

Задача 2.1. Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x^1 = t \cos t \\ x^2 = t \sin t, \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої γ .

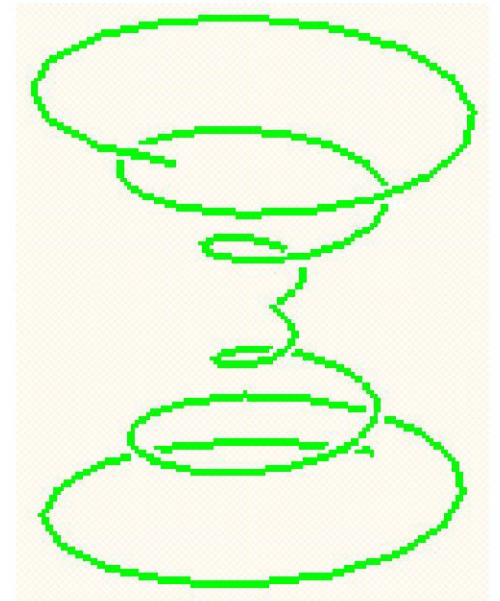
Записати рівняння елементів тригранника Френе кривої γ в точці $t = \pi$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

Обчислимо першу і другу похідні

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -2 \sin t - t \cos t \\ 2 \cos t - t \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Оскільки $\frac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$, крива є регулярною.

Оскільки

$$, \quad \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] = \begin{pmatrix} -h(2\cos t - t\sin t) \\ -h(2\sin t + t\cos t) \\ t^2 + 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

в кожній точці на кривій визначається тригранник Френе і базис Френе.

Маємо:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] = \begin{pmatrix} -h(2 \cos t - t \sin t) \\ -h(2 \sin t + t \cos t) \\ t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = [\vec{B}, \vec{T}] = \begin{pmatrix} -(t^2 + 2)(\sin t + t \cos t) - h^2(2 \sin t + t \cos t) \\ (t^2 + 2)(\cos t - t \sin t) + h^2(2 \cos t - t \sin t) \\ -th \end{pmatrix},$$

Далі, обчислюємо:

$$|\vec{T}| = \sqrt{t^2 + h^2 + 1}, \quad |\vec{B}| = \sqrt{(t^2 + 2)(t^2 + h^2 + 2) + 2h^2},$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{t^2 + h^2 + 1} \sqrt{(t^2 + 2)(t^2 + h^2 + 2) + 2h^2}$$

Записуємо вектори базису Френе:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2 + 1} \sqrt{(t^2 + 2)(t^2 + h^2 + 2) + 2h^2}} \begin{pmatrix} -(t^2 + 2)(\sin t + t \cos t) - h^2(2 \sin t + t \cos t) \\ (t^2 + 2)(\cos t - t \sin t) + h^2(2 \cos t - t \sin t) \\ -th \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{(t^2 + 2)(t^2 + h^2 + 2) + 2h^2}} \cdot \begin{pmatrix} -h(2 \cos t - t \sin t) \\ -h(2 \sin t + t \cos t) \\ t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

В точці $t=\pi$ маємо: $\vec{f}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ h\pi \end{pmatrix}$,

$$\vec{T}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{V}(\pi) = \begin{pmatrix} \pi(\pi^2 + 2) + \pi h^2 \\ -\pi^2 - 2 - 2h^2 \\ -\pi h \end{pmatrix}, \quad \vec{B}(\pi) = \begin{pmatrix} 2h \\ \pi h \\ \pi^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Рівняння дотичної прямої в точці P :

$$\frac{x^1 + \pi}{-1} = \frac{x^2}{-\pi} = \frac{x^3 - h\pi}{h}$$

Рівняння головної нормалі в точці P :

$$\frac{x^1 + \pi}{\pi(\pi^2 + 2 + h^2)} = \frac{x^2}{-\pi^2 - 2 - 2h^2} = \frac{x^3 - h\pi}{-\pi h}$$

Рівняння бінормалі в точці P :

$$\frac{x^1 + \pi}{2h} = \frac{x^2}{\pi h} = \frac{x^3 - h\pi}{\pi^2 + 2}$$

Рівняння нормальної площини в точці P :

$$-1(x^1 + \pi) - \pi x^2 + h(x^3 - h\pi) = 0$$

Рівняння спрямної площини в точці P :

$$\pi(\pi^2 + 2 + h^2)(x^1 + \pi) - (\pi^2 + 2 + 2h^2)x^2 - \pi h(x^3 - h\pi) = 0$$

Рівняння щільнодотичної площини в точці P :

$$2h(x^1 + \pi) + \pi h x^2 + (\pi^2 + 2)(x^3 - h\pi) = 0$$

*Задача 3.

1) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^n проходять через фіксовану точку O , то крива γ є прямою.

