gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 5. Кривина та скрут регулярних кривих

Розглядаємо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

За необхідності, від довільного параметра t будемо переходити до натурального параметра s на кривій γ :

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right|$$

Така заміна параметризації є регулярною і не зменшує клас гладкості.

Основна мета лекції – ввести в розгляд два базових геометричних об'єкта, кривину і скрут, які характеризують форму/розміри кривої і не зважають на розташування кривої в просторі.

1. Кривина кривої

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

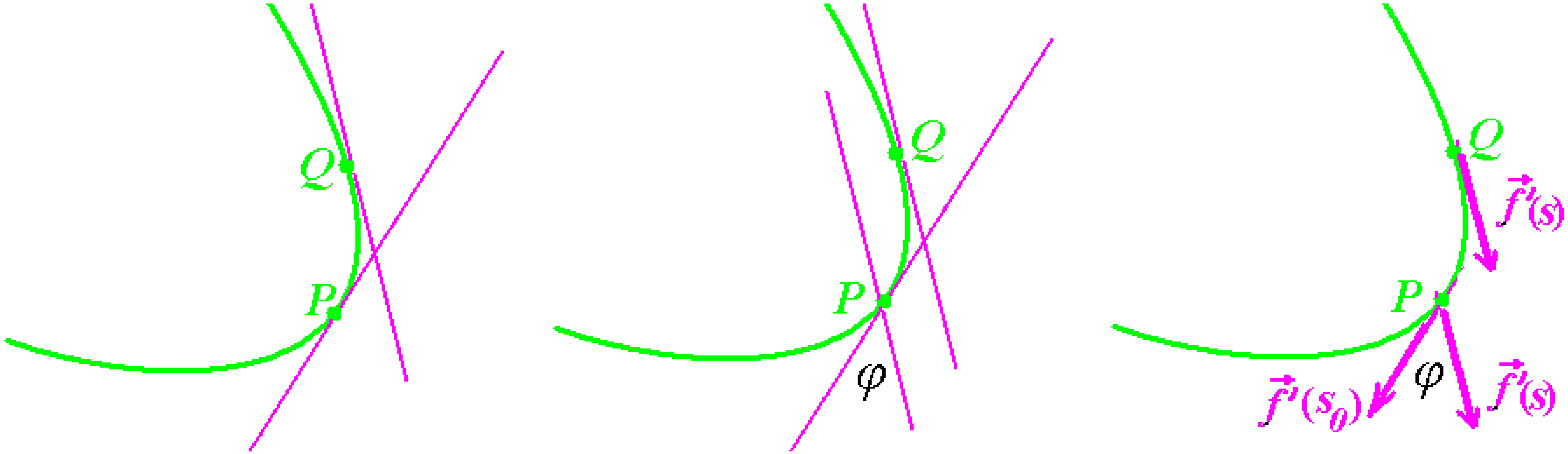
$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s - натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ.

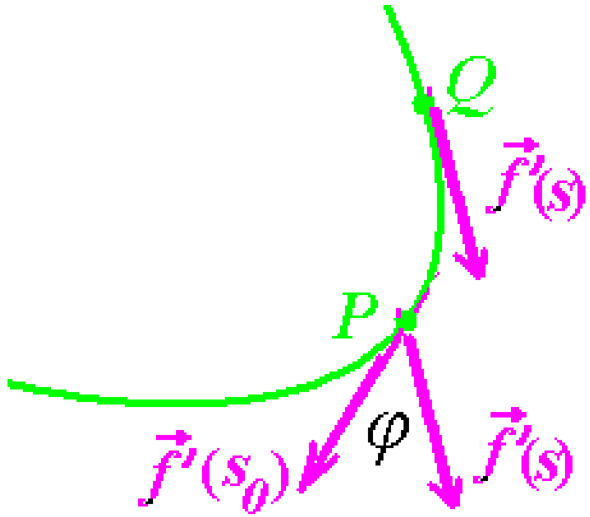
Для довільної точки $Q(s)$ на кривій γ розглянемо кут φ між дотичними прямими кривої γ в точках P і Q.

