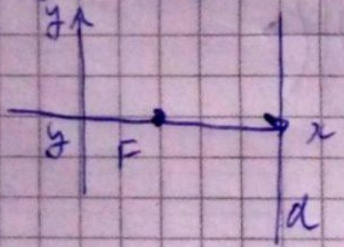
765. Знайти рівн. лінії II пор. з фокусом $F(2,0)$, відп. директрисою $d: x=5$, знаючи, що лінія прох. через $M(10,6)$. Знайти інші фокус та директрису.

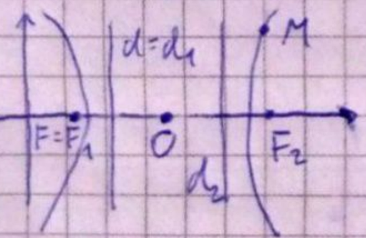


З картинки видно, що це гіпербола, і F, d – її ліві фокус і дир. Але перевіряємо це за директоріальною властивістю:

M належить кривій $\iff \dfrac{MF}{\operatorname{dist}(M,d)} = \varepsilon$ – ексцентриситет.

У нас:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(10-2)^2+(6-0)^2}}{|10-5|} = \frac{10}{5} = 2 > 1 \Rightarrow \text{гіпербола}$$



Фокальна вісь – це Ox, тобто центр у $O(x_0,0)$ і рівняння:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Фокуси $F=F_1(x_0-c,0)$, $F_2(x_0+c,0)$

Директриси $d=d_1: x = x_0 - \frac{a}{\varepsilon}$, $d_2: x = x_0 + \frac{a}{\varepsilon}$

При цьому $c = \sqrt{a^2+b^2}$ і $\frac{c}{a} = \varepsilon = 2$, тобто $c = 2a$.

Т.ч. $\begin{cases} x_0 - \frac{a}{2} = 5 \\ x_0 - 2a = 2 \end{cases}$

$\frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2$, $c=4$, $x_0 = 6$, $b = \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Рівн. $\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, $3(x-6)^2 - y^2 - 12 = 0$, $3x^2 - y^2 - 36x + 96 = 0$

Праві фокус і директриса: $F_2(x_0+c,0) = (10,0)$, $d_2: x = x_0 + \frac{a}{\varepsilon} = 7$

Або рівняння можна знайти безпосередньо з директоріальної властивості:

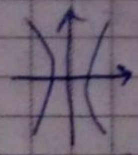
$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-5|}=2$$

$$x^2-4x+4+y^2=4(x^2-10x+25)$$

$$3x^2-y^2-36x+96=0$$

769 Знайти ексцентриситет рівнобічної гіперболи.

У канон. вигляді: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\underbrace{b^2}_{=a^2}}=1$

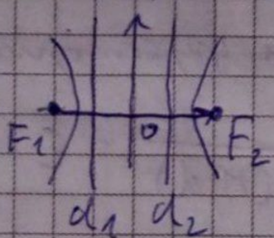


$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$.

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

762. Знайти фокуси і директриси гіперболи $2xy=a^2$.

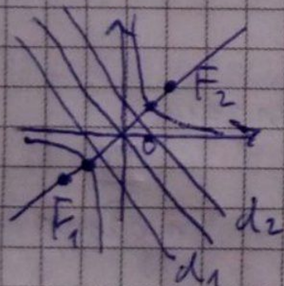
Для канонічної:



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$F_{1,2}(\pm c,0)$, $d_{1,2}: x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

У нас:



Гіп. рівнобічна,

тому $c=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$, $\varepsilon=\sqrt{2}$ як у попер. задачі.

Фокальна вісь: $x=y$, тому $F_{1,2}(x,x)$. Вони знах. на відстані $c=\sqrt{2}\,a$ від центру $(0,0)$:

$\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}\,a$, $2x^2=2a^2$, $x=\pm a \Rightarrow F_{1,2}(\pm a,\pm a)$.

(точніше, $F_1(-a,-a)$, $F_2(a,a)$ якщо як на рисунку).

Директриси $\perp$ фокальній осі $x-y=0$, тобто мають рівн.

$$x+y+\lambda=0$$

Відстань від центру $(0,0)$ дор. $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a}{\sqrt{2}}$:

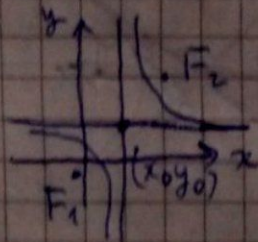
$\frac{|0+0+\lambda|}{\sqrt{1+1}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $|\lambda|=a$, $\lambda=\pm a \Rightarrow d_{1,2}: x+y\pm a=0$.

