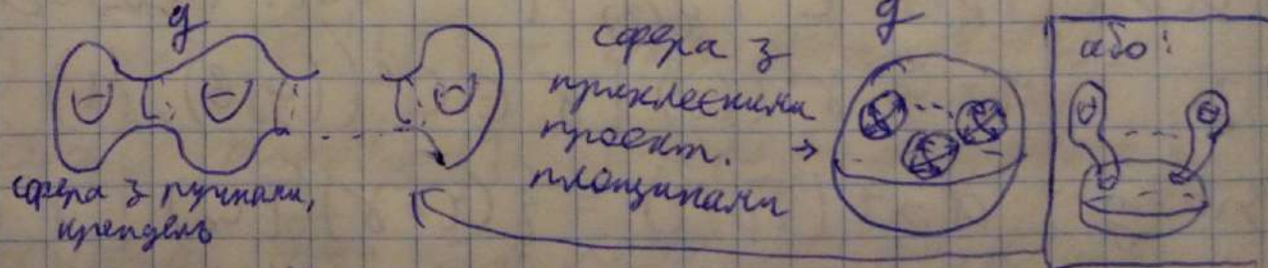
# Теореми про занурення і вкладення

**Th.** (Уітні) Нехай $M$ – $n$-вимірний $k$-гладкий многовид, $k \geq 1$. Тоді існують $k$-гладкі занурення $M \to \mathbb{R}^{2n-1}$ і вкладення $M \to \mathbb{R}^{2n}$.

**Rem.** Тобто $\forall$ многовид можна вважати підмноговидом $\mathbb{R}^N$.

**Ex.** При $n=2$ і компактному зв'язному $M$: $M$ $k$-дифеоморфний $S^2$ або $\underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g}$ або $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g}$ (зв'язні суми), $g$ наз. родом $M$.

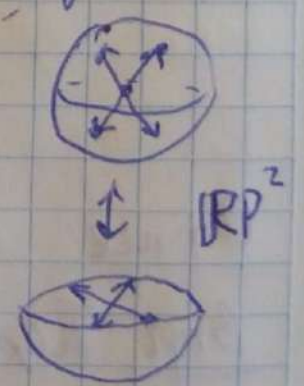



Зазвичай операції зв'язної суми і ця теорема розглядаються у топології у неперервному випадку, але це працює і $\forall$ гладкості $k$ (див. Рохлін-Фукс або Уоллес).

Для $S^2$ і $T^2\#\ldots\#T^2$ $\exists$ вкладення в $\mathbb{R}^3$ (максимальної гладкості). Занурення і вкладення $\mathbb{R}P^2\#\ldots\#\mathbb{R}P^2$ будуються за допомогою зан. і вкл. $\mathbb{R}P^2$. Вкладення в $\mathbb{R}^3$ не існує, але існують занурення макс. гладкості (для $\mathbb{R}P^2$ – поверхня Боя, для $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ – пляшка Клейна)

Нарешті, побудуємо $\infty$-гл. вкладення $\mathbb{R}P^2$ у $\mathbb{R}^4$:

$\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2 = \{(u:v:w) \mid u^2+v^2+w^2=1\}$, де $(u:v:w) = \{(u,v,w),(-u,-v,-w)\}$ – пара діам. протилежних точок $S^2$. Отже, визначимо $\varphi: \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$:




$$(u:v:w) \mapsto (uv,\ uw,\ vw,\ u^2-v^2),$$

воно коректно визначене ($(u,v,w)$ і $(-u,-v,-w)$ переходять в одну точку) і неперервне як факторизація неперервного $S^2 \to \mathbb{R}^4$.

На $\{w \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^2$ введемо лок. коорд. $(u, v)$ ($u^2+v^2<1$, тобто образ карти – не $\mathbb{R}^2$, а $B_1^2$), а сама карта – ~~[illegible]~~ індукована ортог. проекцією точок з пари $(u:v:w)$, де $w>0$, на площину $Ouv$). Лок. задання $\varphi$:

$$(u, v) \mapsto \underbrace{\left(uv,\ u\sqrt{1-u^2-v^2},\ v\sqrt{1-u^2-v^2},\ u^2-v^2\right)}_{\text{Воно гл.-н.}}.$$

М-ця Якобі:

$$\begin{pmatrix} v & u \\ \frac{1-2u^2-v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{-uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{1-u^2-2v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Мінор 1 і 4 рядку дає $-2(u^2+v^2) \neq 0$ при $(u,v) \neq (0,0)$. При $(u,v)=(0,0)$ мінор 2 і 3 рядку дає $1 \neq 0$.

Отже, $\forall p$ $\operatorname{rank}_p \varphi = 2$, тобто $\varphi$ – занурення на $\{w \neq 0\}$.

<u>Впр.</u> Перевірити у інших картах ($\{u \neq 0\}$ і $\{v \neq 0\}$).

В силу одного з <u>Рч.</u> вище, щоб перевірити, що $\varphi$ – вкладення, залишилося перевірити, що $\varphi$ – ін'є, бо $\mathbb{RP}^2$ – компакт.

Отже, нехай $\varphi(u:v:w) = \varphi(\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w})$:

$$\left.\begin{aligned} uv &= \tilde{u}\tilde{v} \\ u^2 - v^2 &= \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

піднесемо друге у квадрат, додаємо квадрат першого $\cdot 4$

$$(u^2+v^2)^2 = (\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} u^2+v^2 &= \tilde{u}^2+\tilde{v}^2 \\ u^2-v^2 &= \tilde{u}^2-\tilde{v}^2 \end{aligned}\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned} u^2 &= \tilde{u}^2 \\ v^2 &= \tilde{v}^2 \end{aligned}\right]$$

Якщо $u = \pm\tilde{u} \neq 0$:

$$\left.\begin{aligned} uv &= \tilde{u}\tilde{v} \\ uw &= \tilde{u}\tilde{w} \end{aligned}\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned} v &= \pm\tilde{v} \\ w &= \pm\tilde{w} \end{aligned}\right] \Rightarrow (u,v,w) = \pm(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}),$$ тобто

$(u:v:w) = (\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w})$.