Проаналізуємо поведінку кута φ при $s \to s_0$, коли точка Q збігається до точки P.



Очевидно, що $\lim\limits_{s \to s_0} \varphi = 0$. Розглянемо $\lim\limits_{s \to s_0} \dfrac{\varphi}{|s - s_0|}$

Визначення. Якщо границя $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{\varphi}{|s-s_0|}$ існує, то її значення називається *кривиною* кривої в точці P і позначається k.

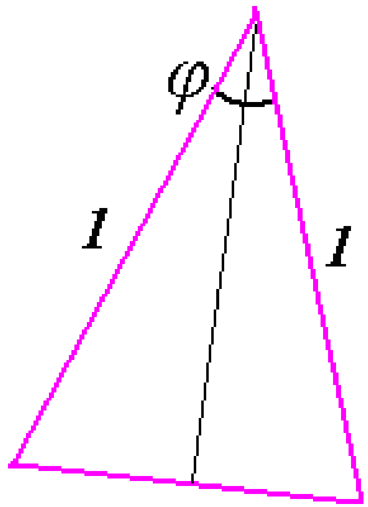


Припустимо, що крива γ є регулярною класу C^2. Тоді отримаємо:

$$\lim_{s\to s_0}\frac{\varphi}{|s-s_0|}=\lim_{s\to s_0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{|s-s_0|}=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{2\frac{|\vec f'(s)-\vec f'(s_0)|}{2}}{|s-s_0|}=\lim_{s\to s_0}\frac{|\vec f'(s)-\vec f'(s_0)|}{|s-s_0|}=$$

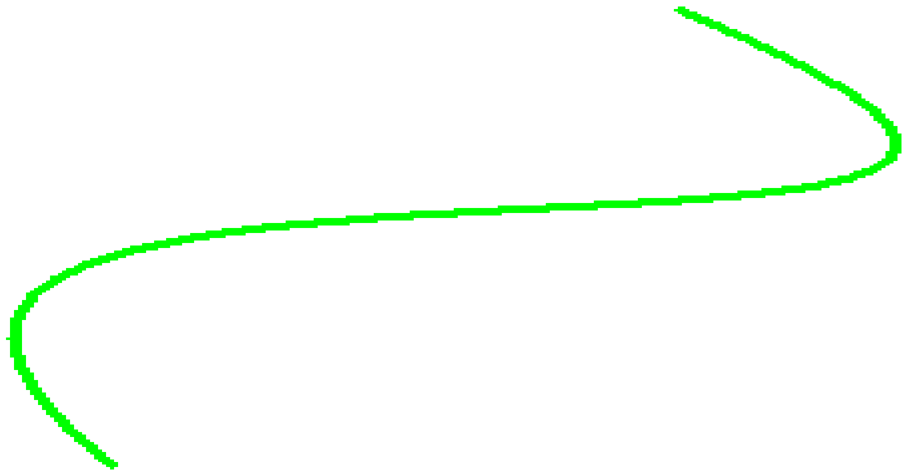
$$=\left|\lim_{s\to s_0}\frac{\vec f'(s)-\vec f'(s_0)}{s-s_0}\right|=|\vec f''(s_0)|$$



Висновок: $k=|\vec f''(s_0)|$

Зауваження 1. В кожній точці P на кривій γ виникає своє значення кривини, тобто, маємо функцію *k=k(s)*. При цьому, якщо $\vec{f}(s) \in C^m$, то $k(s) \in C^{m-2}$.

Зауваження 2. Кривина k характеризує швидкість, з якою змінюється дотична пряма кривої, коли точка рухається по кривій.



Зауваження 3. Кривина k не залежить від розташування кривої γ в просторі. Інакше кажучи, якщо до кривої γ застосувати паралельний перенос, обертання або симетрію в $\mathbb{R}^n$, то кривина k не зміниться.

Нагадування. Рух в просторі $\mathbb{R}^n$: $\quad \vec{x} \to W \cdot \vec{f}(s) + \vec{c}, \quad W \in O(n)$

Приклад 1. Нехай γ – довільна *пряма* в $\mathbb{R}^n$. Її кривина $k\equiv 0$.

