gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 6. Формули Френе. Основна теорема теорії кривих.

Розглядаємо регулярну (класу C^3) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^3$, параметризовану натуральним параметром:

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Для кривої γ обчислюється кривина:

$$k = |\vec{f}''| .$$

В точках, де $k \neq 0$, для кривої γ обчислюється скрут:

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{k^2}$$

Таким чином, кожній регулярній кривій γ в $\mathbb{R}^3$, що не має точок перегину, відповідає пара функцій

$$k = k(s) > 0 \ , \quad \kappa = \kappa(s).$$

Мета лекції – показати, що вказану відповідність можна обернути, тобто, для кожної пари функцій $k = k(s) > 0$, $\kappa = \kappa(s)$ існує і є єдиною (з точністю до рухів у просторі) регулярна крива γ, для якої $k = k(s)$ і $\kappa = \kappa(s)$ є функціями кривини і скруту, вираженими через натуральний параметр s.

6.1. Формули Френе для кривих в $I\!R^3$

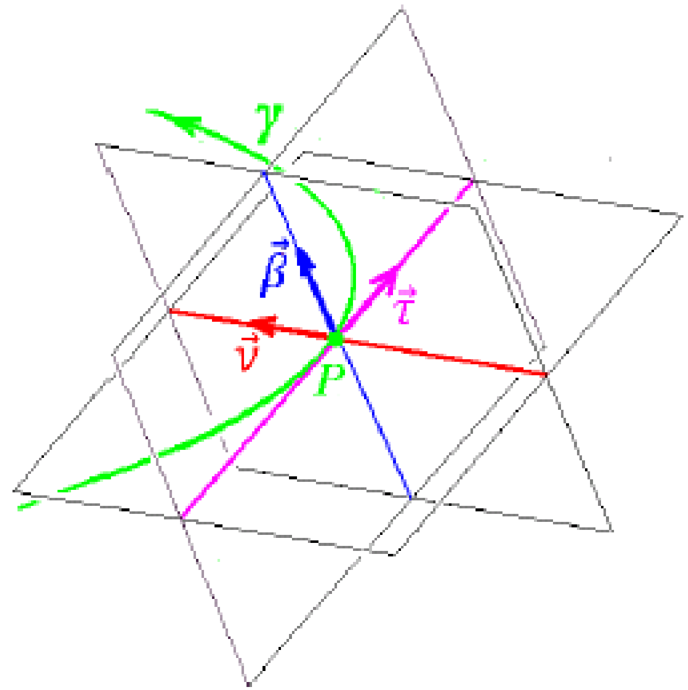
Нехай крива γ не має точок перегину, тобто кривина $k = k(s) > 0$.

В кожній точці на кривій γ визначено базис Френе

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{f}}{ds}, \qquad \vec{\nu} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2 \vec{f}}{ds^2}, \qquad \vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$$

і елементи тригранника Френе

- дотична пряма(вздовж $\vec{\tau}$)
- пряма головної нормалі (вздовж $\vec{\nu}$)
- пряма бінормалі (вздовж $\vec{\beta}$)
- щільнодотична площина (нормаль $\vec{\beta}$)
- нормальна площина (нормаль $\vec{\tau}$)
- спрямна площина (нормаль $\vec{\nu}$)

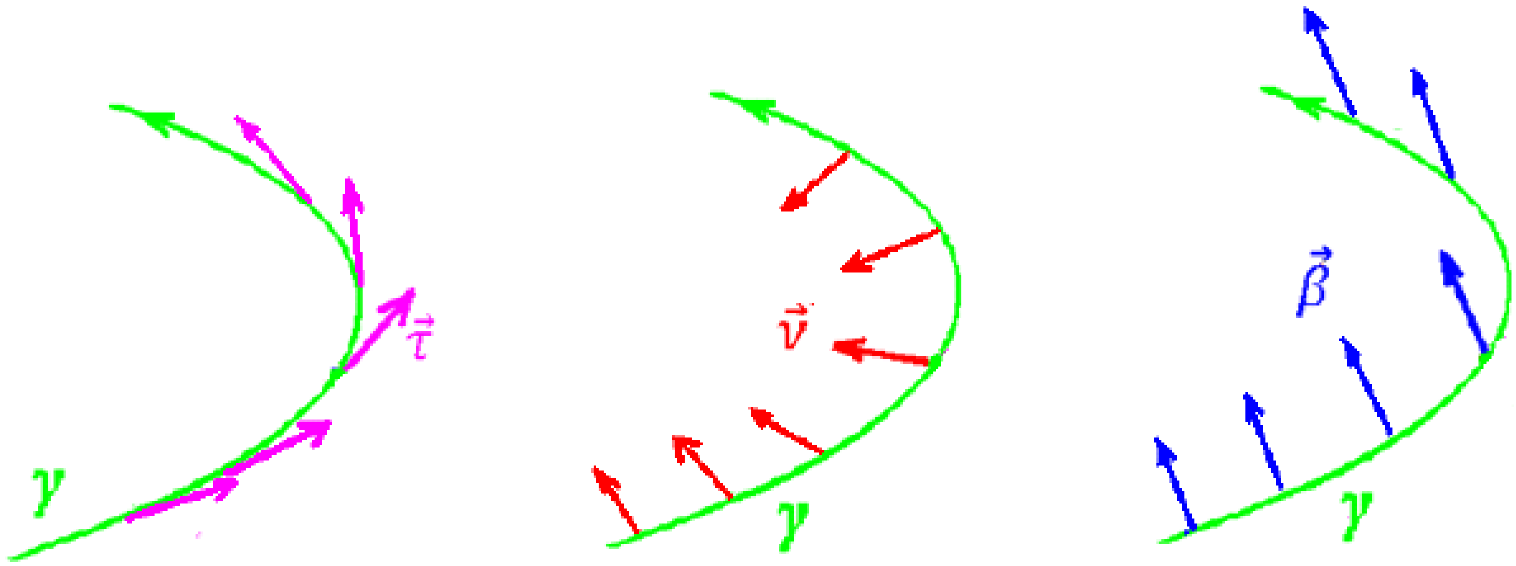


Вздовж кривої γ визначено три векторних поля:

$\vec{\tau}$ – дотичне векторне поле,

$\vec{\nu}$ – векторне поле головних нормалей,

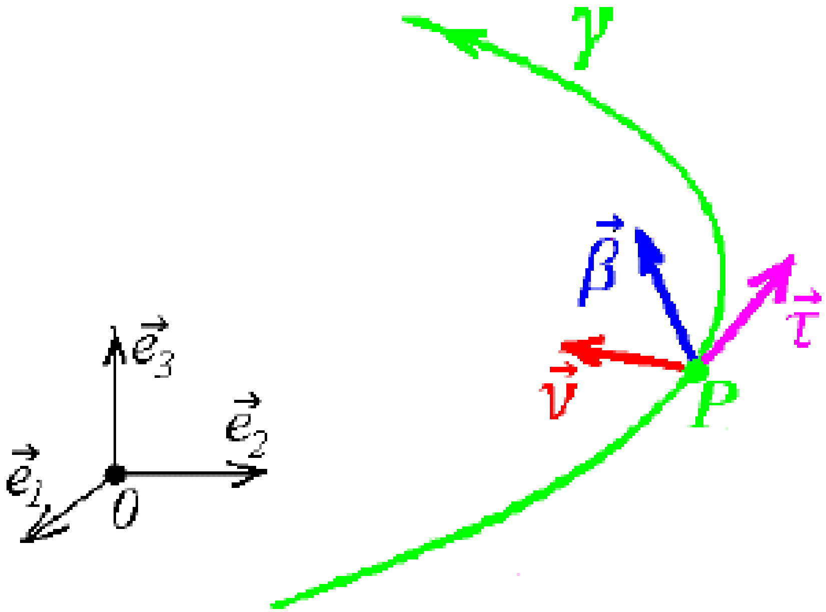
$\vec{\beta}$ – векторне поле бінормалей.



$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ – додатно орієнтований ортонормований базис в $\mathbb{R}^3$

$$< \vec{\tau}, \vec{\tau} > \equiv 1,$$
$$< \vec{\nu}, \vec{\nu} > \equiv 1,$$
$$< \vec{\beta}, \vec{\beta} > \equiv 1,$$
$$< \vec{\tau}, \vec{\nu} > \equiv 0,$$
$$< \vec{\nu}, \vec{\beta} > \equiv 0,$$
$$< \vec{\beta}, \vec{\tau} > \equiv 0,$$

$$(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}) > 0.$$



Як змінюються вектори $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$, коли точка P рухається вздовж кривої γ ?

Допоміжні формули

В натуральній параметризації маємо:

$$\vec{f}' = \vec{\tau}$$

$$\vec{f}'' = k\vec{\nu} \quad , \quad k = |\vec{f}''|$$

Нам знадобиться ще третя похідна:

$$\vec{f}''' = k'\vec{\nu} + k\vec{\nu}'$$

Підставивши у формулу для скруту κ, отримаємо:

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|\vec{f}''|^2} = \frac{(\vec{\tau}, k\vec{\nu}, k'\vec{\nu} + k\vec{\nu}')}{k^2} = \frac{(\vec{\tau}, k\vec{\nu}, k'\vec{\nu}) + (\vec{\tau}, k\vec{\nu}, k\vec{\nu}')}{k^2} =$$

$$= \frac{kk'(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\nu}) + k^2(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\nu}')}{k^2} = (\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\nu}')$$

Тобто, маємо:

$$\kappa = < \vec{\beta}, \vec{\nu}' >$$

Перша формула Френе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{f}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} = k\vec{v}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}}$$

Друга формула Френе

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta}$$

Помножимо скалярно на $\vec{\tau}$:

$$<\vec{\tau}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}> = A<\vec{\tau},\vec{\tau}> + B<\vec{\tau},\vec{\nu}> + C<\vec{\tau},\vec{\beta}>$$

$$<\vec{\tau}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}> = A$$

З іншого боку, маємо:

$$<\vec{\tau}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}> = \frac{d}{ds}<\vec{\tau},\vec{\nu}> - <\frac{d\vec{\tau}}{ds},\vec{\nu}> = \frac{d}{ds}0 - <k\vec{\nu},\vec{\nu}> = -k$$

Отже, маємо:
$A = -k.$

Аналогічно, помножимо скалярно на $\vec{\nu}$:

$$<\vec{\nu}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}> = A<\vec{\nu},\vec{\tau}> + B<\vec{\nu},\vec{\nu}> + C<\vec{\nu},\vec{\beta}>$$

$$<\vec{\nu}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}> = B$$

З іншого боку, маємо:

$$<\vec{\nu}, \frac{d\vec{\nu}}{ds}> = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}<\vec{\nu},\vec{\nu}> = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}1 = 0$$

Отже, маємо:
$B = 0$

Нарешті, помножимо скалярно на $\vec{\beta}$:

$$<\vec{\beta}, \frac{d\vec{v}}{ds}> = A < \vec{\beta}, \vec{\tau} > + B < \vec{\beta}, \vec{v} > + C < \vec{\beta}, \vec{\beta} >$$

$$<\vec{\beta}, \frac{d\vec{v}}{ds}> = C$$

З іншого боку, маємо:

$$<\vec{\beta}, \frac{d\vec{v}}{ds}> = \kappa$$

Отже, маємо:

$C = \kappa$

Таким чином, отримали другу формулу Френе:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}}$$

Третя формула Френе

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \widetilde{A}\,\vec{\tau} + \widetilde{B}\,\vec{\nu} + \widetilde{C}\vec{\beta}$$

Помножимо скалярно на $\vec{\tau}$:

$$< \vec{\tau}, \frac{d\vec{\beta}}{ds} >= \widetilde{A} < \vec{\tau}, \vec{\tau} > + \widetilde{B} < \vec{\tau}, \vec{\nu} > + \widetilde{C} < \vec{\tau}, \vec{\beta} >$$

$$< \vec{\tau}, \frac{d\vec{\beta}}{ds} >= \widetilde{A}$$

З іншого боку, маємо:

$$< \vec{\tau}, \frac{d\vec{\beta}}{ds} > = \frac{d}{ds} < \vec{\tau}, \vec{\beta} > - < \frac{d\vec{\tau}}{ds}, \vec{\beta} > = \frac{d}{ds} 0 - < k\vec{\nu}, \vec{\beta} > = 0$$