Ідея доведення:

$$\vec{x} = \vec{f}(t)$$

$$\vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t)$$

$$\exists \lambda = \lambda(t): \vec{f}(t) + \lambda(t) \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t) = 0$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = -\frac{1}{\lambda(t)} \cdot \vec{f}(t)$$

$$\vec{f}(t) = \Lambda(t) \cdot \vec{C}$$

2) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^n є паралельними деякій фіксованій прямій, то крива γ є прямою.

Ідея доведення:

$$\vec{x} = \vec{f}(t)$$

$$\vec{x} = \vec{f}(t) + \lambda \cdot \frac{d\vec{f}}{dt}(t)$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$$

$$\vec{f}(t) = \Lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{f}_0$$

3) Доведіть (або спростуйте), що якщо усі нормальні прямі регулярної параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^2 проходять через фіксовану точку, то крива γ є колом.

Ідея доведення:

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) - \lambda \frac{df^2}{dt}(t) \\ x^2 = f^2(t) + \lambda \frac{df^1}{dt}(t) \end{cases}$$
$$\exists \lambda = \lambda(t) : \begin{cases} f^1(t) - \lambda(t) \frac{df^2}{dt}(t) = 0 \\ f^2(t) + \lambda(t) \frac{df^1}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{df^1}{dt}(t) = -\frac{1}{\lambda(t)} f^2(t) \\ \frac{df^2}{dt}(t) = \frac{1}{\lambda(t)} f^1(t) \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\lambda(t)}$$

$$\begin{cases} \frac{df^1}{d\sigma}(\sigma) = -f^2(\sigma) \\ \frac{df^2}{d\sigma}(\sigma) = f^1(\sigma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 f^1}{d\sigma^2} = -f^1 \\ \frac{d^2 f^2}{d\sigma^2} = -f^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^1 = b \cos \sigma - a \sin \sigma \\ f^2 = a \cos \sigma + b \sin \sigma \end{cases}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} b \cos \sigma - a \sin \sigma \\ a \cos \sigma + b \sin \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \cos \sigma + \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \sin \sigma$$

Кривина і скрут

Задача 1. Знайти кривину еліпса

$$\begin{cases} x^1 = a \cos t \\ x^2 = b \sin t \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{f}' = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad \vec{f}'' = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix},$$

$$|\vec{f}'| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$[\vec{f}', \vec{f}''] = \begin{vmatrix} -a \sin t & -a \cos t \\ b \cos t & -b \sin t \end{vmatrix} = ab$$

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}$$

Задача 2. Знайти кривину і скрут гвинтової лінії

$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}, \quad \vec{f}' = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{f}'' = \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}''' = \begin{pmatrix} r \sin t \\ -r \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\vec{f}'| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$[\vec{f}', \vec{f}'''] = \begin{pmatrix} hr \sin t \\ -hr \cos t \\ r^2 \end{pmatrix}, \quad |[\vec{f}', \vec{f}''']| = r\sqrt{r^2 + h^2},$$

$$(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''') = \begin{vmatrix} -r \sin t & -r \cos t & r \sin t \\ r \cos t & -r \sin t & -r \cos t \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = hr^2$$

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{r\sqrt{r^2 + h^2}}{(\sqrt{r^2 + h^2})^3} = \frac{r}{r^2 + h^2}$$

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2} = \frac{hr^2}{(r\sqrt{r^2 + h^2})^2} = \frac{h}{r^2 + h^2}$$

Відповідь: $k = \frac{r}{r^2 + h^2}, \quad \kappa = \frac{h}{r^2 + h^2}$

Задача 3. Доведіть, що кривина і скрут не залежать від розташування кривої в просторі.

Доведення. Рух в просторі описується наступним чином:

$$\vec{y} = W\vec{x} + \vec{c}, \quad W \in O(n).$$

Візьмемо криву з радіус-вектором $\vec{f}(t)$, застосуємо рух в просторі, отримаємо криву з радіус-вектором

$$\vec{g}(t) = W\vec{f}(t) + \vec{c}$$

Маємо:

$$\vec{g}' = W\vec{f}', \quad \vec{g}'' = W\vec{f}'', \quad \vec{g}''' = W\vec{f}'''$$

$$|\vec{g}'| = |\vec{f}'|,$$

$$[\vec{g}', \vec{g}'] = W[\vec{f}', \vec{f}'] \quad , \quad |[\vec{g}', \vec{g}']| = |[\vec{f}', \vec{f}']| \quad ,$$

$$(\vec{g}', \vec{g}'', \vec{g}''') = (\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')$$

$$k_g = \frac{|[\vec{g}', \vec{g}']|}{|\vec{g}'|^3} = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}']|}{|\vec{f}'|^3} = k_f \quad , \quad \kappa_g = \frac{(\vec{g}', \vec{g}'', \vec{g}''')}{|[\vec{g}', \vec{g}']|^2} = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}']|^2} = \kappa_f$$

Задача 4. Проаналізуйте, як змінюються кривина і скрут під дією гомотеції в просторі.

