періоду *T* еквівалентно тому, що параметри α і β задовольняють $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$ для деяких цілих *m, n*, тобто відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ є раціональним.

Обчислимо першу похідну радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} (-r\alpha \sin(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) - \beta(c + r\cos(\alpha t)) \sin(\beta t) \\ (-r\alpha \sin(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) + \beta(c + r\cos(\alpha t)) \cos(\beta t) \\ r\alpha \cos(\alpha t) \end{pmatrix}$$

Маємо: $$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{\beta^2 (c + r \cdot \cos(\alpha t))^2 + r^2 \alpha^2}$$

Обчислимо першу, другу та третю похідні радіус-вектора в точці P:

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ (c+r)\beta \\ r\alpha \end{pmatrix},\quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0)=\begin{pmatrix} -r(\alpha^2+\beta^2)-c\beta^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ -r(3\alpha^2\beta+\beta^3)-c\beta^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$|\frac{d\vec{f}}{dt}(0)|=\sqrt{b^2(c+r)^2+r^2a^2}$$

$$[\frac{d\vec{f}}{dt}(0),\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0)]|=\sqrt{\beta^2(c+r)^2+r^2a^2}\,(\beta^2(c+r)+r\alpha^2)$$

$$(\frac{d\vec{f}}{dt}(0),\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(0),\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}(0))=\ r\alpha\beta\,(\beta^2(c+r)+(2r-c)a^2)\,(\beta^2(c+r)+r\alpha^2)$$

Обчислюємо натуральний параметр:

$$s = \int_0^t \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_0^t \sqrt{\beta^2 (c + r\cdot\cos(\alpha t))^2 + r^2\alpha^2}\, dt$$

Обчислюємо кривину і скрут в точці $P(t=0)$:

$$k(0) = \frac{|[\vec{f}'(0), \vec{f}''(0)]|}{|\vec{f}'(0)|^3} = \frac{\beta^2(c+r) + r\alpha^2}{\beta^2(c+r)^2 + r^2\alpha^2}$$

$$\kappa(0) = \frac{(\vec{f}'(0), \vec{f}''(0), \vec{f}'''(0))}{|[\vec{f}'(0), \vec{f}''(0)]|^2} = \frac{r\alpha\beta\,(\beta^2(c+r) + (2r-c)a^2)}{(\beta^2(c+r)^2 + r^2a^2)(\beta^2(c+r) + r\alpha^2)}$$

Якщо б крива γ була плоскою, то її скрут $\kappa \equiv 0$. Як наслідок, виконувалась би тотожність

$$\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right) \equiv 0$$

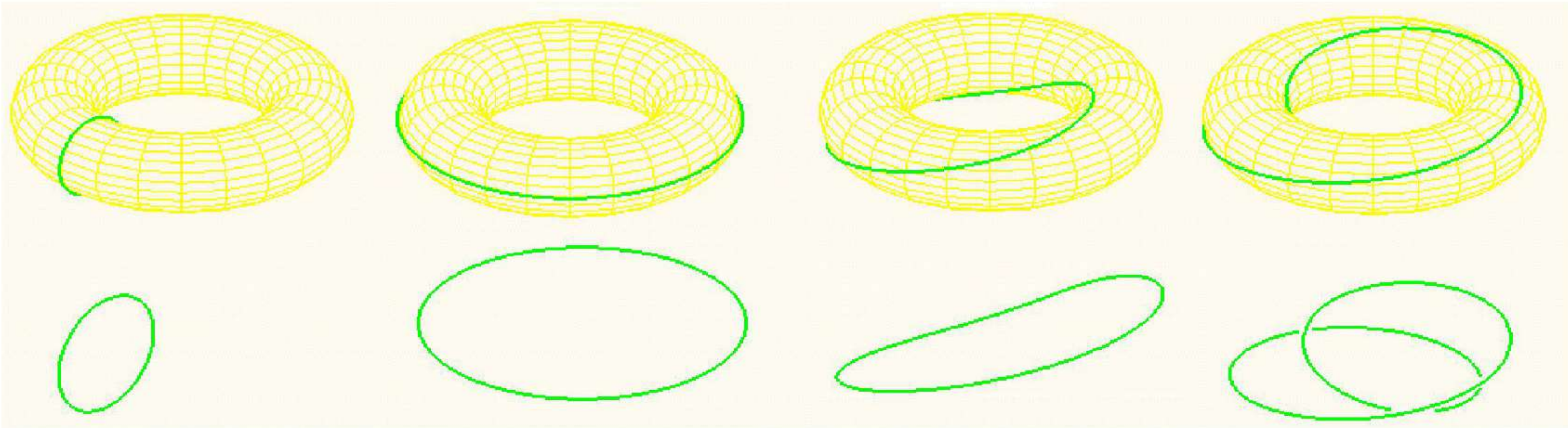
Ця тотожність зводиться до тригонометричної тотожності

$$\alpha\beta(A_0 + A_1\cos\alpha t + A_2\cos 2\alpha t + A_3\cos 3\alpha t) \equiv 0$$