Отже, маємо:

$$\widetilde{A} = 0$$

Аналогічно, помножимо скалярно на $\vec{\nu}$:

$$< \vec{\nu}, \frac{d\vec{\beta}}{ds} >= \widetilde{A} < \vec{\nu}, \vec{\tau} > + \widetilde{B} < \vec{\nu}, \vec{\nu} > + \widetilde{C} < \vec{\nu}, \vec{\beta} >$$

$$< \vec{\nu}, \frac{d\vec{\beta}}{ds} >= \widetilde{B}$$

З іншого боку, маємо:

$$< \vec{\nu}, \frac{d\vec{\beta}}{ds} > = \frac{d}{ds} < \vec{\nu}, \vec{\beta} > - < \frac{d\vec{\nu}}{ds}, \vec{\beta} > = \frac{d}{ds} 0 - < -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}, \vec{\beta} > = -\kappa$$

Отже, маємо:

$$\widetilde{B} = -\kappa$$

Нарешті, помножимо скалярно на $\vec{\beta}$:

$$<\vec{\beta}, \frac{d\vec{\beta}}{ds}> = \widetilde{A} <\vec{\beta}, \vec{\tau}> + \widetilde{B} <\vec{\beta}, \vec{\nu}> + \widetilde{C} <\vec{\beta}, \vec{\beta}>$$

$$<\vec{\beta}, \frac{d\vec{\beta}}{ds}> = \widetilde{C}$$

З іншого боку, маємо:

$$<\vec{\beta}, \frac{d\vec{\beta}}{ds}> = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds} <\vec{\beta}, \vec{\beta}> = 0$$

Отже, маємо:

$$\widetilde{C} = 0$$

Таким чином, отримали третю формулу Френе:

$$\boxed{\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa \vec{\nu}}$$

Теорема (формули Френе)

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}$$

Теорема (формули Френе в матричному вигляді)

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

Додаткове пояснення (самостійно):

$$V\,V^T = Id$$

$$V'\,V^T + V\,V^{T'} = 0$$

$$V' = \Omega V \qquad \downarrow \qquad V^{T}{}' = V^T\,\Omega^t$$

$$\Omega V\,V^T + V\,V^T\,\Omega^T = 0$$

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

6.2. Приклад застосування формул Френе

Формули Френе – один з основних технічних засобів в теорії кривих.

Теорема. *Нехай γ – регулярна класу C^3 параметрично задана крива в $I\!R^3$. Припустимо, що крива γ не має точок перегину, тобто, кривина $k>0$.*

Крива γ є плоскою кривою тоді, і тільки тоді, коли скрут кривої γ є нульовим: $\kappa\equiv 0$.

Доведення.

$\Rightarrow$) Нехай крива γ з радіус-вектором $\vec{x}=\vec{f}(s)$ належить деякій площині Π, що задається в $I\!R^3$ рівнянням $<\vec{x}-\vec{p},\vec{N}>=0$.

Тоді вектор-функція $\vec{f}(s)$ задовольняє

$$<\vec{f}(s)-\vec{p},\vec{N}>=0.$$

Якщо продиференціювати цю тотожність, отримаємо:

$$<\vec{f}',\vec{N}>=0 \quad ,<\vec{f}'',\vec{N}>=0 \ ,<\vec{f}''',\vec{N}>=0$$

Вектори $\vec{f}'$, $\vec{f}''$, $\vec{f}'''$ є ортогональними вектору $\vec{N}$. Значить, вони є компланарними, а їх змішаний добуток дорівнює нулю $(\vec{f}',\vec{f}'',\vec{f}''')\equiv 0$.

Отже, скрут $\kappa=\dfrac{(\vec{f}',\vec{f}'',\vec{f}''')}{k^2}\equiv 0$.

$\Leftarrow$) Припустимо, що крива γ має нульовий скрут $\kappa \equiv 0$.

З третьої формули Френе

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa \vec{\nu}$$

отримуємо, що $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{0}$, тому $\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_0$.

З визначення вектора бінормалі отримуємо

$$< \vec{f}', \vec{\beta}_0 > \equiv 0 \quad , < \vec{f}'', \vec{\beta}_0 > \equiv 0.$$

Звідси випливає, що

$$< \vec{f} , \vec{\beta}_0 > \equiv c .$$

Це і означає, що крива γ належить площині в $I\!R^3$, що задається рівнянням

$$< \vec{x}, \vec{\beta}_0 > = c .$$

6.3. Основна теорема теорії кривих в $\mathbb{R}^3$

Припустимо, що задані дві неперервні функції $k=k(s)>0$ та $\varkappa=\varkappa(s)$.

Проблема існування. Чи існує регулярна (класу гладкості C^3) крива γ в $\mathbb{R}^3$, для якої задані функції $k(s)>0, \varkappa(s)$ – це кривизна і скрут, а s – натуральний параметр?

Проблема єдиності. Як багато існує *різних* регулярних (класу гладкості C^3) кривих в $\mathbb{R}^3$, для яких $k(s)>0, \varkappa(s)$ – це кривизна і скрут, а s – натуральний параметр ?

Аналітична інтерпретація (громіздка): знайти вектор–функцію $\vec{x}=\vec{f}(s)$ класу гладкості C^3 , що задовольняє умовам

$$|\vec{f}\,'| \equiv 1, \qquad |\vec{f}\,''| = k(s)\,, \qquad \frac{(\vec{f}\,', \vec{f}\,'', \vec{f}\,''')}{|\vec{f}\,''|^2} = \varkappa(s)$$

До вирішення сформульованих вище питань існування та єдиності ми вирушимо іншим шляхом, застосувавши формули Френе.

Теорема (основна теорема теорії кривих)

Нехай задано неперервно диференційовну функцію $\hat{k}(s)>0$ та неперервну функцію $\hat{\boldsymbol{\kappa}}(s)$.