Пояснення. Коли точка рухається по прямій, то її дотична пряма не змінює свого напрямку,.

Доведення. Пряма задається *лінійною* вектор-функцією

$$\vec{f}(s) = \vec{e}s + \vec{q},$$

де $\vec{e}$ – одиничний напрямний вектор прямої, $\vec{q}$ – початкова точка на прямій.

Маємо

$$\vec{f}\,' = \vec{e},\ |\vec{f}\,'| = |\vec{e}\,| \equiv 1,$$

тобто, s є натуральним параметром на прямій.

Також маємо $\vec{f}\,'' = \vec{0}$, тобто,

$$k = |\vec{f}\,''| \equiv 0.$$

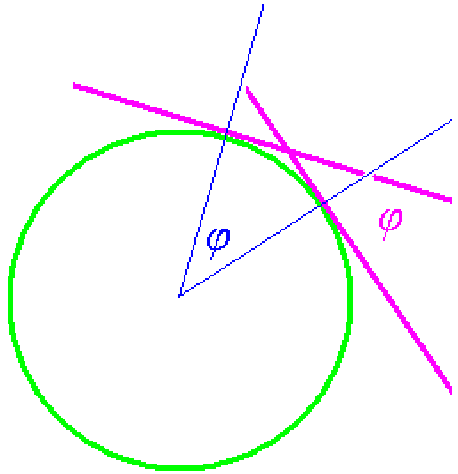
Твердження. *Якщо регулярна класу C^2 крива γ в $\mathbb{R}^n$ має нульову кривину,*

$$k\equiv 0,$$

то ця крива γ є прямою.

Приклад 2. Нехай γ – довільне коло радіуса r. Його кривина $k \equiv \frac{1}{r}$.

Пояснення. Коли точка рухається по колу, дотична пряма кола змінює свій напрямок з однаковою швидкістю в усіх точках.



Доведення. Коло задається в площині $\mathbb{R}^2$ радіус-вектором

$$\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} c^1 + r\cos\frac{s}{r} \\ c^2 + r\sin\frac{s}{r} \end{pmatrix},$$

де (c^1, c^2) – координати центра кола, r – радіус кола.

Маємо:

$$\vec{f}' = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{r} \\ \cos\frac{s}{r} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r} \\ -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r} \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, $|\vec{f}'| = 1$, тобто, s є натуральним параметром на прямій.

А кривина $k = |\vec{f}''| \equiv \frac{1}{r}$.

Як обчислити функцію кривини, коли крива γ задана радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b),$$

відносно довільного параметра t ?

Від довільного параметра t можна перейти до натурального параметра s :

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|$$

Маємо:

$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

$$\left[\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^3$$

$$\left|\left[\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right]\right| = \left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|^3$$

$$\left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right| \cdot \left|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right| \cdot \sin\omega = \left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right| / \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^3$$

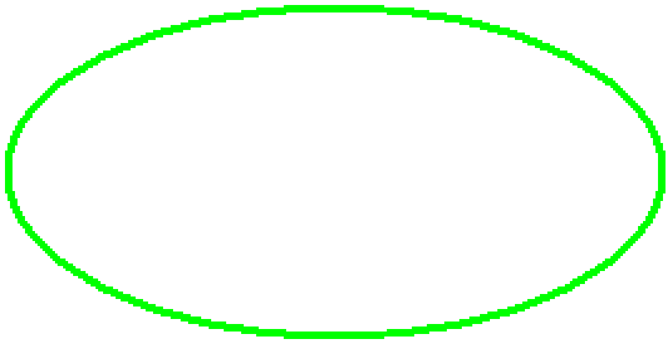
В натуральній параметризації виконано $\left|\frac{d\vec{f}}{ds}\right| \equiv 1$, $\left|\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}\right| = k$, $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Як результат, отримуємо $$k = \frac{\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^3},$$