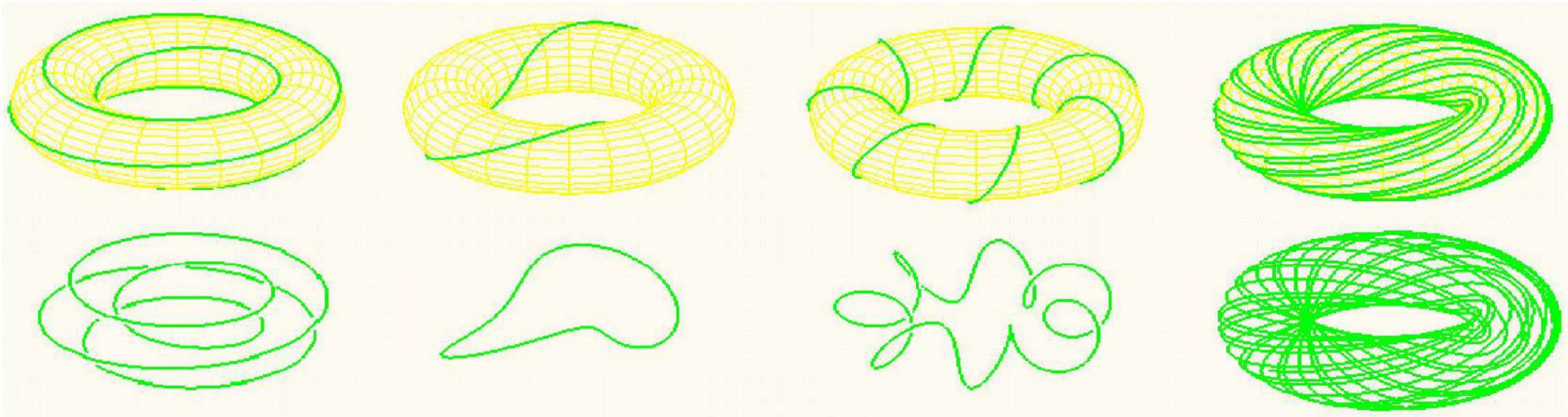
тобто, або $\alpha=0$, або $\beta=0$, або c, r, α і β задовольняють одночасно $A_1=A_2=A_3=A_4=0$.

Приклади:

$\alpha=1,\ \beta=0$ $\alpha=0,\ \beta=1$ $\alpha=1,\ \beta=1$ $\alpha=1,\ \beta=2$



$\alpha=1,\ \beta=4$ $\alpha=2,\ \beta=1$ $\alpha=7,\ \beta=1$ $\alpha=\pi,\ \beta=e$



Задача 0.4. Розглянемо криву γ в тримірному просторі, яка є регулярною класу C^m і не містить точок перегину. Проаналізуйте, якому класу гладкості належать кожне з векторних полей $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ рухомого репера Френе кривої γ, а також функції кривини і скруту кривої γ.

Розв'язання. Крива γ задана радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$ так, що

$$\vec{f}(t) \in C^m.$$

Тоді дотичне векторне поле

$$\vec{\tau} = \frac{1}{|\frac{d\vec{f}}{dt}|}\frac{d\vec{f}}{dt} \in C^{m-1} \quad ,$$

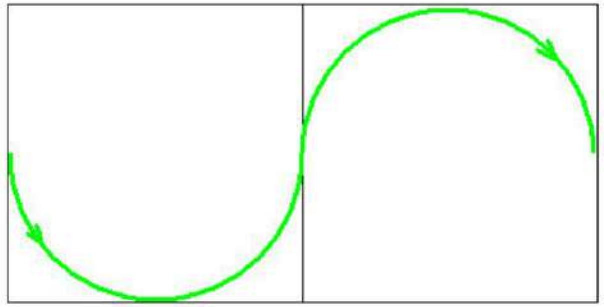
векторні поля головних нормалей і бінормалей

$$\vec{\beta} = \frac{1}{|[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]|}[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \in C^{m-2}, \qquad \vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}] \in C^{m-2} \quad ,$$

кривина і скрут

$$k = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^3} \in C^{m-2}, \qquad \kappa = \frac{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^2}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|^2} \in C^{m-3}$$

Задача-експеримент 0.5. Виріжте з паперу прямокутник, утворений з двох квадратів. В кожний з квадратів впишіть півколо так, щоб вийшла наступна крива Γ:



Перегніть прямокутник вздовж середньої лінії так, що квадрати лежали в перпендикулярних площинах (як пара граней куба).

Розглянемо криву γ, що утворилась з намальованої кривої Γ після перегинання.

Чи є крива γ регулярною? Якщо так, якого класу регулярності є крива γ?