Якщо $u = \tilde{u} = 0$ і $v = \pm\tilde{v} \neq 0$, то ан-но

$$vw = \tilde{v}\tilde{w} \Rightarrow w = \pm\tilde{w} \overset{!!}{\Rightarrow} (\underset{0}{u},v,w) = \pm(\underset{0}{\tilde{u}},\tilde{v},\tilde{w}).$$

Нарешті, якщо $u = \tilde{u} = v = \tilde{v} = 0$, то $(u,v,w) = (0,0,\pm1)$ і $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = (0,0,\pm1)$. У будь-якому випадку $(u:v:w) = (\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w})$.

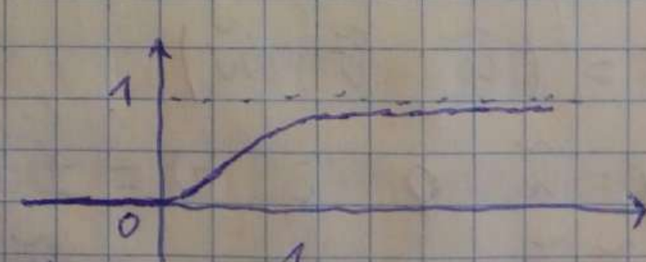
# Доведення "слабкої" теореми про вкладення

**Лем.** Нехай $M$ - $k$-гл. многовид, $k \geq 0$, $p \in M$, $U \subset M$ - відкрита, $p \in U$. Тоді існують відкриті $V, W \subset M$ : $p \in W$, $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$ і $\varphi \in C^k(M)$ : $\varphi(M) = [0,1]$, $\varphi(q) = 1 \Leftrightarrow q \in \overline{W}$ і $\varphi(q) = 0 \Leftrightarrow q \in M \setminus V$.

**Rem.** Зокрема, $\varphi$ є ф-цією Урисона пари замкнених множин $(M \setminus V, \overline{W})$ в $M$. Тому ми будемо її називати гладкою ф-цією Урисона.

▷ Почнемо з функції

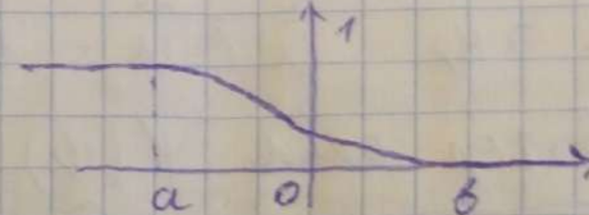
$$\alpha(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$




Оскільки $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ похідна $\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)^{(k)} = e^{-\frac{1}{t}} P_k\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t \to +0]{} 0$ (де $P_k$ - деякий поліном), $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Крім того, $\alpha(+\infty) = 1 - 0$.

Для $a < b \in \mathbb{R}$ визначимо

$$\beta_{a,b}(t) := \frac{\alpha(b-t)}{\alpha(b-t)+\alpha(t-a)}$$



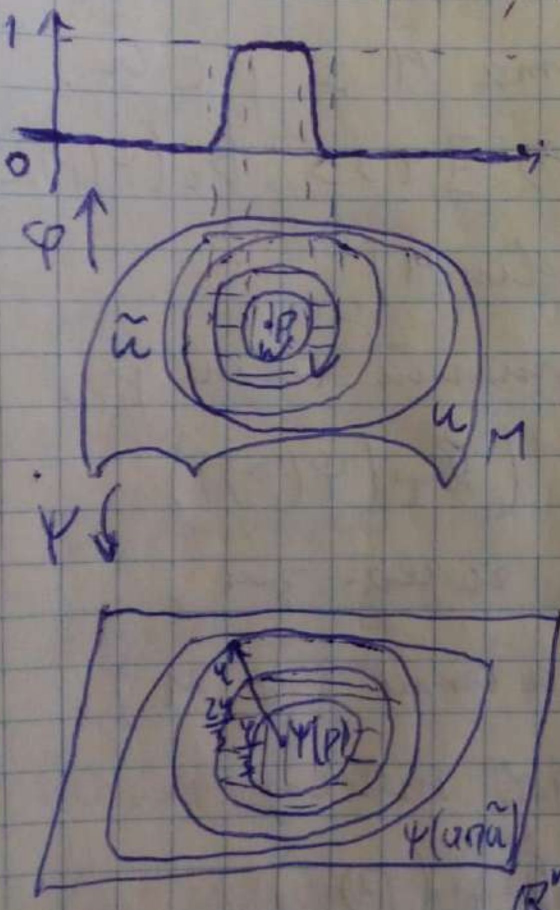

З властивостей $\alpha$:

$\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\beta(\mathbb{R}) = [0,1]$, $\beta(t) = 0 \Leftrightarrow t \geq b$, $\beta(t) = 1 \Leftrightarrow t \leq a$.