(точніше, $d_1: x+y+a=0$, $d_2: x+y-a=0$).

786. Рівнобіч. гіп., фокус (2,0), асимпт. $x=1$.

Узагальнимо попер. задачу на гіп. з центром (x_0,y_0):

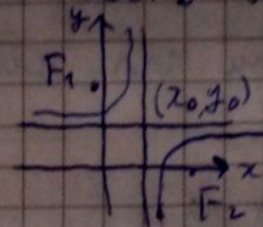
I



$$2(x-x_0)(y-y_0)=a^2$$

$F_1(x_0-a, y_0-a)$, $F_2(x_0+a, y_0+a)$

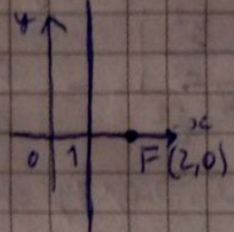
II



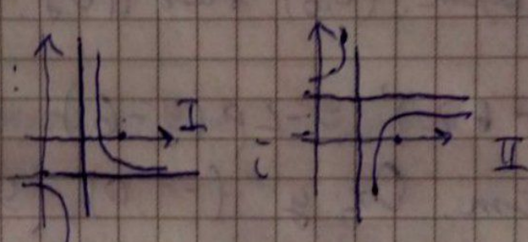
$$2(x-x_0)(y-y_0)=-a^2$$

$F_1(x_0-a, y_0+a)$, $F_2(x_0+a, y_0-a)$.

У нас:



Можливі обидва варіанти:



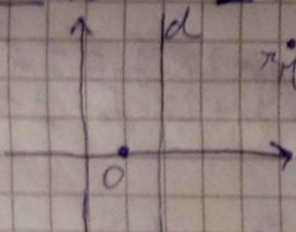
$x_0=1$, і в $\forall$ разі це правий фокус: $x_0+a=2 \Rightarrow a=2-x_0=1$

Вар. I: $y_0+a=0 \Rightarrow y_0=-a=-1$. Рівн. $2(x-1)(y+1)=1$.

Вар. II: $y_0-a=0 \Rightarrow y_0=a=1$. Рівн.: $2(x-1)(y-1)=-1$

787. Лінія II порядку, центр у $O(1,0)$, директриса $d: x=2$, $\ni M(5,6)$

Знайти рівн.



Це гіпербола. Оск. фокальна вісь прох. через O перп. до d, це Ox, тобто рівн.:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$(x_0,y_0)=(1,0)$: $\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

d – права дир., рівн. у заг. вигляді: $x=x_0+\frac{a}{\varepsilon}$

У нас: $2=x_0+\frac{a}{\varepsilon}=1+\frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon}=1$, $a=\varepsilon$.

$\varepsilon=\frac{c}{a} \Rightarrow c=a\varepsilon=a^2 \Rightarrow a^2+b^2=c^2=a^4 \Rightarrow b^2=-a^2+a^4$

Далі підставляємо (5,6) у рівн. або у директоріальну власт.

$$\frac{(5-1)^2}{a^2} - \frac{6^2}{a^4-a^2} = 1$$

$$16(a^2-1) - 36 = a^4 - a^2$$

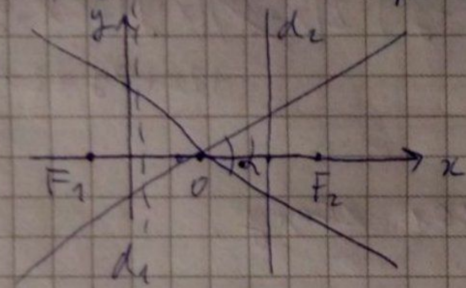
$$a^4 - 17a^2 + 52 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(17 \pm \sqrt{289 - 208}\right) = \frac{1}{2}(17 \pm 9)$$

$a^2 = 13 \Rightarrow 6^2 = 169 - 13 = 156$; $\quad \frac{(x-1)^2}{13} - \frac{y^2}{156} = 1$.

$a^2 = 4 \Rightarrow 6^2 = 16 - 4 = 12$; $\quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

783. Гп., фокус $(-2,0)$, дир. $x=7$ відп. іншому фокусу, кут α між ас., що містить фокус, дор. $\frac{4}{3}$. Знайти рівн.