тобто, має місце

Формула: $$\boxed{k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3}}$$

Приклад 3. Розглянемо еліпс, що задається радіус-вектором $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$. Обчислюючи кривину, отримуємо: $k = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$



Координатна форма запису функції кривини

$n=3$)Якщо крива γ в R^3 задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

то кривина обчислюється за формулою

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\right)^3}$$

$n=2$) Якщо крива γ в R^2 задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

то кривина обчислюється за формулою

$$k = \frac{|\, x'y'' - x''y' \,|}{\left(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\right)^3}$$

$$k = \frac{|[\vec{f}', \vec{f}'']|}{|\vec{f}'|^3}$$

Зауваження. Точки, в яких кривина обертається в нуль, *k=0*, називаються *точками перегину* кривої. Саме в цих точках можуть виникнути проблеми з визначенням шільнодотичної площини кривої.

Якщо ж точка не є точкою перегину, *k≠0*, то в такій точці шільнодотична площина визначається однозначно.

2. Скрут кривої

Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s - натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ, що не є точкою перегину, $k \neq 0$. Тоді в точці P і в досить близьких до неї точках на кривій γ визначені щільнодотичні площини.

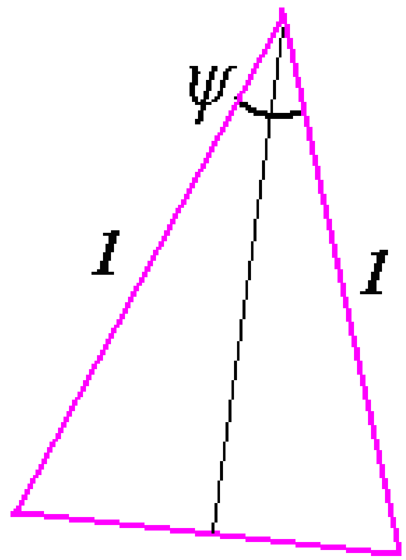
Для довільної точки $Q(s)$ на кривій γ, досить близької до точки P, розглянемо «кут» ψ між щільнодотичними площинами кривої γ в точках P і Q.

Проаналізуємо поведінку кута ψ при $s \to s_0$, коли точка Q збігається до точки P. За неперервністю зміни щільно дотичних площин маємо $\lim\limits_{s \to s_0} \psi = 0$.

Розглянемо $\lim\limits_{s \to s_0} \dfrac{\psi}{|s - s_0|}$

Визначення. Якщо границя $\lim\limits_{s \to s_0} \dfrac{\psi}{|s - s_0|}$ існує, то її значення називається *скрутом* кривої γ в точці P і позначається κ.

Припустимо, що крива γ є регулярною класу C^3. Тоді отримаємо:



$$\lim_{s\to s_0}\frac{\psi}{|s-s_0|}=\lim_{s\to s_0}\frac{2\sin\frac{\psi}{2}}{|s-s_0|}=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{2\frac{\left|[\vec f'(s),\frac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]-[\vec f'(s_0),\frac{\vec f''(s_0)}{|\vec f''(s_0)|}]\right|}{2}}{|s-s_0|}=$$

$$=\left|\lim_{s\to s_0}\frac{[\vec f'(s),\frac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]-[\vec f'(s_0),\frac{\vec f''(s_0)}{|\vec f''(s_0)|}]}{s-s_0}\right|=\left|[\vec f'(s),\frac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]'\right|_{s=s_0}$$

Обчислимо $[\vec f'(s),\frac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]'$, а потім $|[\vec f'(s),\frac{\vec f''(s)}{|\vec f''(s)|}]'|$.