Отже, дані $p$ і $U \ni p$. Нехай $(\tilde{U}, \psi)$ - карта $M$ з $p \in \tilde{U}$.
Тоді $\psi(\tilde{U} \cap U)$ - відкр. окіл $\psi(p)$ у $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(\psi(p)) \subset$
$\subset \psi(\tilde{U} \cap U)$ (евклідова куля, як завжди, $n = \dim M$).
Позначимо $\tilde{B}_{r'}(p) := \psi^{-1}(B_{r'}(\psi(p)))$ - відкритий окіл $p$,
$\tilde{B}_{r'}(p) \subset U \cap \tilde{U}$ $\forall r' \in (0, r]$; $\tilde{D}_{r'}(p) := \psi^{-1}(D_{r'}(\psi(p)))$.
Оскільки $D_{r'}(\psi(p))$ - компакт в $\mathbb{R}^n$ і $\psi$ - гомео-зм,
$\tilde{D}_{r'}(p)$ - компакт (у індукованій топ. $\tilde{U}$, а отже і у $M$),
в силу хаусдорфовості, $\tilde{D}_{r'}(p)$ - замкнена, тому
$\overline{\tilde{B}_{r'}(p)} \subset \tilde{D}_{r'}(p)$ (бо, звичайно, $\tilde{B}_{r'}(p) \subset \tilde{D}_{r'}(p)$).
Доведено обернене включення: $\forall q \in \tilde{D}_{r'}(p)$ і

∀ відкр. $\tilde{\tilde{U}} \ni q$ $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U}$ - відкр. окіл $q$, тому $\psi(\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U})$ - відкр. окіл $\psi(q) \in D_{r'}(\psi(p))$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки $D_{r'}(\psi(p)) = \overline{B_{r'}(\psi(p))}$, $\psi(\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U}) \cap B_{r'}(\psi(p)) \neq \emptyset$, застосовуючи $\psi^{-1}$, отримаємо $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U} \cap \tilde{B}_{r'}(p) \neq \emptyset$. Оскільки

$\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{B}_{r'}(\psi(p))$




$\tilde{\tilde{U}}$ - довільний відкр. окіл $q$, це і означає $q \in \overline{\tilde{B}_{r'}(p)}$.

Отже, $\forall\, r' < r$ $\tilde{D}_{r'}(p) = \overline{\tilde{B}_{r'}(p)} \subset \tilde{B}_r(p) \subset U \cap \tilde{U}$.

Покладемо:

$$W := \tilde{B}_{\frac{r}{3}}(p), \quad V := \tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p).$$

За побудовою, вони відкриті, $p \in W$ і $\overline{W} = \tilde{D}_{\frac{r}{3}}(p) \subset \tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p) = V$, $\overline{V} = \tilde{D}_{\frac{2r}{3}}(p) \subset U$.

Нарешті, побудуємо $\varphi : M \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(q) := \begin{cases} \beta_{\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}}(|\psi(q) - \psi(p)|), & q \in \tilde{U}, \\ 0, & q \notin \tilde{U} \end{cases}$$

$|\cdot|$ – евкл. норма

Оскільки $\tilde{U}$ і $M\setminus\overline{V}$ утворюють відкр. покриття $M$, $\varphi$ $k$-гладка на $\tilde{U}$ (бо $\psi$ - $k$-гладкий дифео-зм, а $\beta$ і $|\cdot|$ - $\infty$-гладкі) і $\varphi = 0$ на $M\setminus\overline{V}$ за побудовою - тож макс. гладкості $k$, $\varphi$ неперервна і $k$-гладка на $M$ (бо це локальні властивості). З властивостей $\beta$ випливає, що $\varphi(M) = [0,1]$, $\varphi = 1$ в точності на $\tilde{D}_{\frac{r}{3}}(p) = \overline{W}$ і $= 0$ в точності на $M\setminus\tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p) = M\setminus V$. ▲

<u>Th.</u> (про вкладення). Нехай $M$ - $k$-гл. многовид, $k \geq 1$. Тоді $\exists$ $k$-гл. вкладення $M \to \mathbb{R}^N$ для деякого $N \in \mathbb{N}$.

<u>Rem.</u> При $k=0$ доведення теж працює і дає топологічне вкладення.

▷ Будемо доводити (як і <u>Th.</u> Уітні далі) для випадку компактного $M$. У загальному випадку можна скористатися, наприклад, розбиттям одиниці.

$\forall p \in M\ \exists$ карта $(U_p, \psi_p)$ з $p \in U_p$. Застосуємо лем. до $p$ і $U_p$: $\exists$ відкр. $V_p, W_p$ : $p \in W_p$, $\overline{W_p} \subset V_p$, $\overline{V_p} \subset U_p$ і ф-ція Урисона $\varphi_p \in C^k(M)$ : $\varphi_p(M) = [0,1]$, $\varphi_p(q) = 0$ $\Leftrightarrow q \in M \setminus V_p$ і $\varphi_p(q) = 1 \Leftrightarrow q \in \overline{W_p}$.

$\{W_p\}_{p \in M}$ — відкр. покриття $M$. $\exists$ скінченне підпокриття $\{W_{p_i}\}_{i=1}^m$. Перепозначимо $W_i := W_{p_i}$, $V_i := V_{p_i}$, $U_i := U_{p_i}$, $\varphi_i := \varphi_{p_i}$, $\psi_i := \psi_{p_i}$, $i = \overline{1,m}$.

$\forall i = \overline{1,m}$ визначимо $F_i : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ (де $n = \dim M$):

$$F_i(q) := \begin{cases} (\varphi_i(q)\psi_i(q), \varphi_i(q)), & q \in U_i; \\ 0, & q \notin U_i. \end{cases}$$

Ан-но до доведення леми, оскільки $U_i$ і $M \setminus \overline{V_i}$ утв. відкр. покриття $M$, $F_i \in C^k(U_i, \mathbb{R}^{n+1})$ за побудовою і $F_i = 0$ на $M \setminus \overline{V_i}$, $F_i \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+1})$.

Покладемо $F := (F_1, \ldots, F_m)$, тоді $F \in C^k(M, \mathbb{R}^{m(n+1)})$.

$\forall p \in M\ \exists i = \overline{1,m} : p \in W_i$ ; $F_i|_{W_i} = (\psi_i, 1)$. Оскільки $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ – $k$-дифеоморфізм, $F_i$ має максимальний ранг $n$ в околі $\overset{W_i}{p}$. Тоді і $F|_{W_i}$ – ранга $n$. Тобто, $F$ - занурення в $p$.