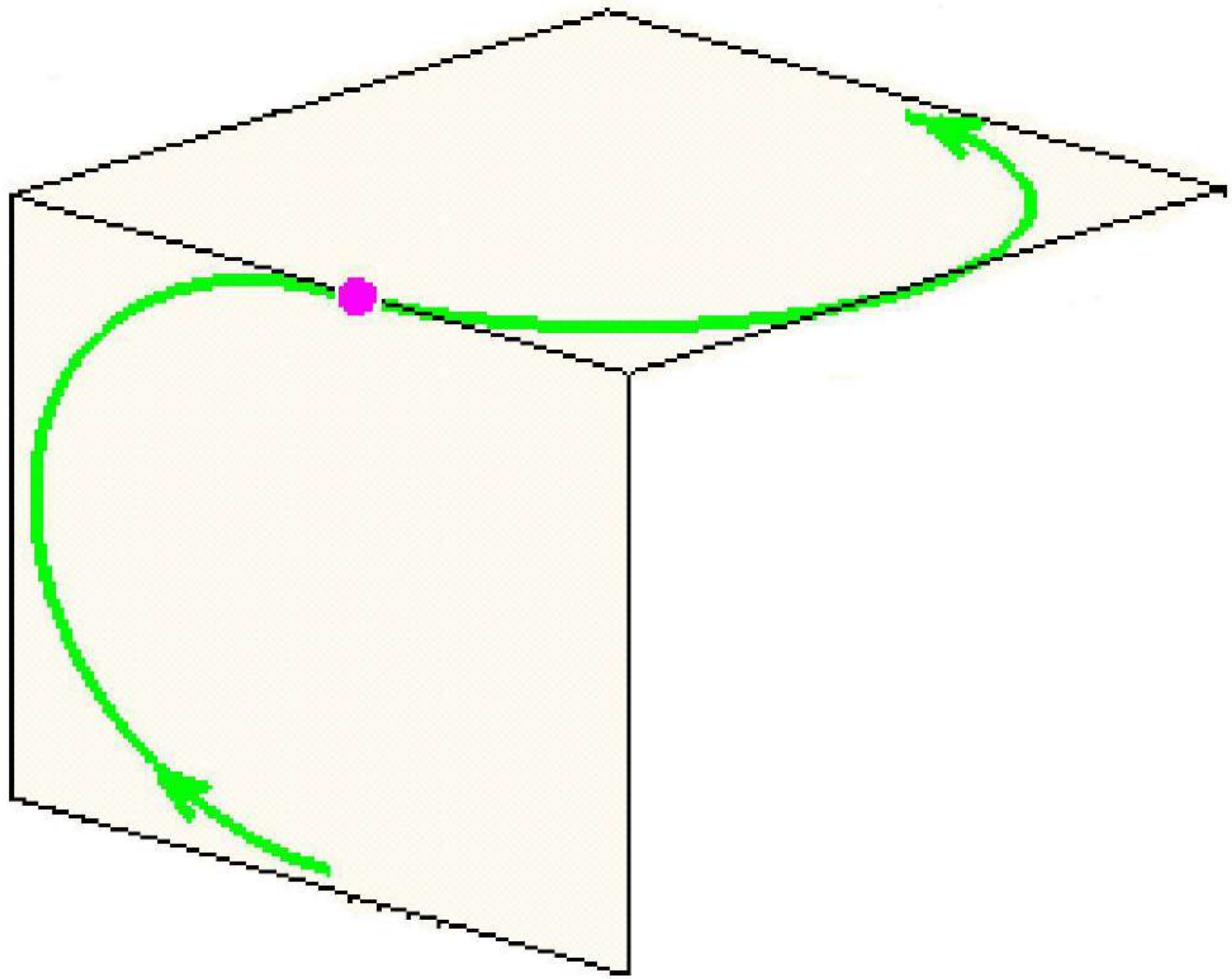
Чи є крива γ плоскою?

Намалюйте дотичне векторне поле $\vec{\tau}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Намалюйте векторне поле головних нормалей $\vec{\nu}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Опишіть векторне поле бінормалей $\vec{\beta}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Чому дорівнюють кривина і скрут кривої γ?



5. $r(t) = \begin{cases} (1+\cos t,\ 0,\ \sin t), & t \in [0,\pi] \\ (0,\ 1+\cos t,\ \sin t), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

$r'(t) = \begin{cases} (-\sin t,\ 0,\ \cos t), & t \in [0,\pi) \\ (0,\ -\sin t,\ \cos t), & t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$, $r''(t) = \begin{cases} (-\cos t,\ 0,\ -\sin t) & \ldots \\ (0,\ -\cos t,\ -\sin t) & \ldots \end{cases}$, $r'''(t) = \begin{cases} (\sin t,\ 0,\ -\cos t) & \ldots \\ (0,\ \sin t,\ -\cos t) & \ldots \end{cases}$

$r'(\pi-0) = (0,0,-1) = r'(\pi+0)$, $r''(\pi-0) = (1,0,0) \neq (0,1,0) = r''(\pi+0)$, $r'''(\pi-0) = (0,0,1)$ $= r'''(\pi+0)$. Пар. натуральний: $\tau(\pi-0) = \tau(\pi+0) = (0,0,-1)$, $\nu(\pi-0) = (1,0,0)$, $\nu(\pi+0) = (0,1,0) \Rightarrow \beta(\pi-0) = (0,-1,0)$, $\beta(\pi+0) = (1,0,0)$ (бо $\beta = [\tau, \nu]$, $\nu = \frac{r''}{|r''|}$, $\tau = r'$)