Зауваження: $|[\vec a,\vec b]|^2=|\vec a|^2|\vec b|^2-<\vec a,\vec b>^2$

Нагадаємо, що в натуральній параметризації виконано

$$|\vec{f}'|^2 = <\vec{f}',\vec{f}'> \equiv 1 \qquad |\vec{f}''|^2 = <\vec{f}'',\vec{f}''> = k^2$$

$$<\vec{f}',\vec{f}''> \equiv 0 \qquad <\vec{f}'',\vec{f}'''> = k\,k'$$

$$<\vec{f}'',\vec{f}''> + <\vec{f}',\vec{f}'''> \equiv 0 \qquad <\vec{f}',\vec{f}'''> = -k^2$$

Застосуємо ці формули для обчислення:

$$[\vec{f}',\frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}]' = [\vec{f}',\frac{\vec{f}''}{k}]' = [\vec{f}'',\frac{\vec{f}''}{k}] + [\vec{f}',\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}] = [\vec{f}',\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}]$$

$$|[\vec{f}',\frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}]'|^2 = |[\vec{f}',\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}]|^2 = |\vec{f}'|^2\,|\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}|^2 - <\vec{f}',\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}>^2 =$$

$$= |\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}|^2 - <\vec{f}',\frac{\vec{f}'''}{k}>^2 = |\frac{\vec{f}'''}{k} - \frac{k'\,\vec{f}''}{k^2}|^2 - k^2 =$$

$$= \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - 2\frac{k' <\vec{f}''',\vec{f}''>}{k^3} + \frac{(k')^2\,|\vec{f}''|^2}{k^4} - k^2 =$$

$$= \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - 2\frac{<\vec{f}''',\vec{f}''>^2}{k^4} + \frac{<\vec{f}''',\vec{f}''>^2}{k^4} - k^2 = \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - \frac{<\vec{f}''',\vec{f}''>^2}{k^4} - k^2$$

Отже, отримали формулу:

$$\left|\left[\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}\right]'\right|^2 = \frac{|\vec{f}'''|^2}{k^2} - \frac{<\vec{f}''', \vec{f}''>^2}{k^4} - k^2$$

З іншого боку, маємо

$$(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')^2 = \begin{vmatrix} <\vec{f}', \vec{f}'> & <\vec{f}', \vec{f}''> & <\vec{f}', \vec{f}'''> \\ <\vec{f}', \vec{f}''> & <\vec{f}'', \vec{f}''> & <\vec{f}'', \vec{f}'''> \\ <\vec{f}', \vec{f}'''> & <\vec{f}'', \vec{f}'''> & <\vec{f}''', \vec{f}'''> \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -k^2 \\ 0 & k^2 & <\vec{f}'', \vec{f}'''> \\ -k^2 & <\vec{f}'', \vec{f}'''> & |\vec{f}'''|^2 \end{vmatrix} = k^2 |\vec{f}'''|^2 - <\vec{f}'', \vec{f}'''>^2 - k^6$$

Таким чином, отримуємо:

$$\left|\left[\vec{f}', \frac{\vec{f}''}{|\vec{f}''|}\right]'\right|^2 = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')^2}{k^4}$$

Висновок. Для регулярної класу C^3 кривої γ в $I\!R^n$ в кожної її точці, що не є точкою перегину, визначається скрут

$$\kappa = \frac{|(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')|}{k^2}$$

Зауваження 1. В кожній точці P з $k \neq 0$ на кривій γ виникає своє значення скруту, тобто, маємо функцію $\kappa = \kappa(s)$. Якщо $\vec{f}(s) \in C^m$, то $\kappa(s) \in C^{m\text{-}3}$.

Зауваження 2. Скрут κ характеризує швидкість, з якою змінюється щільнодотична площина кривої, коли точка рухається по кривій.

Зауваження 3. Скрут κ не залежить від розташування кривої γ в просторі. Інакше кажучи, якщо до кривої γ застосувати паралельний перенос, обертання або симетрію в $I\!R^n$, то скрут κ не зміниться.

Зауваження 4. Для кривих в $I\!R^2$, як і для плоских кривих в $I\!R^n$, $n \geq 3$, скрут тотожно дорівнює нулю: $\kappa \equiv 0$.

Зауваження 5. Для кривих в $I\!R^3$ скрут κ визначається зі знаком:

$$\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{k^2}$$

Як обчислити функцію скруту, коли крива γ задана радіус-вектором
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b),$$
відносно довільного параметра t ?