Тоді в $\mathbb{R}^3$ існує і єдина (з точністю до власних рухів в $\mathbb{R}^3$) регулярна класу гладкості C^3 крива γ, для якої $\hat{k}(s)$, $\hat{\boldsymbol{\kappa}}(s)$ – це кривизна і скрут, задані як функції від натурального параметру s на кривій γ.

Доведення. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \hat{k} & 0\\ -\hat{k} & 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}}\\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix}$$

для трьох вектор-функцій $\vec{a}(s), \vec{b}(s), \vec{c}(s)$ в $\mathbb{R}^3$.

Це система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, коефіцієнти якої визначаються заданими функціями $\hat{k}(s)$ та $\hat{\boldsymbol{\kappa}}(s)$.

Задамо початкові умови:

$$\vec{a}(0) = \vec{a}_0 \, , \vec{b}(0) = \vec{b}_0 \, , \vec{c}(0) = \vec{c}_0$$

Маємо задачу Коші (система рівнянь та початкові умови):

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\hat{k} & 0 & \hat{\varkappa} \\ 0 & -\hat{\varkappa} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \qquad F' = U \cdot F$$

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{b}_0 \\ \vec{c}_0 \end{pmatrix} \qquad F(0) = F_0$$

За загальною теоремою існування і єдиності розв'язку задачі Коші з теорії диференціальних рівнянь, вказана задача має єдиний розв'язок $\vec{a}(s)$, $\vec{b}(s)$, $\vec{c}(s)$.

Відштовхуючись від цього розв'язку, розглянемо вектор-функцію

$$\vec{f}(s) = \int_0^s \vec{a}(s)ds + \vec{f}_0$$

і відповідну криву γ *в* $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(s)$.

Далі ми крок за кроком доведемо наступне:

1) якщо початкові вектори $\vec{a}(0)=\vec{a}_0$, $\vec{b}(0)=\vec{b}_0$, $\vec{c}(0)=\vec{c}_0$ утворюють додатно орієнтований ортонормований базис в $\mathbb{R}^3$, то тоді при кожному значенні s вектори $\vec{a}(s)$, $\vec{b}(s)$, $\vec{c}(s)$ також утворюють додатно орієнтований ортонормований базис в $\mathbb{R}^3$;

2) параметр s є натуральним параметром на кривій γ,

3) вектор функції $\vec{a}(s)$, $\vec{b}(s)$, $\vec{c}(s)$ описують репер Френе кривої γ,

4) функції $\hat{k}=\hat{k}(s)$ та $\hat{\boldsymbol{\kappa}}=\hat{\boldsymbol{\kappa}}(s)$ є кривиною і скрутом кривої γ.

Крок 1. Маємо:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{k} & 0 \\ -\widehat{k} & 0 & \widehat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & -\widehat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$$

Транспонуємо:

$$(\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c})' = (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{k} & 0 \\ \widehat{k} & 0 & -\widehat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & \widehat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix}$$

Розглянемо матрицю Грама системи векторів $\vec{a}(s), \vec{b}(s), \vec{c}(s)$:

$$G = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \cdot (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle \end{pmatrix}$$

Матриця $G = G(s)$ залежить від s. В початковий момент маємо

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

завдяки ортонормованості векторів $\vec{a}(0) = \vec{a}_0$, $\vec{b}(0) = \vec{b}_0$, $\vec{c}(0) = \vec{c}_0$

Обчислимо похідну матриці $G(s)$:

$$G' = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}' \cdot (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}) + \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \cdot (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c})' =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\hat{k} & 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \cdot (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}) + \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \cdot (\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\hat{k} & 0 \\ \hat{k} & 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\hat{k} & 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix} \cdot G + G \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\hat{k} & 0 \\ \hat{k} & 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, матриця $G=G(s)$ є розв'язком наступної задачі Коші:

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\hat{k} & 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix} \cdot G - G \cdot \begin{pmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\hat{k} & 0 & \hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\kappa}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

За загальною теоремою існування і єдиності розв'язку задачі Коші з теорії диференціальних рівнянь, вказана задача має єдиний розв'язок. Легко пересвідчитись, що цим розв'язком є

$$G(s) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $G(s)$ є матрицею Грама системи векторів $\vec{a}(s)$, $\vec{b}(s)$, $\vec{c}(s)$, ми отримуємо, що при будь-якому значенні s вектори $\vec{a}(s)$, $\vec{b}(s)$, $\vec{c}(s)$ утворюють ортонормований базис в $\mathbb{R}^3$.

Крім того, змішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \pm 1$. Оскільки при $s=0$ маємо 1 і добуток змінюється неперервно, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \equiv 1$.

Крок 2. Обчислимо похідну радіус-вектора кривої γ:

$$\vec{f}(s) = \int_0^s \vec{a}(s)ds + \vec{f}_0$$

$$\vec{f}' = \vec{a}(s)$$

Оскільки $\vec{a}(s)$, $\vec{b}(s)$, $\vec{c}(s)$ є ортонормованими, маємо $|\vec{a}(s)| \equiv 1$. Значить, $|\vec{f}'| \equiv 1$.

Це означає, що крива γ є регулярною ($|\vec{f}'| \neq 0$), а s – натуральний параметр на кривій.

Більше того, в натуральній параметризації маємо $\vec{f}' = \vec{\tau}$, тому

$$\vec{\tau}(s) = \vec{a}(s)$$

Якщо продиференціювати цю рівність, отримаємо:

$$\vec{\tau}' = \vec{a}'$$

$$k\vec{\nu} = \hat{k}\vec{b}$$

Оскільки $\vec{b}$ і $\vec{v}$ мають одиничну довжину, і $\hat{k}$ та k є додатними, з рівності

$$k\vec{v} = \hat{k}\vec{b}$$

ми отримуємо

$$k = \hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{b}$$

Таким чином, $\hat{k}$ – це кривина k, а $\vec{b}$ – головна нормаль $\vec{v}$ кривої γ.

Далі, з ортонормованості трійок векторів $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$ і $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ випливає, що $\vec{\beta}=\vec{c}$, оскільки раніше ми довели, що $\vec{\tau} = \vec{a}, \vec{v} = \vec{b}$.