Отже, $F$ - занурення. Оскільки $M$ - компакт, за Р4. вище, достатньо показати, що $F$ - ін'єкція, для перевірки вкладеності $F$.

Дійсно, нехай $F(p) = F(q)$. $\exists i = \overline{1,m} : p \in W_i \subset U_i$. Тоді $1 = \varphi_i(p) = \varphi_i(q)$ (це і $(n+1)$-ша коорд. ф-ція $F$), за вл. ф-цій $\vartheta$, тоді $q \in \overline{W_i} \subset U_i$. Тоді з $F_i(p) = F_i(q)$ і $\varphi_i(p) = \varphi_i(q) = 1$ випливає $\psi_i(p) = \psi_i(q)$. Оскільки $\psi_i$ - ін'єкція на $U_i$, $p = q$. ▲

<u>Ідея доведення теореми Уітні</u>

Отже, $\forall$ $k$-м. $M$ (тут вважаємо $k \geq 1$) $\exists$

$k$-гл.

вкладення $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$ для деякого $N \in \mathbb{N}$.

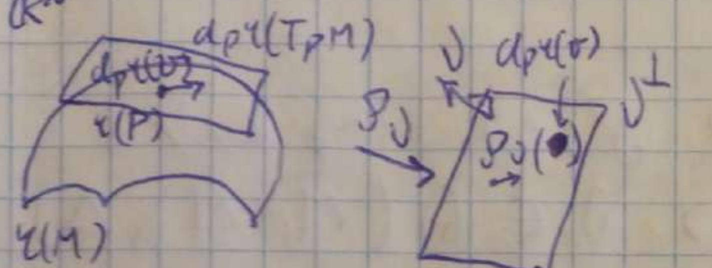
Ідея полягає у зниженні вимірності: розглянемо $\rho_v \circ \varphi$, де $\rho_v$ – ортогональне проектування $\mathbb{R}^N$ на гіперплощину $v^\perp$ для $v \in \mathbb{R}^N$ з $|v| = 1$ (евкл. модуль) (тобто $v \in S^{N-1}$), тобто для евкл. скал. добутку $\langle \cdot , \cdot \rangle$ на $\mathbb{R}^N$

$$\rho_v(x) = x - \langle x, v \rangle v.$$

Отожнивши $v^\perp$ з $\mathbb{R}^{N-1}$, можемо вважати, що $\rho_v \circ \varphi : M \to \mathbb{R}^{N-1}$. Це $k$-гл. відобр. для $k$-гладкого $\varphi$, бо $\rho_v$ – $\infty$-гладке (лінійне). Коли це відобр. буде вкладенням чи хоча б зануренням?

**1.** $\rho_v \circ \varphi$ – занурення $\Leftrightarrow \forall p \in M$ $d_p(\rho_v \circ \varphi) = [\text{ланц. правило}] = d_{\varphi(p)}\rho_v \circ d_p\varphi$ – ін'є $\Leftrightarrow$ [$\varphi$ – занурення $\Rightarrow d_p\varphi$ – ін'є] $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$ $d_{\varphi(p)}\rho_v : d_p\varphi(T_pM) \to T_{\rho_v \circ \varphi(p)}\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ – ін'є $\Leftrightarrow$ [при такому отожненні $\rho_v$ – лінійне] $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$

$\rho_\nu : d_p\varphi(T_pM) \to \mathbb{R}^N$ – ін'є (лінійна) $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M \ \forall\, 0 \neq v \in T_pM$




$0 \neq \rho_\nu(d_p\varphi(v)) = d_p\varphi(v) - \langle d_p\varphi(v),$

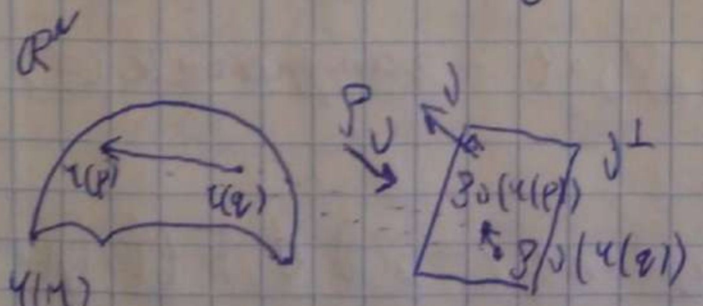
$\nu\rangle\nu \overset{\text{(помножемо)}}{\Leftrightarrow} \forall p \in M \ \ \forall\, 0 \neq v \in T_pM$

$\dfrac{d_p\varphi(v)}{|d_p\varphi(v)|} \neq \pm\nu \Leftrightarrow \nu \notin F(\hat{T}M)$, де

$\hat{T}M$ – множина усіх ненульових дотичних векторів $M$,

а $F : \hat{T}M \to S^{N-1} : v \mapsto \dfrac{d_p\varphi(v)}{|d_p\varphi(v)|}$.

2. Якщо обмежитися випадком компактного $M$ і якщо вже відомо, що $\rho_\nu \circ \varphi$ – занурення, знову ж з Пр. вище випливає, що $\rho_\nu \circ \varphi$ – вкладення $\Leftrightarrow$ $\rho_\nu \circ \varphi : M \to \mathbb{R}^N$ – ін'є.




