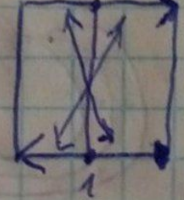
38.6. X хаусдорфовий, $A \subset X$ - ретракт $\Rightarrow$ A замкнена.
Нехай $f : X \to A$ - ретракція. $\forall x \notin A$ $f(x) \in A$, тому $f(x) \neq x$.
За хаусдорф., $\exists$ відкр. $U \ni x$, $V \ni f(x)$: $U \cap V = \varnothing$. f - непер.
$\Rightarrow f^{-1}(V)$ - відкр. окіл x $\Rightarrow$ $U \cap f^{-1}(V)$ - відкр. окіл x. $\forall$
$y \in U \cap f^{-1}(V)$ $f(y) \in V \Rightarrow f(y) \notin U \Rightarrow f(y) \neq y$, тобто $U \cap$
$f^{-1}(V) \subset X \setminus A$. Т.ч., $X \setminus A$ відкр. $\Rightarrow$ A замкн.

39.2. $X \sim Y \Rightarrow X$ та Y мають однакову кількість компонент лінійної зв'язності.
Отже, $\exists f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$; $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$.
Якщо A - компонента лін. зв-сті X, то $f(A)$ - лін. зв. за неперервністю f $\Rightarrow$ міститься у деякій комп. лін. зв. Y. Позначимо її $\tilde{f}_*(A)$. Т.ч., коректно визначене $\tilde{f} : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, де $\pi_0(X)$, $\pi_0(Y)$ - множини компонент

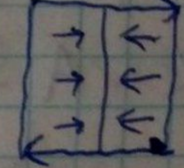
лін. зв-сті X, Y відп. Аналогічно визначене $\tilde{g}:\pi_0(Y)\to\pi_0(X)$.
$\forall$ комп. лін. зв. $A\subset X$ $\tilde{g}\circ\tilde{f}(A)$ — це комп. лін. зв. точки $g(f(x))$, де $x\in A$ — будь-яка точка. Але $g\circ f\sim id_X$, тому $g(f(x))\in A$. Т.ч., $\tilde{g}\circ\tilde{f}=id_{\pi_0(X)}$. Ан-но, $\tilde{f}\circ\tilde{g}=id_{\pi_0(Y)}$.
Т.ч. це біекції, тому $|\pi_0(X)|=|\pi_0(Y)|$.
взаємно обернені

39.5. Лист Мебіуса гомот. екв. колу S^1.

Лист Меб. $X = I\times I/\sim$:



$(x,0)\sim(1-x,1)$.



Тоді $A:=\{\frac{1}{2}\}\times I/\sim\ \subset X$ — відрізок зі склеєними кінцями $(\frac{1}{2},0)\sim(\frac{1}{2},1)$, тобто $A\cong S^1$.
Ортог. проекція $f:(x,y)\mapsto(\frac{1}{2},y)$ на $\{\frac{1}{2}\}\times I$ непер. і факторизується у $\tilde{f}:X\to A$ (бо $(x,0)\mapsto(\frac{1}{2},0)$, $(1-x;1)\mapsto(\frac{1}{2},1)$) — неперервне і $\tilde{f}([(\frac{1}{2},y)])=[\frac{1}{2},y]$, тобто $\tilde{f}|_A=id_A$ — ретракція.
$F: I\times I\times I\to I\times I : (x,y,s)\mapsto(\frac{1}{2}s+x(1-s),y)$ — непер.,

і $F(1-x, 1, z) = (\frac{1}{2}z + (1-x)(1-z), 1) = (1 - \frac{1}{2}z - x(1-z), 1) \sim$
$\sim (\frac{1}{2}z + x(1-z), 0) = F(x, 0, z)$ $\forall x, z$, тому F факторизується у неперервне $\tilde{F}: X \times I \to X$. Оскільки $F(x,y,0) = (x,y)$ і $F(x,y,1) = (\frac{1}{2}, y) = f(x,y)$, $\tilde{F}(\cdot, 0) = id_X$, $\tilde{F}(\cdot, 1) = \tilde{f}$. Отже, $\tilde{f} \sim id_X \Rightarrow A$ - деформ. ретракт $X \Rightarrow X \sim A \cong S^1$.