Таким чином, $\vec{c}$ – це бінормаль $\vec{\beta}$ кривої γ.

Нарешті, якщо продиференціювати $\vec{\beta}=\vec{c}$, отримаємо

$$\vec{\beta}'_s = \vec{c}'_s$$

$$-\boldsymbol{\kappa}\vec{v} = -\hat{\boldsymbol{\kappa}}\vec{b}$$

Значить, $\boldsymbol{\kappa} = \hat{\boldsymbol{\kappa}}$, тобто $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ – це скрут кривої γ.

Таким чином, побудована крива γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \int_0^s \vec{a}(s)ds \, + \vec{f}_0$$

є шуканою кривою: її кривина та скрут, як функції натурального параметра, співпадають з заданими функціями $\widehat{k}(s)$, $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}(s)$.

Свобода у побудові кривої γ – це довільна додатно орієнтована ортонормована трійка векторів $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{c}_0$ та довільний вектор $\vec{f}_0$. Вибір $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{c}_0$ відповідає обертанням в просторі $\mathbb{R}^3$, а вибір $\vec{f}_0$ відповідає паралельним переносам в $\mathbb{R}^3$.

Отже, шукана крива γ визначається однозначно з точністю до довільних власних рухів у просторі $\mathbb{R}^3$. Теорема доведена.

Зауваження - наслідок - визначення.

Функції $k=k(s)>0$ та $\boldsymbol{\kappa}= \boldsymbol{\kappa}(s)$ можуть бути задані довільно.

В кожному випадку можемо побудувати регулярну криву γ в $\mathbb{R}^3$, для якої s, $k(s)$ та (s) є натуральним параметром, кривиною та скрутом відповідно.

Функції $k=k(s)>0$ та $\boldsymbol{\kappa}= \boldsymbol{\kappa}(s)$ називають *натуральними рівняннями* кривої γ в $\mathbb{R}^3$. Вони визначають криву γ з точністю до її положення в просторі.

Приклади

1) Нехай $k(s) \equiv \frac{1}{r}$, $\boldsymbol{\kappa}(s) \equiv 0$.
Відповідна крива γ – це коло радіусу r.

2) Нехай $k(s) \equiv a > 0$, $\boldsymbol{\kappa}(s) \equiv b \neq 0$.
Відповідна крива γ – це гвинтова лінія.

Напрямок досліджень: аналіз геометричних властивостей кривих в просторі $\mathbb{R}^3$ в термінах функцій кривини та скруту.

Наприклад, які умови на кривину $k(s)$ та скрут $\boldsymbol{\kappa}(s)$ є необхідними та достатніми для того, щоб відповідна крива γ в $\mathbb{R}^3$ була замкнутою?

Відповідь дав Ю.А. Ніколаєвський – ефективних необхідних та достатніх умов замкнутості кривої γ в термінах $k(s)$ та $\boldsymbol{\kappa}(s)$ не існує!

6.3. Основна теорема теорії кривих в $I\!R^2$

Розглядаємо регулярну (класу C^3) параметрично задану криву γ в $I\!R^2$, параметризовану натуральним параметром:

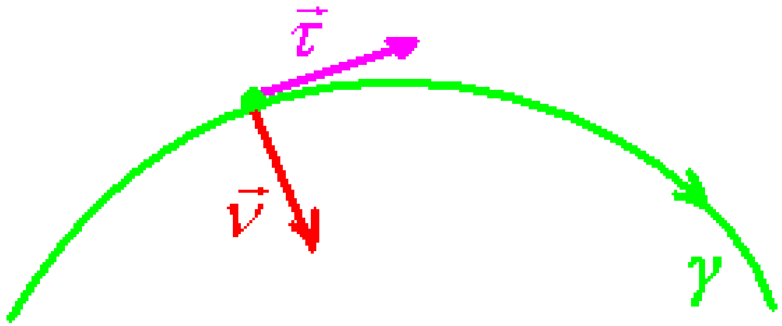
$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Для кривої γ обчислюється кривина:

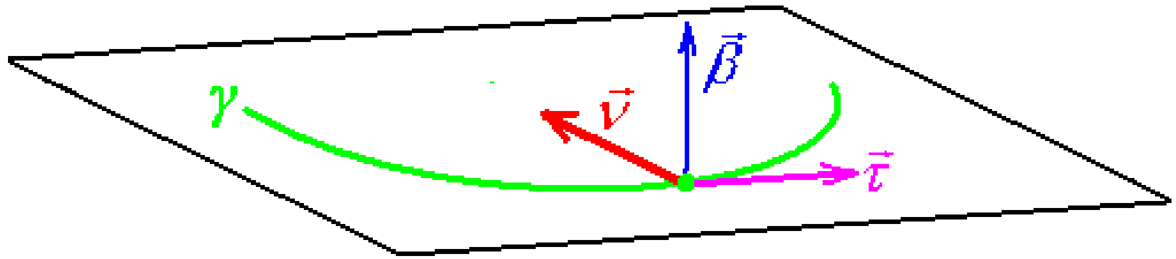
$$k = |\vec{f}''| \ .$$

В кожній точці, що не є точкою перегину, визначається базис Френе:

$$\vec{\tau} = \vec{f}', \ \vec{\nu} = \frac{1}{k}\vec{f}''$$



Ми можемо розглядати криву γ як плоску криву в $I\!R^3$, що лежить в горизонтальній координатній площині.



Скрут плоскої кривої γ є тотожно нульовим: $\kappa \equiv 0$.

Усі шільнодотичні площини плоскої кривої γ співпадають з горизонтальною площиною, в якій лежить крива γ. А бінормалі паралельні вертикальній координатній прямій.