$k = 1$ на $[0,\pi) \cup (\pi, 2\pi]$ і $\varkappa = 0$ на $[0,\pi) \cup (\pi, 2\pi]$ (бо це півкола)

***Задача 0.6.** Визначимо векторний добуток пари векторів в n-мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1, ..., X^n),\ \vec{Y} = (Y^1, ..., Y^n) \quad \rightarrow \quad [\vec{X}, \vec{Y}] := (p^{12}, p^{13}, p^{14}, ..., p^{n-1n}),$$

де $p^{ij} := \begin{vmatrix} X^i & X^j \\ Y^i & Y^j \end{vmatrix}$, $1 \leq i < j \leq n$.

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N,\ N = C_n^2,$$

має наступні властивості:

1) $[a\vec{X} + b\vec{Y}, \vec{Z}] = a[\vec{X}, \vec{Z}] + b[\vec{Y}, \vec{Z}]$, $[\vec{X}, a\vec{Y} + b\vec{Z}] = a[\vec{X}, \vec{Y}] + b[\vec{X}, \vec{Z}]$

2) $[\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}]$

3) $< [\vec{X}, \vec{Y}], [\vec{Z}, \vec{W}] > = \begin{vmatrix} < \vec{X}, \vec{Z} > & < \vec{X}, \vec{W} > \\ < \vec{Y}, \vec{Z} > & < \vec{Y}, \vec{W} > \end{vmatrix}$

Чому дорівнює векторний добуток колінеарних векторів?

Чому дорівнює $|[\vec{X}, \vec{Y}]|^2$?

Зауваження. У випадку $n=3$, коли N=3 і можемо ототожнити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^N$, в якому порядку треба розставити p^{ij} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток співпадав зі звичайним векторним добутком і, зокрема, задовольняв умові $[\vec{X},\vec{Y}] \perp \vec{X},\vec{Y}$?

Задача відноситься до алгебраїчної теорії *полівекторів*

Рекомендації:

1. Ю.А.Аминов, Дифференциальная геометрия и топология кривых
2. Н.В.Ефимов, Э.Р. Розендорн, Линейная алгебра и многомерная геометрия

Приклад доведення

$$\begin{vmatrix} <\vec{X},\vec{Z}> & <\vec{X},\vec{W}> \\ <\vec{Y},\vec{Z}> & <\vec{Y},\vec{W}> \end{vmatrix} = \sum_i X^i Z^i \sum_j Y^j W^j - \sum_j X^i W^i \sum_i Y^j Z^j =$$

$$= \sum_{i,j} X^i Z^i Y^j W^j - \sum_{i,j} X^i W^i Y^j Z^j =$$

$$= \sum_{i<j} X^i Z^i Y^j W^j - \sum_{i<j} X^i W^i Y^j Z^j + \sum_{i>j} X^i Z^i Y^j W^j - \sum_{i>j} X^i W^i Y^j Z^j =$$

$$= \sum_{k<l} X^k Z^k Y^l W^l - \sum_{k<l} X^k W^k Y^l Z^l + \sum_{l>k} X^l Z^l Y^k W^k - \sum_{l>k} X^l W^l Y^k Z^k =$$

$$= \sum_{k<l} X^k Z^k Y^l W^l - X^k W^k Y^l Z^l + X^l Z^l Y^k W^k - X^l W^l Y^k Z^k =$$

$$= \sum_{k<l} (X^k Y^l - X^l Y^k)(Z^k W^l - W^k Z^l) = <[\vec{X},\vec{Y}],[\vec{Z},\vec{W}]>$$

***Задача 0.7.** Визначимо векторний добуток трійки векторів в n-мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1,\dots,X^n),\ \vec{Y} = (Y^1,\dots,Y^n),\ \vec{Z} = (Z^1,\dots,Z^n) \rightarrow$$

$$(\vec{X},\vec{Y},Z) := (p^{123},\dots,p^{n-2\,n-1\,n}),$$

де $p^{ijk} := \begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k \\ Y^i & Y^j & Y^k \\ Z^i & Z^j & Z^k \end{vmatrix}$, $1 \le i < j < k \le n$.

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N,\ N = C_n^3,$$

має наступні властивості:

1) лінійність по кожному аргументу,

2) якщо переставити місцями аргументи, то векторний добуток або не зміниться, якщо перестановка є парною, або змінить знак, якщо перестановка є непарною.

$$3)\ <[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}],[\vec{U},\vec{V},\vec{W}]>=\begin{vmatrix} <\vec{X},\vec{U}> & <\vec{X},\vec{V}> & <\vec{X},\vec{W}> \\ <\vec{Y},\vec{U}> & <\vec{Y},\vec{V}> & <\vec{Y},\vec{W}> \\ <\vec{Z},\vec{U}> & <\vec{Z},\vec{V}> & <\vec{Z},\vec{W}> \end{vmatrix}$$

Чому дорівнює векторний добуток компланарних векторів?