<u>39.13(3)</u> Побудувати деформаційну ретракцію $S^3 \setminus S^1 \to S^1$.

Раніше будували деф. ретракцію $f: \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \to S^1$.
Оберемо $x_0 \in S^1 \subset S^3$. Нехай $\Phi: S^3 \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^3$ - стереогр. проекція. Тоді Φ переводить $S^1 \setminus \{x_0\}$ у пряму $\mathbb{R}^1 \Rightarrow \Phi|_{S^3 \setminus S^1}: S^3 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$ - гомеоморфізм.
$\Phi^{-1}(S^1) \cong S^1$ - підмножина $S^3 \setminus S^1$, і $\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ - ретракція. Якщо F - гомотопія f і $id_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1}$, то $\tilde{F}: S^3 \setminus S^1 \times I \to S^3 \setminus S^1 : (x, z) \mapsto \Phi^{-1}(F(\Phi(x), z))$ -

rozumemia $\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ i $id_{S^3 \setminus S^1}$.

39.17. (1,5,6). Згадаємо, що X стягний $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X: id_X \sim x_0$ (пост. на x_0)

1-5 X стягний $\Leftrightarrow \forall Y \ \forall f \in C(Y,X)$ $f \sim$ постійному.

$\Leftarrow$. Застосуємо умову до $Y = X$ і $f = id_X$.

$\Rightarrow$. $id_X \sim x_0 \Rightarrow f = id_X \circ f \sim x_0 \circ f = x_0$ – постійне.

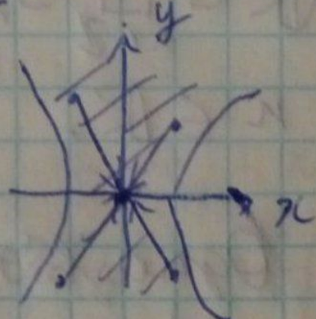
1-6. X стягний $\Leftrightarrow \forall Y \ \forall f \in C(X,Y)$ $f \sim$ постійному

$\Leftarrow$. Знову застосуємо до $Y = X$ і $f = id_X$.

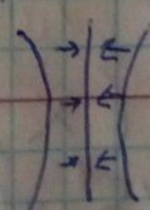
$\Rightarrow$. $id_X \sim x_0 \Rightarrow f = f \circ id_X \sim f \circ x_0 = f(x_0)$ – постійне.

39.19(3). Чи стягний $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$.

Так



Бо вона зірчата відн. $(0,0)$. Або: будуємо деф. ретр. на $(0,0)$: $(x,y) \mapsto (0,0)$, лінійно гомотопна id_X.

Або спочатку на $\mathbb{R}$:  , потім $\mathbb{R} \sim \{0\}$.

39.20 $X \times Y$ стягний $\Leftrightarrow$ X і Y стягні.

$\Leftarrow$. з доведеного вище: $X \sim \{x\}$, $Y \sim \{y\} \Rightarrow X \times Y \sim \{x\} \times \{y\}$.

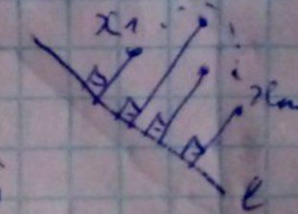
$\Rightarrow$. як відомо з лекцій, $\exists$ $(x_0, y_0) \in X \times Y$: постійне $f: X \times Y \to (x_0, y_0)$ гомотопне $id_{X \times Y}$. Нехай F – гомотопія. Тоді, ан-но доведеному вище, $F_X : (x, z) \mapsto P_X(F(x, y_0, z))$ – непер.,
$F_X(x, 0) = P_X(F(x, y_0, 0)) = P_X((x_0, y_0)) = x_0$ і $F_X(x, 1) = P_X(F(x, y_0, 1)) = P_X((x, y_0)) = x$, тобто це гомотопія пост. на x_0 і $id_X \Rightarrow$ X стягний. Ан-но Y.