В кожній точці на кривій γ , що не є точкою перегину, визначається базис Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_0$:

Мають місце формули Френе, як для кривої в $I\!R^3$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu} \qquad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\kappa\vec{\nu}$$

$$\begin{matrix} \kappa \equiv 0 \\ \vec{\beta} = \vec{\beta}_0 \\ \longrightarrow \end{matrix}$$

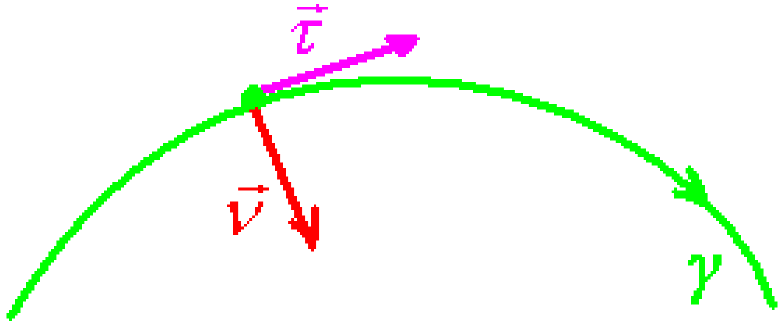
$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu} \qquad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} \qquad \vec{0} = \vec{0}$$

Теорема (формули Френе для плоских кривих)

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau}$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{\nu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{\nu}\end{pmatrix}$$



Основна теорема теорії кривих (варіант для плоских кривих)

Нехай задано неперервно диференційовну функцію $\hat{k}(s)$.

Тоді в $\mathbb{R}^2$ *існує і єдина (з точністю до рухів в* $\mathbb{R}^2$*) регулярна класу гладкості* C^3 *крива* γ*, для якої* $\hat{k}(s)$ *– це кривина, задана як функція натурального параметру* s *на кривій* γ*.*

Модифікація базиса Френе, формул Френе і основної теореми

Розглядаємо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$, параметризовану натуральним параметром:

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Для кривої γ обчислюється кривина:

$$k = |\,\vec{f}''\,| \ .$$

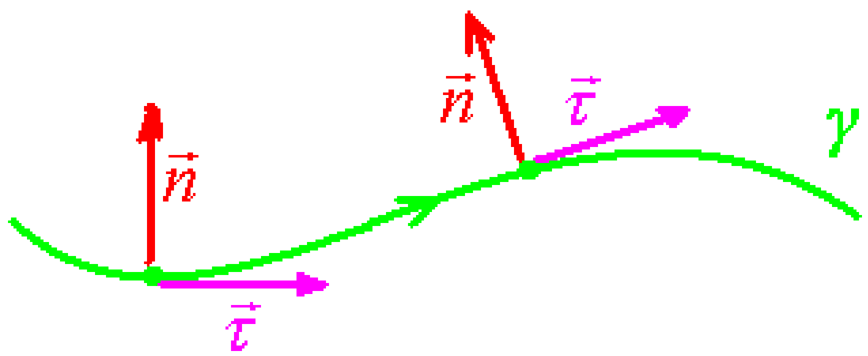
В кожній точці, що не є точкою перегину, визначається *базис Френе*:

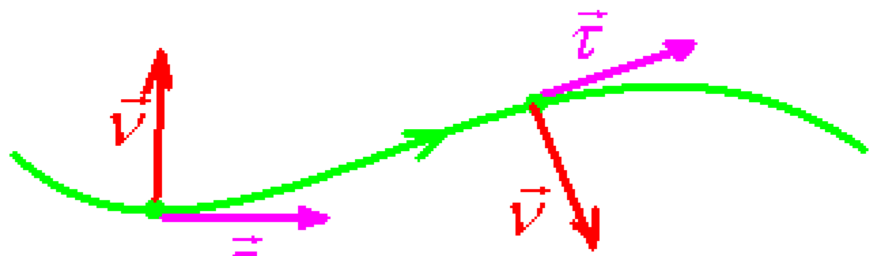
$$\vec{\tau} = \vec{f}', \ \vec{\nu} = \frac{1}{k}\vec{f}''$$

Також в кожній точці кривої визначається *модифікований базис Френе*,

$$\vec{\tau} = \vec{f}', \vec{n},$$

що є ортонормованим додатно орієнтованим базисом в площині $\mathbb{R}^2$.





Маємо:

$$\vec{n} = \pm\vec{\nu}$$

Введемо функцію $k^*(s)$ так, що

$$k^*\vec{n} = k\,\vec{\nu}\,,$$

тобто,

$k^* := k$, якщо $\vec{n} = \vec{\nu}$,

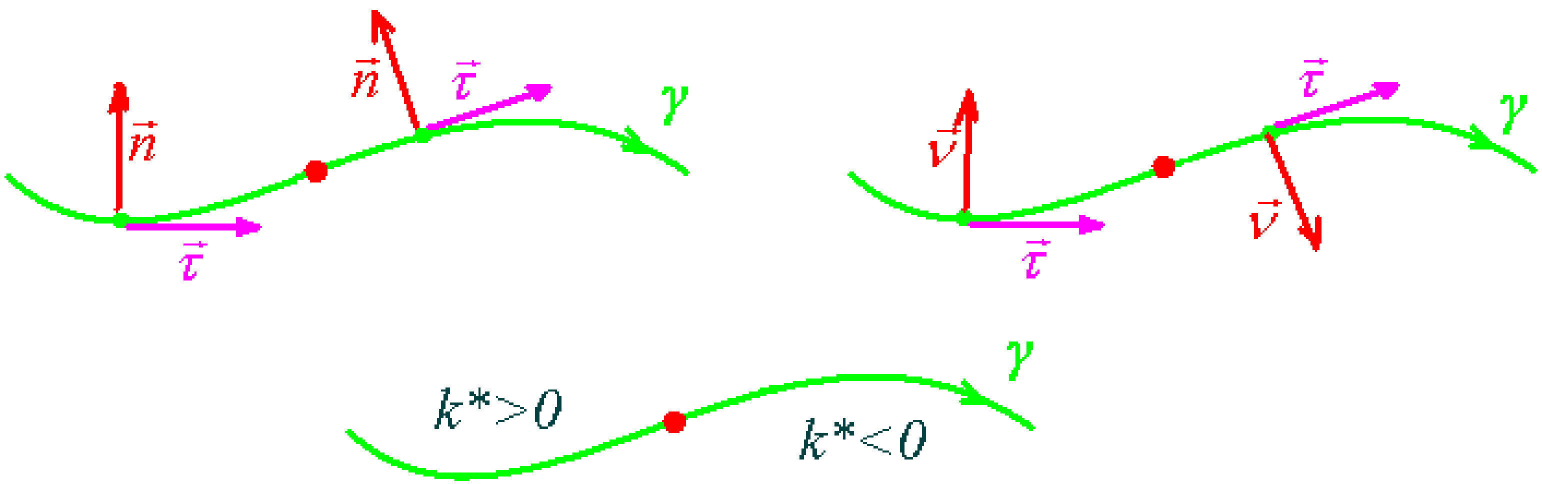
еквівалентно – якщо базис Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ є додатно орієнтованим,

$k^* := -k$, якщо $\vec{n} = -\vec{\nu}$,

еквівалентно – якщо базис Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ є від'ємно орієнтованим,

$k^* := 0$ в точках перегину.