Отже, нехай для $p, q \in M$

$$\rho_\nu(\varphi(p)) = \rho_\nu(\varphi(q)),$$

$$\varphi(p) - \langle \varphi(p), \nu\rangle \nu = \varphi(q) - \langle \varphi(q), \nu\rangle\nu,$$

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \langle \varphi(p) - \varphi(q), \nu \rangle\, \nu.$$

Тобто знову є колінеарність $\nu$ і, порівнюючи, отримаємо:

$$\frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{|\varphi(p)-\varphi(q)|} = \pm\nu .$$

Оскільки $\varphi$ – ін'. це означає, що $\rho_\nu \circ \varphi$ – ін' $\Leftrightarrow$ $\forall\, p \neq q \in M$ $\quad \frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{|\varphi(p)-\varphi(q)|} \neq \pm\nu \Leftrightarrow \nu \notin G(M\times M \setminus \Delta)$, де $\Delta := \{(p,p) \in M\times M \mid p \in M\}$ – діагональ $M\times M$, а $G : M\times M\setminus\Delta \to S^{N-1} : (p,q) \mapsto \frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{|\varphi(p)-\varphi(q)|}$. Оскільки $\Delta$ – замкнена з хаусдорфовості $M$, $M\times M\setminus\Delta$ – відкр. підмножина $2n$-вимірного многовида $M\times M$, тобто $2n$-вимірний $k$-гл. многовид. Нарешті, $G \in C^k(M\times M\setminus\Delta, S^{N-1})$ за побудовою (<u>Впр.</u>).

<u>Сл.</u> Якщо $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$ – занурення, то $\rho_\nu\circ\varphi$ – занурення $\Leftrightarrow$ $\nu \notin F(\hat{T}M) \subset S^{N-1}$

Якщо $\varphi$ – вкладення, то $\rho_\nu\circ\varphi$ – вкладення $\Leftrightarrow$ $\nu \notin F(\hat{T}M) \cup G(M\times M\setminus\Delta) \subset S^{N-1}$ (для компактного $M$).

Отже, треба встановити, за яких достатніх умов образ гладкого відображення непмлий за область значень (а також чи є $\hat{f}M$ гладкий многовидом (і якої вимірності), а $F$ - гл. відображенням). Тоді ми можемо ітерувати цю процедуру і, переходячи від $r$ до $\dim r$, зменшувати $N$ допоки це можливо.

## Теорема Сарда

Def. Нехай $M$ - $n$-вимірний многовид. Говорять, що $A \subset M$ - множина (лебегової) міри $0$, якщо $\forall p \in A$ $\exists$ карта $(U, \varphi)$ така, що $p \in U$ і $\varphi(U \cap A)$ - лебегової міри $0$ в $\mathbb{R}^n$, тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \le$ злічення множина куль $\{B_{r_i}(x_i)\}$ (евклідових) таких, що $\varphi(U \cap A) \subset \bigcup_i B_{r_i}(x_i)$ і сума їхніх евклідових об'ємів $\sum_i \operatorname{Vol} B_{r_i}(x_i) < \varepsilon$.

Rem Очевидно, замість умови на суму об'ємів можна брати $\sum_i r_i^n < \varepsilon$, а замість евкл куль - відкриті куби (кулі еквівалентної метрики $\rho_\infty$) $\prod_{j=1}^{n} (x_i^j - r_i, x_i^j + r_i)$ з тією ж умовою.

<u>Rem.</u> Оскільки $M$ — з $\leq$ зліч. базою, в силу теореми Ліндельофа, з покриття $A$ носіями карт $(U, \varphi)$ з <u>Def.</u> можна виділити $\leq$ зліченне підпокриття $\{U_i\}$.

З цього, зокрема, можна вивести:

<u>Pr. 1.</u> Якщо $\{A_i\}$ — $\leq$ зліченний набір множин $M$ міри 0, то і $\bigcup_i A_i$ — міри 0.

<u>2.</u> Якщо $A \subset B$ і $B$ — міри 0, то і $A$ — міри 0.

▷ <u>Впр.</u> ◭

<u>Rem.</u> Звичайно, <u>Pr</u> також випливає з загальних властивостей міри. На $M$ можна побудувати "повноцінну" борелівську міру аналогічно до міри Лебега на $\mathbb{R}^n$ за допомогою ріманової метрики, "продовжуючи" ріманів об'єм.

$\mathrm{Vol}(A) = \int_A dV$ на борелівській $A$ (де $dV = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ локально).
Зокрема, множини міри 0 будуть мати міру 0 у цих мірах.

<u>Th.</u> (Sard). Нехай $M$ і $N$ – $\infty$-гладкі многовиди і $F \in C^\infty(M, N)$; $C$ – множина критичних точок $F$. Тоді множина критичних значень $F(C)$ – міри 0 в $N$, і $\overbrace{N \setminus F(C)}^{\text{є перетином зліч. кількості відкритих всюди щільних множин і,}}$ всюди щільна у $N$ (зокрема, $\neq \varnothing$).

<u>Rem</u> Далі ми побачимо, що гладкість можна тут знизити до деякої скінченної.

<u>Rem</u> Нагадаємо, що критична точка $p$ – це та, у якій $\mathrm{rank}_p F < \dim N$. Але якщо $\dim M < \dim N$, це автоматично виконується $\forall p \in M$. Тому у цьому випадку маємо (разом з ослабленням умови на гладкість, яке, як ми побачимо пізніше, тут допустиме):

<u>Cor.</u> Нехай $M$ і $N$ – $k$-гл. многовиди і $F \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$. Якщо $\dim M < \dim N$, то $F(M)$ – міри 0 в $N$.

тожніше, перетин ...

і $N \setminus F(M)$ – всюди щільна (закрита, $\neq \emptyset$).

<u>Rem.</u> З цього випливає, що у ін'єктивному кроці <u>2.</u> з доведення <u>Th.</u> Уітні для $G \in C^k(M \times M \setminus \Delta, S^{N-1})$ $(k \geq 1)$ при $2n < N-1$ завжди $\exists\, \nu \in S^{N-1}$, що не належить образу $G$. Тобто (якщо довести аналогічним чином, що крок <u>1.</u> з зануренням також працює) можна зменшувати вимірність $N$, зберігаючи ін'єктивність, поки не стане $N = 2n+1$. Зауважимо, що це на 1 вимірність "гірше", ніж у нашому формулюванні – ми доведемо "послаблену" <u>Th.</u> Уітні (до того ж, лише для компактного $M$).