Фок. вісь – Ox (прох. через фокуси, $\perp$ директрисам), тому центр у $(x_0, 0)$, рівн. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$.

Це лівий фокус: $(-2,0) = (x_0 - c, 0) \Rightarrow x_0 - c = -2$.

і права директриса: $x = 7$ збіг. з $x = x_0 + \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow x_0 + \frac{a}{\varepsilon} = 7$.

Асимптоти: $y = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$. Кут. коефіцієнт $\frac{b}{a} = tg\frac{\alpha}{2}$.

$$\frac{4}{3} = tg\,\alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow 4 - 4\frac{b^2}{a^2} = 6\frac{b}{a}$$

$$2\frac{b^2}{a^2} + 3\frac{b}{a} - 2 = 0$$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{4}\left(-3 \pm \sqrt{9+16}\right)$ і $\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

Отже, $a = 2b \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5}\,b$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{cases} x_0 - \underbrace{\sqrt{5}\,b}_{c} = -2 \\ x_0 + \underbrace{\frac{a}{\varepsilon}}_{=\frac{4b}{\sqrt{5}}} = 7 \end{cases}$$

$9 = \frac{4b}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\,b = \frac{9b}{\sqrt{5}} \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow a = 2b = 2\sqrt{5} \Rightarrow x_0 = -2 + \sqrt{5}\,b = 3$.

$$\frac{(x-3)^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

787. Знайти рівн. еліпса з фокусами $F_1(1,0)$, $F_2(0,1)$ і великою ~~віс~~ віссю $2a = 2$.

Фокальна властивість:

$$MF_1+MF_2=2a$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$$

$$x^2-2x+1+y^2+x^2+y^2-2y+1+2\sqrt{(x^2-2x+1+y^2)(x^2+y^2-2y+1)}=4$$

$$\sqrt{\dots}=1-x^2-y^2+x+y$$

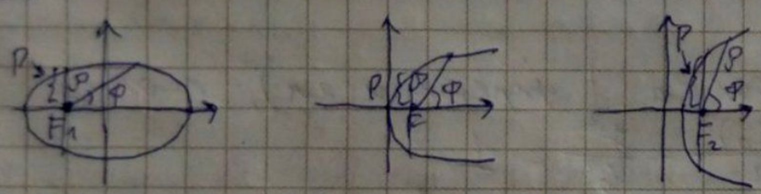
$$(x^2+y^2+1-2x)(x^2+y^2+1-2y)=(x^2+y^2-1-x-y)^2$$

$$\cancel{(x^2+y^2)^2}+(x^2+y^2)\underbrace{(1-2x+1-2y)}_{2(1-x-y)}+(1-2x)(1-2y)=\cancel{(x^2+y^2)^2}-2(x^2+y^2)(1+x+y)+(1+x+y)^2$$

$$2(x^2+y^2)-2\cancel{(x^2+y^2)}(x+y)+\cancel{1}-2x-2y+4xy=-2(x^2+y^2)-2\cancel{(x^2+y^2)}(x+y)+\cancel{1}+x^2+y^2+2x+2y+2xy$$

$$3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$$

799. Знайти рівн. параболи $y^2=8x$ у пол. коорд.



Рівн. еліпса, параболи, правої вітки гіперболи: $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, де p – фок. параметр, $p=\frac{b^2}{a}$ для канон. еліпса і гіперболи.

Тут $p=4$, $\varepsilon=1 \Rightarrow \rho=\frac{4}{1-\cos\varphi}$.

798. Полярне рівн. лінії II пор. $\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$. Знайти канон.

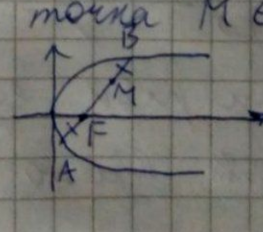
$$\rho=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{5}{4}\cos\varphi} \Rightarrow p=\frac{9}{4},\ \varepsilon=\frac{5}{4}>1 \Rightarrow \text{це гіпербола}$$

$$\frac{5}{4}=\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{4}.$$

$$\frac{9}{4}=p=\frac{b^2}{a} \Rightarrow b=\frac{b^2}{a}\Big/\frac{b}{a}=\frac{9}{4}\Big/\frac{3}{4}=3,\quad a=4.$$

Канон. рівн.: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

802. Через фокус F параболи проводяться усі можливі хорди AB, $AF \leq FB$, на кожній береться точка $M \in FB$: $FM = FB - FA$. Знайти ГМТ M



Введемо полярну с.к. Рівн. пар.: $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$

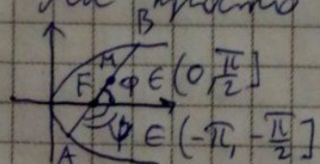
Для $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ B відповідає φ, а A — $\varphi+\pi$.