Чому дорівнює $|[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]|^2$?

Зауваження. У випадку $n=4$, коли $N=4$ і можемо ототожнити $I\!R^n$ і $I\!R^N$, в якому порядку треба розставити p^{ijk} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток задовольняв умові $[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]\perp\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$?

Задача відноситься до алгебраїчної теорії *полівекторів*

Рекомендації:

3. Ю.А.Аминов, Дифференциальная геометрия и топология кривых
4. Н.В.Ефимов, Э.Р. Розендорн, Линейная алгебра и многомерная геометрия

***Задача 0.8.** Обчисліть кривину та скрут наступної кривої γ в чотиримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = A\cdot\cos(\alpha t) \\ x^2 = A\cdot\sin(\alpha t) \\ x^3 = B\cdot\cos(\beta t) \\ x^3 = B\cdot\sin(\beta t) \end{cases}, \quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} A\cos(\alpha t) \\ A\sin(\alpha t) \\ B\cos(\beta t) \\ B\sin(\beta t) \end{pmatrix}$$

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є періодичною з періодом T, якщо

$$\alpha T=2\pi\, m,\quad \beta T=2\pi n$$

для деяких цілих m, n. Це еквівалентно раціональності відношення $\dfrac{\alpha}{\beta}\in Q$

Обчислимо першу, другу та третю похідні радіус-вектора:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -\alpha A\sin(\alpha t) \\ \alpha A\cos(\alpha t) \\ -\beta B\sin(\beta t) \\ \beta B\cos(\beta t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 A\cos(\alpha t) \\ -\alpha^2 A\sin(\alpha t) \\ -\beta^2 B\cos(\beta t) \\ -\beta^2 B\sin(\beta t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d^3\vec{f}}{dt^3} = \begin{pmatrix} \alpha^3 A\sin(\alpha t) \\ -\alpha^3 A\cos(\alpha t) \\ -\beta^3 B\sin(\beta t) \\ -\beta^3 B\cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

Маємо:

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2},$$

$$\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|^2 = \begin{vmatrix} <\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d\vec{f}}{dt}> & <\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}> \\ <\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}> & <\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}> \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 & 0 \\ 0 & A^2\alpha^4 + B^2\beta^4 \end{vmatrix} =$$

$$= (A^2\alpha^2 + B^2\beta^2)(A^2\alpha^4 + B^2\beta^4)$$

$$
\|[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}]\|^2=\begin{vmatrix} <\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d\vec{f}}{dt}> & <\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}> & <\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}> \\ <\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}> & <\frac{d^2\vec{f}}{dt^2},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}> & <\frac{d^2\vec{f}}{dt^2},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}> \\ <\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}> & <\frac{d^2\vec{f}}{dt^2},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}> & <\frac{d^3\vec{f}}{dt^3},\frac{d^3\vec{f}}{dt^3}> \end{vmatrix}=
$$

$$
=\begin{vmatrix} A^2\alpha^2+B^2\beta^2 & 0 & -A^2\alpha^4-B^2\beta^4 \\ 0 & A^2\alpha^4+B^2\beta^4 & 0 \\ -A^2\alpha^4-B^2\beta^4 & 0 & A^2\alpha^6+B^2\beta^6 \end{vmatrix}=
$$

$$
=A^2B^2\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)^2(A^2\alpha^4+B^2\beta^4)
$$

Знаходимо кривину і скрут:

$$k = \frac{\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2}\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}{(\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2})^3} = \frac{\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2}$$

$$\kappa = \frac{|AB\alpha\beta| \cdot |\alpha^2 - \beta^2|}{(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2)\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}$$

Відповідь: $k = \dfrac{\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2}$, $\kappa = \dfrac{|AB\alpha\beta| \cdot |\alpha^2 - \beta^2|}{(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2)\sqrt{A^2\alpha^4 + B^2\beta^4}}$

Задача 1. Знайдіть векторне поле $\vec{w}$ вздовж кривої γ в $\mathbb{R}^3$ таке, що формули Френе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$$
$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}$$
$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}$$

переписуються у вигляді

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = [\vec{w}, \vec{\tau}]$$
$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = [\vec{w}, \vec{\nu}]$$
$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = [\vec{w}, \vec{\beta}]$$

Розв'язання:

Запишемо шукане векторне поле $\vec{w} = \vec{w}(s)$ у вигляді лінійної комбінації векторів реперу Френе:

$$\vec{w} = A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta}$$

Обчислимо потрібні нам векторні добутки

$$[\vec{w}, \vec{\tau}] = [A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta}, \vec{\tau}] = B[\vec{\nu}, \vec{\tau}] + C[\vec{\beta}, \vec{\tau}] = -B\vec{\beta} + C\vec{\nu}$$

$$[\vec{w}, \vec{\nu}] = [A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta}, \vec{\nu}] = A[\vec{\tau}, \vec{\nu}] + C[\vec{\beta}, \vec{\nu}] = A\vec{\beta} - C\vec{\tau}$$

$$[\vec{w}, \vec{\beta}] = [A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta}, \vec{\beta}] = A[\vec{\tau}, \vec{\beta}] + B[\vec{\nu}, \vec{\beta}] = -A\vec{\nu} + B\vec{\tau}$$

