Задача 1. Знайдіть формулу для обчислення кривини довільної (класу C^2) явно заданої кривої $y=F(x)$.

Застосуйте знайдену формулу для обчислення кривини наступних явно заданих кривих:

1) $y=\sin x$,

2) $y = \mathrm{tg}\, x$

3) $y = x^2$

4) $y = x^3$

5) $y = \ln x$

Проаналізуйте, в яких точках на кривій: 1) кривина обертається в нуль, 2) кривина приймає максимальне значення, 3) кривина приймає мінімальне значення.

Задача 2. Обчисліть кривину наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a\cosh t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

2) $\begin{cases} x^1 = a/\cosh t \\ x^2 = a(t + \tanh t) \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

3) $\begin{cases} x^1 = e^{at}\cos t \\ x^2 = e^{at}\sin t \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$

Намалюйте криві та спробуйте, дивлячись на малюнок, висловити гіпотези стосовно точок нульової кривини, точок максимальної кривини, точок мінімальної кривини на кожній з кривих. Підтвердіть або спростуйте гіпотези, проаналізувавши отримані функції кривини.

Задача 3. Розглянемо наступну кривої γ в тримірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \cos(\beta t) \\ x^2 = (c + r \cdot \cos(\alpha t)) \cdot \sin(\beta t) \;\;,\;\; t \in (-\infty, +\infty). \\ \qquad x^3 = r \cdot \sin(\alpha t) \end{cases}$$

Проаналізуйте, в залежності від значень додатних параметрів c, r, α і β, коли радіус-вектор кривої γ є періодичною вектор функцією, а крива γ є замкнутою.

Обчисліть натуральний параметр s на кривій γ, який відраховується відточки $P(t=0)$.

Обчисліть кривину та скрут кривої γ в точці $P(t=0)$.

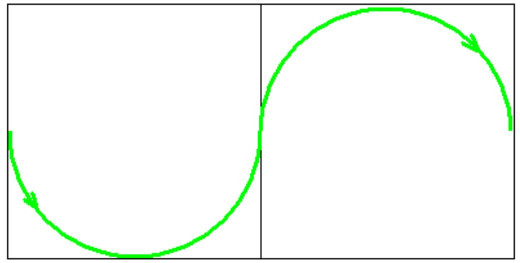
Чи може задана крива γ бути плоскою при якихось значеннях додатних параметрів c, r, α і β ?

Спробуйте намалювати криву γ при якихось конкретних значеннях c, r, α і β.

Задача 4. Розглянемо криву γ в тримірному просторі, яка є регулярною класу C^m і не містить точок перегину.

Проаналізуйте, якому класу гладкості належать кожне з векторних полей $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ рухомого репера Френе кривої γ, а також функції кривини і скруту кривої γ.

Задача-експеримент 5. Виріжте з паперу прямокутник, утворений з двох квадратів. В кожний з квадратів впишіть півколо так, щоб вийшла наступна крива Γ:



Перегніть прямокутник вздовж середньої лінії так, що квадрати лежали в перпендикулярних площинах (як пара граней куба).

Розглянемо криву γ, що утворилась з намальованої кривої Γ після перегинання.

Чи є крива γ регулярною? Якщо так, якого класу регулярності є крива γ?

Чи є крива γ плоскою?

Намалюйте дотичне векторне поле $\vec{\tau}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Намалюйте векторне поле головних нормалей $\vec{\nu}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Опишіть векторне поле бінормалей $\vec{\beta}$ кривої γ, проаналізуйте його неперервність.

Чому дорівнюють кривина і скрут кривої γ?

***Задача 6.** Визначимо векторний добуток пари векторів в n-мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X}=(X^1,\ldots,X^n),\ \vec{Y}=(Y^1,\ldots,Y^n) \quad \to \quad [\vec{X},\vec{Y}]:=(p^{12},p^{13},p^{14},\ldots,p^{n-1n}),$$

де $p^{ij}:=\begin{vmatrix} X^i & X^j \\ Y^i & Y^j \end{vmatrix}$, $1\le i<j\le n$.

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N,\ N=C_n^{\,2}\ ,$$

має наступні властивості:

1) $[a\vec{X}+b\vec{Y},\vec{Z}]=a[\vec{X},\vec{Z}]+b[\vec{Y},\vec{Z}]$, $[\vec{X},a\vec{Y}+b\vec{Z}]=a[\vec{X},\vec{Y}]+b[\vec{X},\vec{Z}]$

2) $[\vec{X},\vec{Y}]=-[\vec{Y},\vec{X}]$

3) $<[\vec{X},\vec{Y}],[\vec{Z},\vec{W}]>=\begin{vmatrix} <\vec{X},\vec{Z}> & <\vec{X},\vec{W}> \\ <\vec{Y},\vec{Z}> & <\vec{Y},\vec{W}> \end{vmatrix}$

Чому дорівнює векторний добуток колінеарних векторів?

Чому дорівнює $|[\vec{X},\vec{Y}]|^2$?

Зауваження. У випадку $n=3$, коли $N=3$ і можемо ототожнити $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^N$, в якому порядку треба розставити p^{ij} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток співпадав зі звичайним векторним добутком і, зокрема, задовольняв умові $[\vec{X},\vec{Y}]\perp\vec{X},\vec{Y}$?

***Задача 7.** Визначимо векторний добуток трійки векторів в n-мірному евклідовому просторі наступним чином

$$\vec{X} = (X^1,\dots,X^n),\ \vec{Y} = (Y^1,\dots,Y^n),\ \vec{Z} = (Z^1,\dots,Z^n) \to$$

$$(\vec{X},\vec{Y},Z) := (p^{123},\dots,p^{n-2n-1n}),$$

де $p^{ijk} := \begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k \\ Y^i & Y^j & Y^k \\ Z^i & Z^j & Z^k \end{vmatrix}$, $1 \le i < j < k \le n$.

Доведіть, що так визначений векторний добуток, як відображення

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N,\ N = C_n^3,$$

має наступні властивості:

1) лінійність по кожному аргументу,

2) якщо переставити місцями аргументи, то векторний добуток або не зміниться, якщо перестановка є парно, або змінить знак, якщо перестановка є непраною.

3) $<[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}],[\vec{U},\vec{V},\vec{W}]>=\begin{vmatrix} <\vec{X},\vec{U}> & <\vec{X},\vec{V}> & <\vec{X},\vec{W}> \\ <\vec{Y},\vec{U}> & <\vec{Y},\vec{V}> & <\vec{Y},\vec{W}> \\ <\vec{Z},\vec{U}> & <\vec{Z},\vec{V}> & <\vec{Z},\vec{W}> \end{vmatrix}$

Чому дорівнює векторний добуток компланарних векторів?

Чому дорівнює $|[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]|^2$?

Зауваження. У випадку $n=4$, коли N=4 і можемо ототожнити $I\!R^n$ і $I\!R^N$, в якому порядку треба розставити p^{ijk} і, за необхідності, змінити знак, щоб векторний добуток задовольняв умові $[\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}]\perp\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}$?

***Задача 8.** Обчисліть кривину та скрут наступної кривої γ в чотиривимірному просторі:

$$\begin{cases} x^1 = A \cdot \cos(\alpha t) \\ x^2 = A \cdot \sin(\alpha t) \\ x^3 = B \cdot \cos(\beta t) \\ x^3 = B \cdot \sin(\beta t) \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

* – ускладнені задачі, за бажанням