## Доведення теореми Сарда

перетин ~~[illegible]~~ $\leq$ зл. кількості

▷ Спочатку доведемо, що $N \setminus F(C)$ всюди щільна, відкритих

якщо відомо, що $F(C)$ – міри 0, і тому всюди щільна

Отже, $C = \{p \in M \mid \operatorname{rank}_p F < n\}$, де знову $m = \dim M$, $n = \dim N$.

З теореми про ранг, якщо $\operatorname{rank}_p F = n$, то $\exists$ відкр. $U \ni p$: $\forall q \in U$ $\operatorname{rank}_q F = n$ (бо $n$ - max ранг). Тому $M \setminus C$ відкрита $\Rightarrow$ $C$ замкнена.

<u>Lem.</u> $\forall$ замкненої $C \subset M$ $\exists$ $\leq$ зліченний набір компактів $\{C_i\}$ : $C = \bigcup_i C_i$.

$\triangleright$ $\forall p \in C$ розглянемо карту $(U_p, \varphi_p)$, $p \in U_p$ і, аналогічно до <u>Lem.</u> вище, відкр. окіл $p$ вигляду $\widetilde{B}_{r_p}(p) := \varphi_p^{-1}(B_{r_p}(\varphi_p(p)))$ (де $r_p > 0$ <u>може бути будь-яким</u>) і $\widetilde{D}_{r_p}(p) := \varphi_p^{-1}(D_{r_p}(\varphi_p(p))) = \overline{\widetilde{B}_{r_p}(p)}$ - компакт (аналогічно до доведення <u>Lem</u> вище).

$C$ замкнена $\Rightarrow$ $\forall$ $p$ $C \cap \widetilde{D}_{r_p}(p)$ компакт як замкнена підмножина компакта.

$\{\tilde{B}_{r_p}(p)\}_{p\in C}$ - відкр. покриття $C$. Оскільки $M$ - з $\leq$ злічн. базою, за Т. Ліндельофа, $\exists$ $\leq$ злічене підпокриття $\{\tilde{B}_{r_{p_i}}(p_i)\}$. Тоді для компактів $C_i := C \cap \tilde{D}_{r_{p_i}}(p_i)$ $\quad C = \bigcup_i C_i$. $\blacktriangle$ (Лем.)

Отже, $C = \bigcup_i C_i \Rightarrow F(C) = \bigcup_i F(C_i)$ ($\leq$ злічене об'єднання). $F$ неперервне $\Rightarrow$ $\forall i$ $F(C_i)$ - компакт $\Rightarrow$ [$N$ - хаусд.] $\Rightarrow$ $\forall i$ $F(C_i)$ - замкнена.

Якщо $F(C)$ - міри 0, то і $\forall i$ $F(C_i) \subset F(C)$ - міри 0. Тоді $\forall i$ $\operatorname{Int} \overline{F(C_i)} = \operatorname{Int} F(C_i) = \varnothing$, тобто $F(C_i)$ - ніде не щільна. Дійсно, н $\exists$ $p \in \operatorname{Int} F(C_i)$, тобто $\exists$ відкр. $V$ : $p \in V \subset F(C_i)$. Тоді $\forall$ карти $(U, \varphi)$ мн. $N$ з $p \in U$ $\varphi(U \cap V)$ - відкр. в $\mathbb{R}^n$, тому $\exists r > 0$: $B_r(\varphi(p)) \subset \varphi(U \cap V) \subset \varphi(U \cap F(C_i))$. Оскільки $B_r(\varphi(p))$

має додатню міру Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\varphi(U \cap F(C_i))$ не може мати міру 0; оскільки це так $\forall$ карти в околі $p$, $F(C_i)$ – теж не міри 0 $\lightning$.

Отже, $\forall i$ $\overline{N \setminus F(C_i)} = N \setminus \mathrm{Int}\, F(C_i) = N$, тобто $M \setminus F(C_i)$ – всюди щільна (і відкрита). Оскільки $N$ – хаусдорфовий і локально компактний (у $\forall p \in M$ $\exists$ окіл $\tilde{B}_r(p)$ з комп. замиканням $\tilde{D}_r(p)$ як вище), за Тм. Бера, $N \setminus F(C) = \bigcap\limits_i (N \setminus F(C_i))$ – теж всюди щільна.

Rem. Зокрема, ми можемо вивести такий наслідок з Тм. С.:

Cor. В умовах теореми Сарда якщо $M$ – компакт, то $C$ і $F(C)$ – компакти, $F(C)$ – замкнена і ніде не щільна в $N$.

$\triangleright$ $C$ замкнена в комп. $M \Rightarrow C$ – комп. $\Rightarrow$ [$F$ – неп.] $\Rightarrow F(C)$ – комп. $\Rightarrow$ [$N$ – хаусд.] $\Rightarrow F(C)$ – замкн. $\Rightarrow$ [$F(C)$ міри 0] $\Rightarrow \mathrm{Int}\,\overline{F(C)} = \mathrm{Int}\, F(C) = \varnothing$ (Cor.) $\triangleleft$

Залишилося довести "аналітичну" частину Th. Сарда: встановити, що $F(C)$ - міри $0$.