Якщо покласти $A = \boldsymbol{\kappa}$, $B=0$, $C = k$, тобто,

$$\vec{w} = \boldsymbol{\kappa}\vec{\tau} + k\vec{\beta}\ ,$$

то отримаємо

$$\begin{aligned}
[\vec{w}, \vec{\tau}] &= k\vec{\nu} &&= \vec{\tau}'_s \\
[\vec{w}, \vec{\nu}] &= -k\vec{\tau} + \boldsymbol{\kappa}\vec{\beta} &&= \vec{\nu}'_s \\
[\vec{w}, \vec{\beta}] &= -\boldsymbol{\kappa}\vec{\nu} &&= \vec{\beta}'_s
\end{aligned}$$

Вектор-функція $\vec{W}=\vec{W}(s)$ називається *векторним полем Дарбу* вздовж кривої γ.

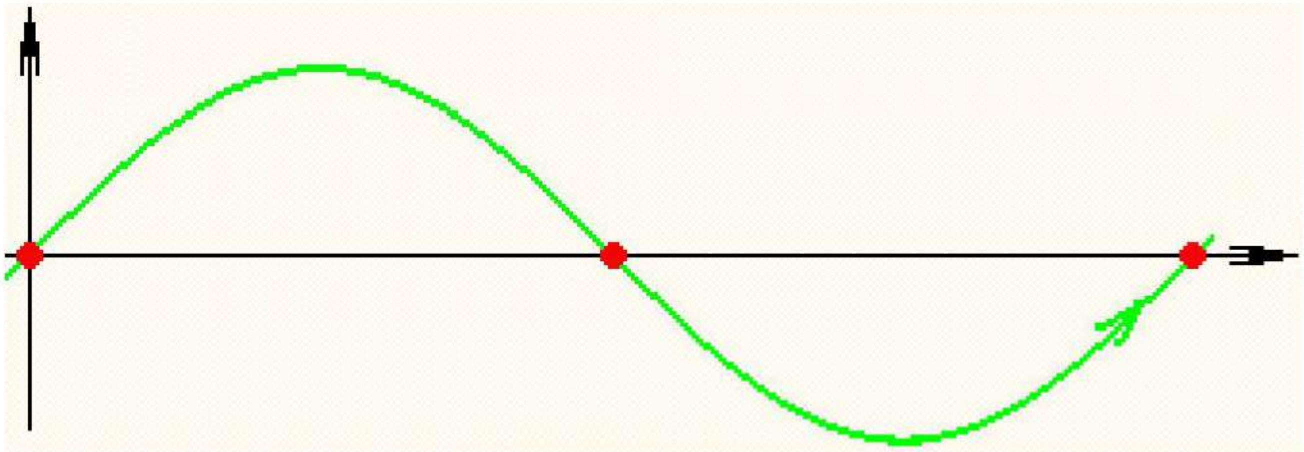
Це векторне поле має важливе значення з точки зору фізичної інтерпретації кривої як траєкторії рухомої точки.

Задача 2. Обчислити кривину зі знаком k^* параметрично заданої кривої

$$\gamma:\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

Проаналізуйте розподіл знаку кривини k^*.

Розв'язання. Задана крива – це синусоїда.



Застосуємо формулу

$$k^* = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

Маємо:

$$k^* = \frac{1 \cdot (-\sin t) - 0 \cdot \cos t}{\left(\sqrt{(1)^2 + (\cos t)^2}\right)^3} = \frac{-\sin t}{\left(\sqrt{1 + \cos^2 t}\right)^3}$$

Відповідь: $k^* = \dfrac{-\sin t}{\left(\sqrt{1 + \cos^2 t}\right)^3}$

Задача 3. Запишіть натуральне рівняння ланцюгової лінії

$$\gamma: \begin{cases} x = at \\ y = a\cosh t \end{cases}.$$

*Розв'язання***.** Знайдемо натуральний параметр

$$s = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int \sqrt{(a)^2 + (a\sinh t)^2}\,dt = \int a\cosh t\,dt = a\sinh t + c$$

Знайдемо кривину зі знаком:

$$k^* = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3} = \frac{a \cdot a\cosh t - 0 \cdot a\sinh t}{\left(\sqrt{(a)^2 + (a\sinh t)^2}\right)^3} = \frac{1}{a\cosh^2 t}$$

Натуральне рівняння ланцюгової лінії:

$$\begin{cases} s = a\sinh t + c \\ k^* = \dfrac{1}{a\cosh^2 t} \end{cases}, \qquad \text{тобто ,} \qquad k^* = \frac{a}{a^2 + (s-c)^2}$$