Величина k^* називається *кривиною зі знаком* кривої γ.



Зауваження 1. Якщо крива γ в $\mathbb{R}^2$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

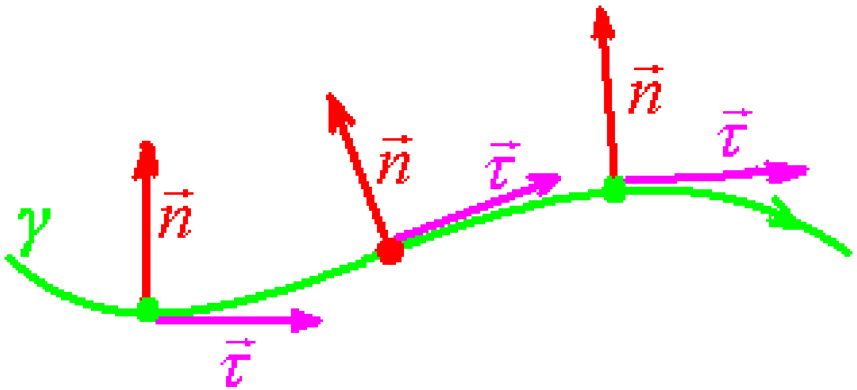
то маємо:

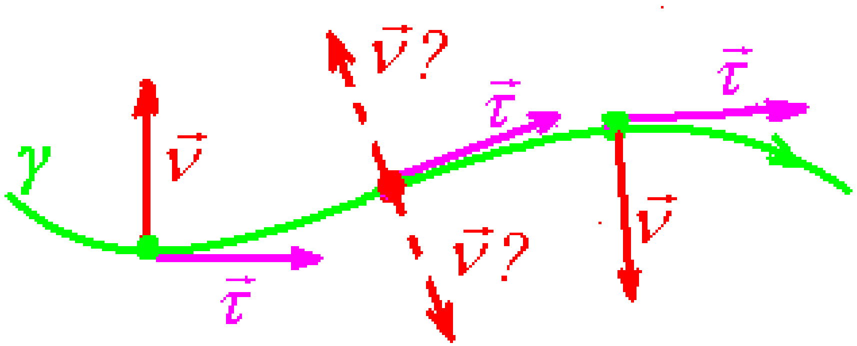
$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}, \qquad k^* = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

Зауваження 2. Якщо на кривій γ змінити орієнтацію (напрямок руху), то кривина k не зміниться, а кривина k^* змінить знак.

Доведіть самостійно, застосувавши заміну параметра $t = -\tilde{t}$.

Зауваження 3. Модифікований базис Френе $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, визначається незалежно від присутності точок перегину на кривій.





Теорема (модифіковані формули Френе для плоских кривих)

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k^* \ \vec{n}$$
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k^* \ \vec{\tau}$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k^*\\ -k^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{n}\end{pmatrix}$$

Доведення. Застосувати формули Френе

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$$
$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau}$$

і зробити заміни $\vec{\nu} = \pm \vec{n}$, $k = \pm k^*$.

Основна теорема теорії кривих (варіант для плоских кривих)

Нехай задано неперервну функцію $\hat{k}^*(s)$.

Тоді в $\mathbb{R}^2$ *існує і єдина (з точністю до власних рухів в* $\mathbb{R}^2$*) регулярна класу гладкості* C^2 *крива γ, для якої* $\hat{k}^*(s)$ *– це кривина зі знаком, задана як функція натурального параметру s на кривій γ.*

Схема доведення – аналогічно випадку кривих в $\mathbb{R}^2$, але застосувати не формули Френе, а модифіковані формули Френе:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k^*\\ -k^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{n}\end{pmatrix}$$

Рекомендація – спробувати повторити доведення самостійно.

Натуральне рівняння плоскої кривої

$$k^* = k^*(s)$$

або

$$\begin{cases} s = s(t) \\ k^* = k^*(t) \end{cases}$$

Визначає форму і розміри кривої, не визначає розташування на площині.

Приклад 1. $k^* \equiv \boldsymbol{0} \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{\gamma}$ – пряма

Приклад 2. $k^* \equiv \boldsymbol{c} \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{\gamma}$ – коло радіуса $\dfrac{1}{|c|}$

Приклад 3. $k^* \equiv as+b \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{\gamma}$ – ?

6.4. Конструктивний методі відновлення кривої в $\mathbb{R}^2$ за заданою функцією кривини

Розглядаємо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^2$, параметризовану натуральним параметром:

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = f^1(s) \\ x^2 = f^2(s) \end{cases}$$

Дотичний вектор

$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{ds} \\ \dfrac{df^2}{ds} \end{pmatrix}$$

має одиничну довжину:

$$\left(\frac{df^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{df^2}{ds}\right)^2 \equiv 1$$