$\forall\ p \in C$ оберемо карти $(U,\varphi)$, $(V,\psi)$: $p \in U$, $F(p) \in V$. Лок. задання $F$: $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U \cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n)$; його крит. точки - образи крит. точок $F$, тобто множина крит. точок $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ має вигляд $\varphi(U \cap F^{-1}(V) \cap C)$, а крит. значень - $\psi(F(U \cap F^{-1}(V) \cap C))$. Якщо Th. Сарда вірна для $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, це множина міри $0$, [redacted] і [redacted] $\psi(F(U \cap F^{-1}(V) \cap C)) \subset \psi(F(F^{-1}(V) \cap C)) \subset \psi(V \cap F(C))$. З іншого боку, $\forall\ F(q) \in V \cap F(C)$ (тобто $q \in C$ і $F(q) \in V$) $\exists$ карта $(U_q, \varphi_q)$: $q \in U_q$, і тому $\psi(F(q)) \in \psi(F(U_q \cap F^{-1}(V) \cap C))$ - мн. міри $0$. Обираючи $\leq$ зліченне підпокриття $\{U_i\}$ (відкрите) множини $F^{-1}(V) \cap C$ з носіїв таких карт, отримуємо тоді $\Psi(F(C)\cap V) = \bigcup_i \Psi(F(U_i \cap F^{-1}(V)\cap C))$ - міри 0.

За лем., тоді $F(C)$ - міри 0.

Отже, Th. Сарда достатньо довести для $F \in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$, де $U \subset \mathbb{R}^m$ - відкрита.

Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $C_k$ множину $p \in U$, у яких усі част. похідні усіх коорд. ф-цій $F$ до $k$-того порядку включно нульові. Очевидно, тоді

$$C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \ldots$$

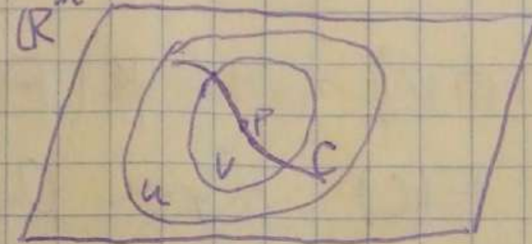
1. Доведемо, що $F(C \setminus C_1)$ - міри 0. Доводимо індукцією за $m$:

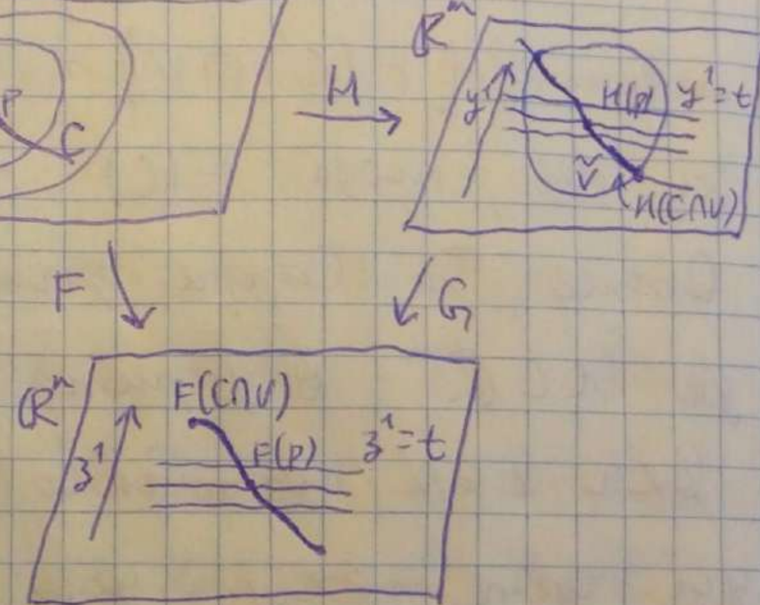
$m=0$. - очевидно ($\mathbb{R}^0$, $U$ і $C$ - одноточкові)

$m-1 \to m$. $\forall p \in C \setminus C_1$ за деф. $\operatorname{rank}_p F < n$ і $\exists$ част. похідна якоїсь коорд. ф-ції $F$, що у $p \neq 0$.

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що

$\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) \neq 0.$




Побудуємо $H: U \to \mathbb{R}^m$:

$(x^1, \dots, x^m) \mapsto (F^1(x^1, \dots, x^m), x^2, \dots, x^m)$.

Тоді $d_pH = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \dots & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(p) \\ 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – невироджс., тому $\exists$ відкр. $V \subset U$ ($p \in V$) і $\tilde{V} \ni H(p)$ в $\mathbb{R}^m$ такі, що $H: V \to \tilde{V}$ – дифео-зм.

Визначимо $G := F \circ H^{-1} \in C^\infty(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$. Оскільки $H$ – дифео-зм, множина крит. точок відобр. $G$ на $\tilde{V}$ співпадає з образом мн. крит. точок $F$ на $V$, тобто це $H(C \cap V)$, тоді мн. крит. значень – це $F(C \cap V)$.

За побудовою, $G$ переводить $(y^1, \dots, y^m) \in \tilde{V}$ у точку $\mathbb{R}^n$ з першою коорд. $y^1 (= F^1(x^1, \dots, x^m)$, де $(x^1, \dots, x^m) =$

$= H^{-1}(y^1, \dots, y^m))$ Тому $\forall t \in \mathbb{R}$ $G(\{y^1 = t\} \cap \tilde{V}) \subset \{z^1 = t\}$.

Розглянемо $G_t := G|_{\{y^1 = t\} \cap \tilde{V}}$. Воно гладке як обм. гладкого ($\underline{\text{вкр}}$), і у відповідних точках (з $y^1 = t$)

$$d_p G = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots \dots 0 \\ \hline * & d_p G_t \end{array}\right)$$

(в силу заув. $\underbrace{\text{вище}}_{\text{(і позначки)}}$). Тому якщо $p$ критична для $G$, вона крит. і для $G_t$, тобто мн. крит. точок $G_t$ – це $H(C \cap V) \cap \{y^1 = t\}$, її образ – $F(C \cap V) \cap \{z^1 = t\}$.