Задача 5. Проаналізуйте, як змінюються кривина і скрут при зміні орієнтації кривої.

Задача 7.1h. Знайдемо кривину та скрут гвинтової лінії

$$r = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Згадаймо, що

$$\begin{aligned} r' &= (-a \sin t, a \cos t, b), \\ |r'| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ r'' &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \\ [r', r''] &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2) \end{aligned}$$

і

$$|[r', r'']| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

при $a > 0$. Тоді за формулою з лекцій кривина дорівнює

$$k = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Зауважимо, що кривина існує лише на проміжках, де крива регулярна, тобто $r' \neq 0$. Для обчислення скриту (кручення) нам також знадобляться

$$r''' = (x''', y''', z''') = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

та змішаний добуток

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b$$

(це можна було знайти і як скалярний добуток $\langle [r', r''], r''' \rangle$). Тоді за формулою скрут дорівнює

$$\varkappa = \frac{(r', r'', r''')}{|[r', r'']|^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Скрут існує лише за умови $[r', r''] \neq 0$, тобто ненульової кривини на проміжку (також це умова визначеності репера та тригранника Френе). Також зауважимо, що кривина просторової кривої завжди невід'ємна, а скрут може приймати значення будь-якого знаку.

У випадку, коли параметр кривої є натуральним, можна скористатися спрощеними формулами. Згадаємо, що для гвинтової лінії одна з натуральних параметризацій має вигляд

$$r = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right), \\ r'' &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(-a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right), \end{aligned}$$

і за формулою для натуральної параметризації

$$k = |r''| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Крім того,

$$[r', r''] = \frac{1}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \left(ab \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -ab \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a^2 \right)$$

$$r''' = \frac{1}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \left(a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

тому

$$(r', r'', r''') = \langle [r', r''], r''' \rangle = \frac{a^2 b}{(a^2 + b^2)^3}.$$

За формулою для натурального параметра,

$$\kappa = \frac{(r', r'', r''')}{k^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Задача 7.6а. Треба показати, що просторова крива

$$r = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$$

є пласкою та знайти рівняння площини, у якій вона лежить. Звичайно, цю задачу можна розв'язати, просто помітивши, що крива лежить у площині $x + y - z = 0$. Але ми розберемо "правильний" алгоритм її розв'язку. Перш за все, згадаємо, що крива, у якої визначений скрут, є пласкою тоді й тільки тоді, коли він нульовий (це твердження з лекцій, але ми перевіряли його безпосередньо: воно впливає з задачі 1.7 та формули для скруту). У нашому випадку

$$r' = (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t),$$

$$r'' = (-\cos t, -\sin t, -\cos t - \sin t),$$

$$r''' = (\sin t, -\cos t, \sin t - \cos t).$$

Тому числівник у формулі для скруту

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t + \cos t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t - \sin t \\ \sin t & -\cos t & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, крива дійсно пласка. Тоді площина, у якій вона лежить, – це її щільнодотична площина. Оскільки вектор нормалі цієї площини дорівнює

$$[r', r''] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & -\sin t + \cos t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t - \sin t \end{vmatrix} = (-1, -1, 1),$$

вона повинна мати рівняння

$$-(x - \cos t) - (y - \sin t) + (z - \sin t - \cos t) = 0,$$

тобто якраз

$$x + y - z = 0.$$

Задача 7.8. Перевіримо, що якщо всі щільнодотичні площини деякої просторової кривої перпендикулярні деякій прямій (або, що те ж саме, усі паралельні одна одній), то ця крива пласка. Знову спробуємо показати, що у такої кривої скрут дорівнює нулю. Нехай a – (постійний) напрямний вектор даної прямої, який, таким чином, є вектором нормалі

кожної щільнодотичної площини. Оскільки ці площини паралельні векторам r' і r'' , де r – вектор-функція, що задає криву, умова задачі означає, що

$$\langle r', a \rangle = 0, \quad \langle r'', a \rangle = 0.$$

Продиференціювавши другу з цих умов, отримаємо

$$\langle r''', a \rangle = 0,$$

тобто вектори r' , r'' та r''' ортогональні одному й тому самому вектору, а отже компланарні. Тому числівник у формулі для скруту $(r', r'', r''') = 0$, що і означає, що крива плоска. Ще один спосіб це побачити – використати формули Френе, з якими ми будемо працювати наступного разу.

Твердження, що обернене до твердження задачі, теж, очевидно, вірне: у цьому випадку щільнодотична площина у кожній точці – це і є площина кривої. Приклад цього ми бачили у попередній задачі. Зауважимо також, що з умови $\langle r', a \rangle = 0$ випливає $\langle r'', a \rangle = 0$. Таким чином, нам би вистачило і першої з них: вона означає, що усі дотичні до кривої перпендикулярні деякій прямій, і формально слабша за умову задачі (хоча насправді їй еквівалентна).