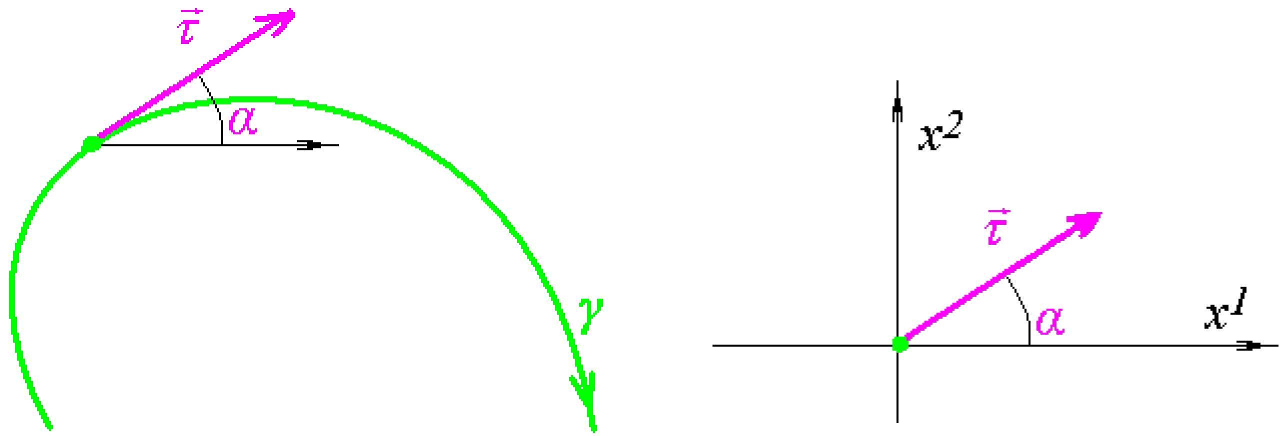
Тому ми можемо записати

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{f}}{ds}=\begin{pmatrix}\dfrac{df^1}{ds}\\ \dfrac{df^2}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},$$

де α – кут між дотичним вектором $\vec{\tau}=\dfrac{d\vec{f}}{ds}$ і напрямком координатної осі x^1.

Відповідно, для вектора $\vec{n}$ маємо:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}-\dfrac{df^2}{ds}\\ \dfrac{df^1}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$



Обчислимо похідну $\vec{\tau}\,'$ і застосуємо модифіковану формулу Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{pmatrix} \quad , \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k^{*}\cdot\vec{n} = k^{*}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Звідси, отримуємо:

$$\boxed{k^{*} = \frac{d\alpha}{ds}}$$

Алгоритм відновлення кривої γ в площині $\mathbb{R}^2$ за заданою функцією кривини зі знаком $k^*(s)$

Крок 1) $\dfrac{d\alpha}{ds} = k^* \quad \Rightarrow \quad \alpha = \int\limits_{s_0}^{s} k^* ds + \alpha_0$

Крок 2) $\begin{cases} \dfrac{df^1}{ds} = \cos\alpha \\ \dfrac{df^2}{ds} = \sin\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^1 = \int\limits_{s_0}^{s} \cos\alpha \, ds + f_0^1 \\ f^2 = \int\limits_{s_0}^{s} \sin\alpha \, ds + f_0^2 \end{cases}$

Вибір константи α_0 відповідає обертанню на кут α_0 в площині $\mathbb{R}^2$.

Вибір констант $\left(f_0^1, f_0^2\right)$ відповідає паралельному переносу в площині $\mathbb{R}^2$.

Задача. Які умови на функцію $k^*(s)$ є необхідними і достатніми для того, щоб відновлений радіус-вектор $\vec{f}(s)$ кривої γ був періодичною вектор-функцією з періодом L, тобто, щоб γ була замкнутою кривою довжини L?

Приклад 1. $k^{*} \equiv \boldsymbol{0} \;\; \to \;\; \boldsymbol{\gamma}$ – пряма

Крок 1) $\dfrac{d\alpha}{ds} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \int\limits_{s_0}^{s} 0\,ds + \alpha_0 = \alpha_0$

Крок 2) $\begin{cases} \dfrac{df^1}{ds} = \cos\alpha_0 \\ \dfrac{df^2}{ds} = \sin\alpha_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} f^1 = \int\limits_{s_0}^{s} \cos\alpha_0 \; ds + f_0^1 = \cos\alpha_0 \cdot (s - s_0) + f_0^1 \\ f^2 = \int\limits_{s_0}^{s} \sin\alpha_0 \; ds + f_0^2 = \sin\alpha_0 \cdot (s - s_0) + f_0^2 \end{cases}$

$$\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \cdot (s - s_0) + f_0^1 \\ \sin\alpha_0 \cdot (s - s_0) + f_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} f_0^1 - s_0 \cos\alpha_0 \\ f_0^2 - s_0 \sin\alpha_0 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. $k^* \equiv \boldsymbol{c} \;\; \to \;\; \boldsymbol{\gamma}$ – коло радіуса $\dfrac{1}{|c|}$

Крок 1) $\dfrac{d\alpha}{ds} = c \quad \Rightarrow \quad \alpha = \int\limits_{s_0}^{s} c\,ds + \alpha_0 = c(s - s_0) + \alpha_0 = cs + \tilde{\alpha}_0$

Крок 2) $\begin{cases} \dfrac{df^1}{ds} = \cos(cs + \tilde{\alpha}_0) \\ \dfrac{df^2}{ds} = \sin(cs + \tilde{\alpha}_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^1 = \int\limits_{s_0}^{s} \cos(cs + \tilde{\alpha}_0)\,ds + f_0^1 = -\dfrac{1}{c}\sin(cs + \tilde{\alpha}_0) + \tilde{f}_0^1 \\ f^2 = \int\limits_{s_0}^{s} \sin(cs + \tilde{\alpha}_0)\,ds + f_0^2 = \dfrac{1}{c}\cos(cs + \tilde{\alpha}_0) + \tilde{f}_0^2 \end{cases}$

$$\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c}\sin(cs + \tilde{\alpha}_0) + \tilde{f}_0^1 \\ \dfrac{1}{c}\cos(cs + \tilde{\alpha}_0) + \tilde{f}_0^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -\sin(cs + \tilde{\alpha}_0) \\ \cos(cs + \tilde{\alpha}_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_0^1 \\ \tilde{f}_0^2 \end{pmatrix}$$

Приклад 3. $k^{*} \equiv as+b \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} - ?$

Проаналізувати самостійно

Приклад 4. $k^{*} \equiv e^{s} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} - ?$

Проаналізувати самостійно