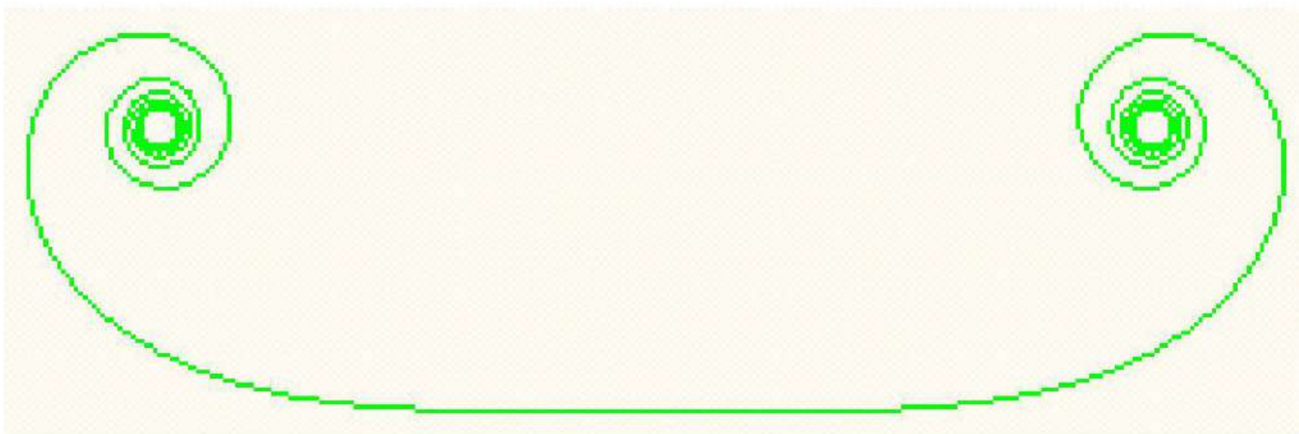
Відповідь: $k^* = \dfrac{a}{a^2 + (s-c)^2}$

Задача 4. Знайдіть криву в $\mathbb{R}^2$, задану натуральним рівнянням $k^* = s^2$

Розв'язання.

Крок 1) $\dfrac{d\alpha}{ds} = s^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \int\limits_{s_0}^{s} s^2 ds + \alpha_0 = \dfrac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0$

Крок 2) $\begin{cases} x' = \cos(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0) \\ y' = \sin(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int\limits_0^s \cos(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0)\, ds + f_0^1 \\ y = \int\limits_0^s \sin(\frac{1}{3}s^3 + \tilde{\alpha}_0)\, ds + f_0^2 \end{cases}$



Задача 7.1c. Знайдемо кривину пласкої кривої

$$x = a\operatorname{ch} t,\, y = b\operatorname{sh} t,$$

тобто вітки канонічної гіперболи. Оскільки вона пласка, її скрут автоматично дорівнює нулю. Кривину можна підрахувати за загальною формулою для просторових кривих, як у попередній задачі, поклавши

$$r = (a\operatorname{ch} t,\, b\operatorname{sh} t,\, 0).$$

Однак для пласких кривих зазвичай використовується уточнене поняття кривини, що наділена знаком. Вона визначена формулою

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}.$$

У нашому випадку

$$k = \frac{a\operatorname{sh} t\, b\operatorname{sh} t - a\operatorname{ch} t\, b\operatorname{ch} t}{(\sqrt{(a\operatorname{sh} t)^2 + (b\operatorname{ch} t)^2})^3} = \frac{-ab}{(\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t})^3}.$$

Задача 7.1b. Знайдемо кривину явно заданої пласкої кривої

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

(ланцюгової лінії). Як і раніше, для цього будемо явно задану криву $y = f(x)$ розглядати як параметрично задану з параметром x:

$$r = (x, f),\, r' = (1, f'),\, |r'| = \sqrt{1 + f'^2},\, r'' = (0, f'').$$

Тому за формулою з минулої задачі маємо

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{|r'|^3} = \frac{f''}{(\sqrt{1 + f'^2})^3}.$$

У нашому випадку $f' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $f'' = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, отже

$$k = \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{a\left(\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\right)^3} = \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{a\left(\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\right)^3} = \frac{1}{a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}.$$

Також ви можете самостійно підрахувати кривину для натуральної параметризації з відповіді задачі 6.12 і впевнитися у тому, що це те саме значення (можливо, з точністю до знака). У цьому випадку формула для кривини пласкої кривої набуде спрощеного вигляду

$$k = x'y'' - x''y' = \langle \tau', \nu \rangle,$$

де $\tau = r' = (x', y')$ – одиничний дотичний вектор, а $\nu = (-y', x')$ – одиничний вектор нормалі такий, що $\{\tau, \nu\}$ утворюють додатно орієнтований ортонормований базис (репер Френе пласкої кривої).