$G_t \in C^\infty(\underset{\mathbb{R}^{m-1}}{\underset{\updownarrow}{\{y^1 = t\}}} \cap \tilde{V}, \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\underset{\updownarrow}{\{z^1 = t\}}})$ можна розглядати як гл. відображення відкр. підмножини $\mathbb{R}^{m-1}$ у $\mathbb{R}^{n-1}$. Тоді за припущенням індукції множина її крит. значень $F(C \cap V) \cap \{z^1 = t\}$ – міри $0$ (у $\{z^1 = t\} \leftrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, а отже і у $\mathbb{R}^n$). Це так $\forall t$. Оскільки $F(C \cap V)$ – вимірна (наприклад, бо $C = \bigcup_i \hat{C}_i$ – об'єднання

$\leq$ злічен. кількості компактів), за $\underline{Th}$. Фубіні, $F(C\cap V)$ - міри 0.

Зробимо так $\forall p \in C\setminus C_1$ : $\exists$ відкр. $V_p \subset U$ : $p \in V_p$ і $F(C\cap V_p)$ - міри 0. Виділимо $\leq$ злічене підпокриття $C\setminus C_1$ $\{V_i\}$ : $F(C\setminus C_1) \subset \bigcup_i F(C\cap V_i)$ - міри 0.

$\underline{2.}$ Доведемо, що $\forall k$ $F(C_k\setminus C_{k+1})$ - міри 0. Знову інд. за $m$, знову $\underline{m=0}$ очевидно.

$\underline{m-1 \to m}$ Отже, $\forall p \in C_k\setminus C_{k+1}$ у $p$ всі $l$-ті частк. похідні нульові, $l \leq k$ і $\exists$ $(k+1)$-ша ненульова:

$$\frac{\partial^{k+1} F^i}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_{k+1}}}(p) \neq 0.$$

Не зм. загальності, вважаємо $i^1 = 1$. Позначимо $f := \frac{\partial^k F^i}{\partial x^{i_2} \cdots \partial x^{i_{k+1}}}$. Зокрема, $f(p) = 0$ і $\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) \neq 0$.

(і взагалі $f(q) = 0$ $\forall q \in C_k$).

Знову покладемо $H : U \to \mathbb{R}^m : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (f(x^1, \dots, x^m), x^2, \dots, x^m)$, за побудовою, $d_p H$ невиродженний тому $\exists$ відкр. $V \subset U$, $p \in V$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ : $H : V \to \tilde{V}$ - дифео-зм, і $G := F \circ H^{-1} \in C^\infty(\tilde{V}, \mathbb{R}^n)$.

За побудовою $H(C_k \cap V) \subset \{y^1 = 0\} \cap \tilde{V}$. Як і раніше, покладемо $G_0 := G|_{\{y^1=0\} \cap \tilde{V}} \in C^\infty(\{y^1 = 0\} \cap \tilde{V}, \mathbb{R}^n)$ - гладке на відкр. підмножині у $\mathbb{R}^{m-1}$. Точки з $C_k \cap V$ критичні для $F$ : $\forall q \in C_k \cap V$ $d_q F = 0$. Оскільки $H$ - дифео-зм, тоді $\forall$ $H(q) \in H(C_k \cap V)$ $d_{H(q)} G = 0$ $\Rightarrow d_{H(q)} G_0 = 0$ ($H(q) \in \{y^1 = 0\} \cap \tilde{V}$ за заув. вище). Тобто $G_0(H(C_k \cap V)) = G(H(C_k \cap V)) = F(C_k \cap V)$ входить до мн. крит. значень $G_0$, що має міру $0$ за прип. індукції. Тому $F(C_k \cap V)$ міри $0$. Аналогічно до $\underline{1}$, переходячи до $\leq$ зл. підпокриття, отримуємо, що $F(C_k \setminus C_{k+1})$ -

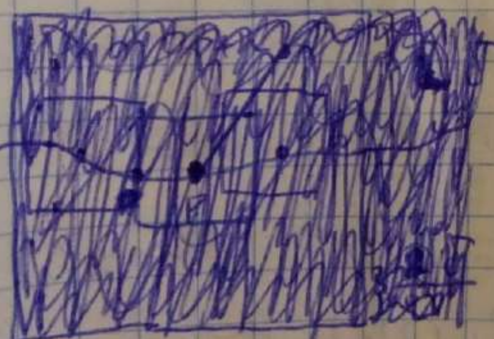
міри 0.

3. Доведемо, що $\exists\, k : F(C_k)$ - міри 0.

$\forall\, p \in C_k$ із ф-ли Тейлора випливає (для евкл. норм):

$$|F(p+h) - F(p)| \le L\,|h|^{k+1}$$

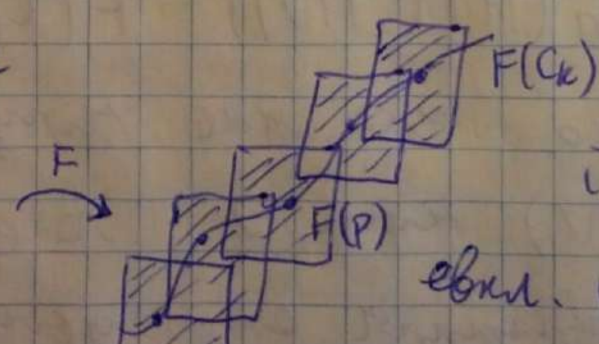
для дост. малих $h$: $|h| < \sqrt{m}\,\delta$, тобто для точок $p+h$ з куба з центром $p$ і ребром $2\delta$. $\forall\, q \in \mathbb{N}$ покриємо $C_k$ кубіками з ребром $\frac{2\delta}{q}$ (їх $\le q^m$ у вихідному кубі).



Тепер $|h| < \sqrt{m}\,\frac{\delta}{q}$, і

$$|F(p+h) - F(p)| \le \frac{L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}}{q^{k+1}}$$

Тобто образ кожного кубіка міститься у


кубі з центром $F(p)$ і ребром $\frac{\overbrace{2L\,(\sqrt{m}\,\delta)^{k+1}}^{=:a}}{q^{k+1}}$

евкл. об'єму $a^n q^{-n(k+1)}$.