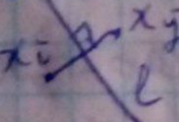
39. H. Нехай $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^2 : x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Тоді

$\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^n \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}.$

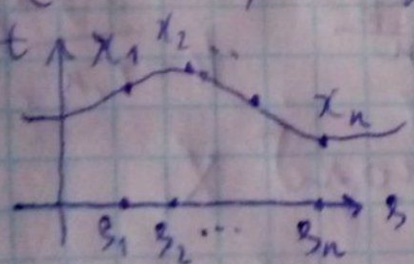
1. (11.23). $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{y_i\}_{i=1}^{n}$ $\forall$ точок: $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$.

Очевидно, достатньо показати для $y_i = (i, 0)$, $i = \overline{1,n}$.
$\exists$ пряма $l \subset \mathbb{R}^2$: усі ортог. проекції на неї $\{x_i\}$ попарно різні. Дійсно, для $\forall$ пари x_i, x_j нас влаштує $\forall$ напрямок прямої крім $\perp [x_i, x_j]$;





зробивши так $\forall$ пари i, j, виключимо лише скінч. кільк. напрямків. Введемо координати (ξ, t), для яких $l = O\xi$, тоді у $\{x_i = (\xi_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ усі ξ_i поп. різні.

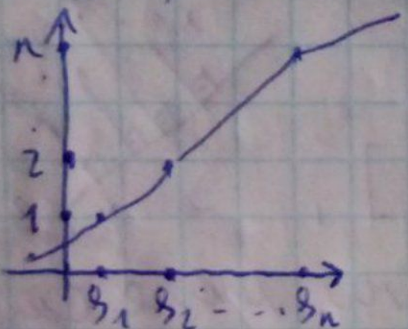


Перенумеруємо їх так, що $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$.
$\Rightarrow \exists \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \varphi(\xi_i) = t_i$, $i = \overline{1,n}$ (наприклад, кусково лінійна).

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (\xi, t) \mapsto (\xi, \varphi(\xi) - t)$ непер. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ інволюція: $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. Тому $f^{-1} = f \Rightarrow$ це гомеоморфізм. $\forall i$ $f(x^i) = (\xi^i, 0)$.

Отже f індукує гомео-зм $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^n \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(s_i,0)\}_{i=1}^n$.

Нарешті, $\exists$ строго монотонна $\psi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $\psi(s_i) = i$, $i=\overline{1,n}$



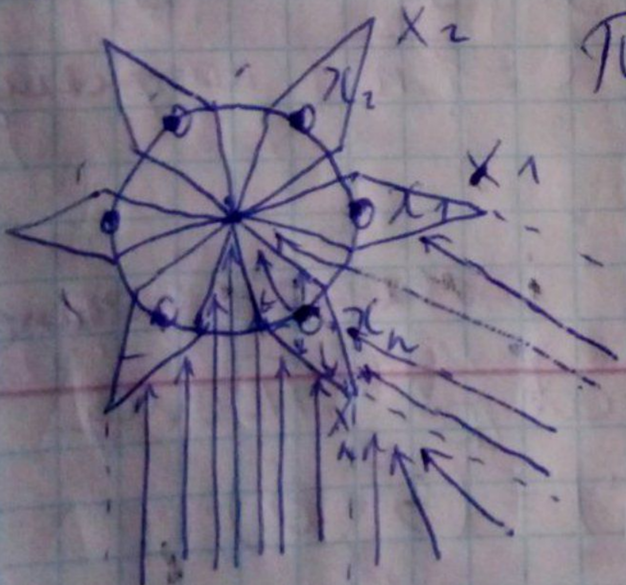
(наприклад, теж кусн. лінійна). Тоді:

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (s,t) \mapsto (\psi(s), t)$ - непер., бієк.,

$g^{-1} : (s,t) \mapsto (\psi^{-1}(s), t)$ - непер. $\Rightarrow$ g - гомео-зм,

що індукує гомео-зм $\mathbb{R}^2 \setminus \{(s_i,0)\}_{i=1}^n \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(i,0)\}_{i=1}^n$.