для $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ A відп. φ, B — $\varphi+\pi$.

В першому вар. для M $\rho = FM = FB - FA = \dfrac{p}{1-\cos\varphi} - \dfrac{p}{1-\cos(\varphi+\pi)} =$

$$= p\left(\frac{1}{1-\cos\varphi} - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right) = p\,\frac{1+\cos\varphi-1+\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

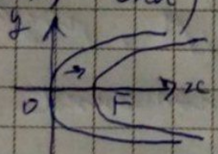
~~Аналогічно для другого~~ $\cancel{\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}$ Для кутів з другої множини $\cancel{\rho = \frac{2p|\cos\varphi|}{\sin^2\varphi}}$ ми просто отримаємо ті ж точки другий раз:



Отже, пол. рівн.: $\rho = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$

$$\rho^2\sin^2\varphi = 2p\rho\cos\varphi.$$

Перейдемо до дек.: $y^2 = 2px$. Це парабола з тим же пар. p (тобто ізометрична) і віссю Ox, але з вершиною у фокусі вихідної. (паралельно перенесена)



828. Знайти рівн. дотичних до еліпса

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1,$$

що проведені з $A(12,-3)$

Рівн. дотичної: $\dfrac{xx_0}{32}+\dfrac{yy_0}{18}=1$. Тут (x_0,y_0) — точка дотику, тобто точка еліпса. $A \in$ цій дотичній. Маємо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{12x_0}{32} - \dfrac{3y_0}{18} = 1 \\ \dfrac{x_0^2}{32}+\dfrac{y_0^2}{18}=1\end{cases} \qquad \frac{3x_0}{8} - \frac{y_0}{6} = 1$$

~~Звідси~~ $y_0 = 6\left(\dfrac{3x_0}{8}-1\right) = \dfrac{9x_0}{4}-6$

$$\frac{x_0^2}{32}+\frac{1}{18}\cdot 36\left(\frac{3x_0}{8}-1\right)^2 = 1.$$

$$\frac{x_0^2}{32}+2\left(\frac{9x_0^2}{64}-\frac{3x_0}{4}+1\right) = 1$$

$$\frac{10x_0^2}{32}-\frac{3x_0}{2}+1=0$$

$$10x_0^2-48x_0+32=0$$

$$x_0 = \frac{24 \pm \sqrt{24^2-320}}{10} = \frac{24 \pm 16}{10}$$

$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \frac{9x_0}{4} - 6 = 3$, рівн. $\frac{4x}{32} + \frac{3y}{18} = 1$, $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$, $3x + 4y - 24 = 0$

$x_0 = \frac{4}{5} \Rightarrow y_0 = -\frac{21}{5}$, рівн. $\frac{4x}{5\cdot 32} - \frac{21\cdot y}{5\cdot 18} = 1$, $\frac{x}{40} - \frac{7y}{30} = 1$, $3x - 28y - 120 = 0$

Або: можна розглядати жмуток прямих, що прох. через A, і знайти серед них дотичні.

$$\begin{cases} x = 12 + \lambda t \\ y = -3 + \mu t \end{cases}$$ – пряма з напр. вектором (λ, μ)

Перетин з еліпсом:

$$\frac{(12+\lambda t)^2}{32} + \frac{(-3+\mu t)^2}{18} = 1$$

$$9(12+\lambda t)^2 + 16(-3+\mu t)^2 = 288$$

$$(9\lambda^2 + 16\mu^2)t^2 + (216\lambda - 96\mu)t + 1152 = 0$$

Точки перетину для дотичної збігаються, тобто

$$D = (216\lambda - 96\mu)^2 - 4(9\lambda^2 + 16\mu^2)\cdot 1152 = 0$$

Це однорідне квадр. рівн. на λ, μ, розв'язком будуть дві пари (λ, μ) з точністю до множення на коефіцієнт.