Задача 7.3a. Знайдемо кривину пласкої кривої, що задана загальним рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$. Як і раніше, спочатку перейдемо до декартових координат, записавши вектор-функцію у вигляді

$$r(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos\varphi,\, \rho(\varphi)\sin\varphi).$$

Тоді

$$r' = (\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi,\ \rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi),$$

$$|r'| = \sqrt{(\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2},$$

$$r'' = (\rho'' \cos\varphi - 2\rho' \sin\varphi - \rho\cos\varphi,\ \rho'' \sin\varphi + 2\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi).$$

Тому

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{|r'|^3} =$$

$$= \frac{(\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi)(\rho'' \sin\varphi + 2\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi) - (\rho'' \cos\varphi - 2\rho' \sin\varphi - \rho\cos\varphi)(\rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi)}{(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2})^3} =$$

$$= \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2})^3}.$$

Задача 7.4a. Щоб знайти кривину пласкої кривої, що у полярних координатах задана функцією $\rho = a\, e^{h\varphi}$ (де $a > 0$), достатньо просто підставити її у формулу з попередньої задачі:

$$k = \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\sqrt{\rho'^2 + \rho^2})^3} = \frac{-a\, e^{h\varphi} h^2 a\, e^{h\varphi} + 2a^2h^2e^{2h\varphi} + a^2e^{2h\varphi}}{(\sqrt{a^2h^2e^{2h\varphi} + a^2e^{2h\varphi}})^3} = \frac{1}{a\, e^{h\varphi}\sqrt{h^2+1}}.$$

Задача 7.3b. Знайдемо кривину неявно заданої пласкої кривої (лінії), що визначена рівнянням

$$F(x, y) = 0.$$

Оскільки поняття кривини має сенс лише за умови регулярності, ми можемо розглядати лише точки кривої, в околі яких хоча б одна з часткових похідних F_x, F_y ненульова. Також відразу умовимося, що F – класу C^2. Нехай для визначеності $F_y \neq 0$. Тоді за теоремою про неявну функцію в околі такої точки лінія є графіком явно заданої кривої $y = f(x)$, тобто

$$F(x, f(x)) = 0$$

для усіх x з деякого інтервалу. Продиференціюємо цю умову двічі:

$$F_x + F_y\, f' = 0,$$

$$F_{xx} + F_{xy}\, f' + F_{yx}\, f' + F_{yy}\, f'^2 + F_y\, f'' = 0.$$

Отже,

$$f' = -\frac{F_x}{F_y},$$

$$f'' = -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}\, f' + F_{yy}\, f'^2}{F_y} = \frac{1}{F_y}\left(-F_{xx} + 2F_{xy}\frac{F_x}{F_y} - F_{yy}\frac{F_x^2}{F_y^2}\right).$$

Тому за формулою, яку ми вивели у розв'язку задачі 7.1b,

$$k = \frac{f''}{(\sqrt{1+f'^2})^3} = \frac{1}{F_y\left(\sqrt{1+\frac{F_x^2}{F_y^2}}\right)^3}\left(-F_{xx} + 2F_{xy}\frac{F_x}{F_y} - F_{yy}\frac{F_x^2}{F_y^2}\right) =$$

$$= \frac{-F_{xx}\, F_y^2 + 2F_{xy}\, F_x\, F_y - F_{yy}\, F_x^2}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3}.$$

Строго кажучи, тут повинен ще з'явитися знак F_y, але такими деталями зазвичай нехтують, бо знак кривини, обчисленої за цією формулою, все одно буде залежати від вибору знака F (див. приклад у наступній задачі). Цей вираз для кривини також часто переписують у вигляді

$$k = -\frac{F_{xx}(F_x^2 + F_y^2) - F_x(F_x\,F_{xx} + F_y\,F_{yx})}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} - \frac{F_{yy}(F_x^2 + F_y^2) - F_y(F_x\,F_{xy} + F_y\,F_{yy})}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}\right)$$

або з плюсами перед похідними відношень замість мінусів. В околі точки, де $F_x \neq 0$, лінія буде графіком явно заданої кривої $x = g(y)$. Переконайтеся самостійно, що для такого задання ми отримаємо ту саму формулу.

Задача 7.4d. Знову знайдемо кривину канонічної гіперболи, цього разу використавши її неявне задання

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тут $a > 0$, $b > 0$. Домноживши на a^2b^2, можна покласти $F(x, y) = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$. Тоді

$$F_x = 2b^2x,\ F_y = -2a^2y,\ F_{xx} = 2b^2,\ F_{xy} = 0,\ F_{yy} = -2a^2,$$

і за формулою з попередньої задачі маємо

$$k = \frac{-8b^2a^4y^2 + 0 + 8a^2b^4x^2}{\left(\sqrt{4b^4x^2 + 4a^4y^2}\right)^3} = \frac{a^4b^4}{\left(\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}\right)^3} = \frac{ab}{\left(\sqrt{\left(\frac{b\,x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a\,y}{b}\right)^2}\right)^3}.$$

Тут при перетворені чисельника ми використали умову $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, після цього поділили чисельник та знаменник на a^3b^3. Зауважимо, що отриманий вираз відрізняється від результату задачі 7.1c лише знаком. Замінивши функцію F на $-F$ (сама крива при цьому, очевидно, не зміниться), ми отримаємо вираз з задачі 7.1c. Це демонструє, зокрема, що знак кривини плаской кривої залежить від вибору параметра, а тому не є "достатньо добрим" геометричним інваріантом на відміну від модуля цієї кривини.