2. З 1, можемо без обмеження загальності вважати, що $x_i \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ $\forall\, i$. Скажімо, $x_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k=\overline{1,n}$.



Побудуємо навколо кожної x_i ромб X_i.

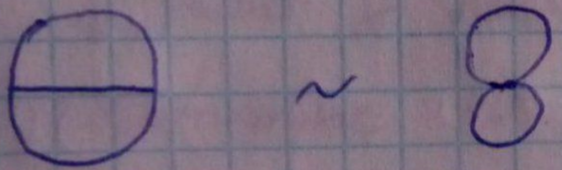
Тоді $\exists$ деформаційна ретракція

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_i\}_{i=1}^n \to \bigcup\limits_{i=1}^n X_i \cong \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$

(у кожному ромбі будується за допомогою $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ і гомео-зма ромба і кола), за їх лемами - як на малюнку). За побудовою, лінійна гомотопія $(x,s) \mapsto (1-s)f(x) + sx$ демонструє, що $f \sim id_X$, тобто є деформ. ретракцією.

<u>39.I.</u> $x, y \in S^1$, $x \neq y$. Тоді $S^1 \cup [x,y] \sim S^1 \vee S^1$.

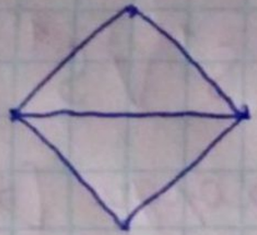
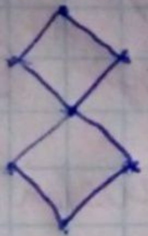
Можемо без обм. загальності вважати хорду $[x,y]$ діаметром:

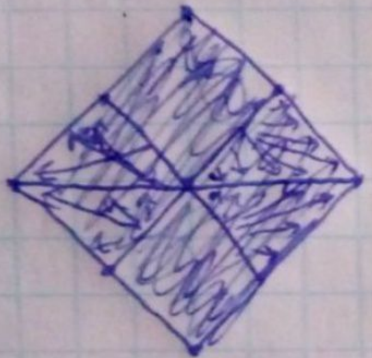
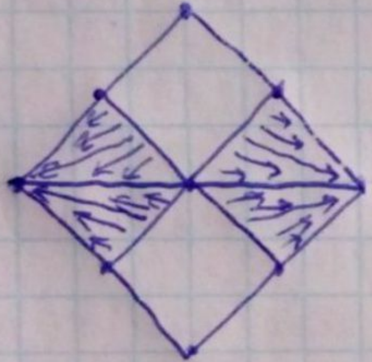
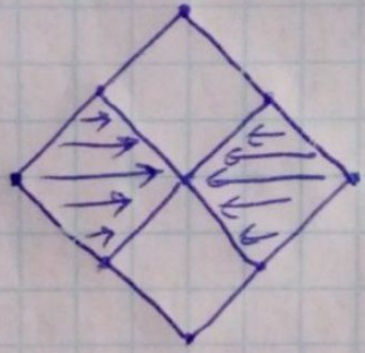


Розглянемо $X \subset \mathbb{R}^2$:

X

Тоді

$X_1 =$  і $X_2 =$  - його деформаційні ретракти. Ретракції мають вигляд:

(гомотопії $f_1 \sim id_X$, $f_2 \sim id_X$ теж можна побудувати лінійно)

$f_1 : X \to X_1$ $\qquad$ $f_2 : X \to X_2$

Отже, $S^1 \cup [x,y] \cong X_1 \sim X \sim X_2 \cong S^1 \vee S^1$.