Від довільного параметра t можна перейти до натурального параметра s :
$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|$$

Маємо:
$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\vec{f}}{ds^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2},$$
$$\frac{d^3\vec{f}}{ds^3} = \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^3t}{ds^3},$$

$$\left(\frac{d\vec{f}}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{f}}{ds^3}\right) =$$
$$= \left(\frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{ds}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^3t}{ds^3}\right) =$$
$$= \left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = \left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right) \Big/ \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6$$

$$\kappa = \frac{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right)}{k^2 \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6} = \frac{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right)}{\frac{\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|^2}{\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|^6} = \frac{\left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{f}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\right]\right|^2}$$

Формула:

$$\boxed{\kappa = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|[\vec{f}', \vec{f}'']|^2}}$$

Координатне представлення. Якщо крива γ в R^3 задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

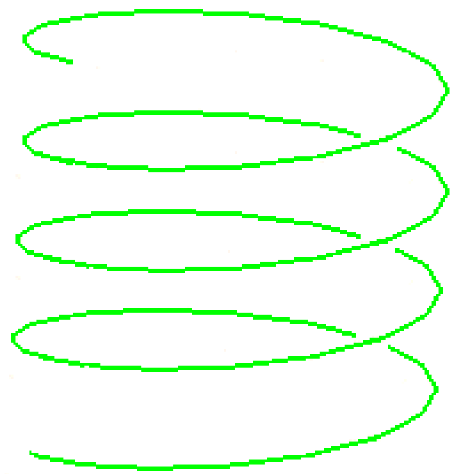
то скрут обчислюється за формулою

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}$$

Приклад. Гвинтова лінія в $\mathbb{R}^3$, задана параметрично

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases}$$

має постійний скрут $\kappa \equiv \dfrac{h}{r^2 + h^2}$

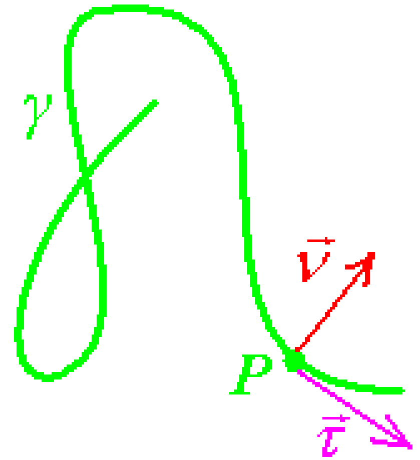


Висновок-анонс.

1. Для регулярної кривої γ в двомірній площині $\mathbb{R}^2$ усі геометричні властивості кривої, які не залежать від розташування кривої в площині, закодовані саме у функції кривини $k=k(s)$.

2. Для регулярної кривої γ в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ усі геометричні властивості кривої, які не залежать від розташування кривої в просторі, закодовані саме у функціях кривини $k=k(s)$ і скруту $\kappa=\kappa(s)$.

3. Локальний вигляд кривої в площині $I\!R^2$



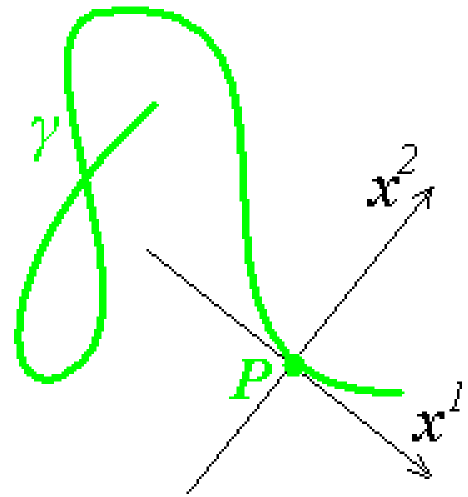
Розглянемо регулярну класу C^2 параметрично задану криву γ в $I\!R^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s - натуральний параметр.

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ.

Виберемо декартову систему координат в площині в $I\!R^2$ так, що точка P – початок координат, координатна вісь x^1 направлена вздовж дотичної прямої кривої γ в точці P, а координатна вісь x^2 направлена вздовж нормальної прямої кривої γ в точці P.

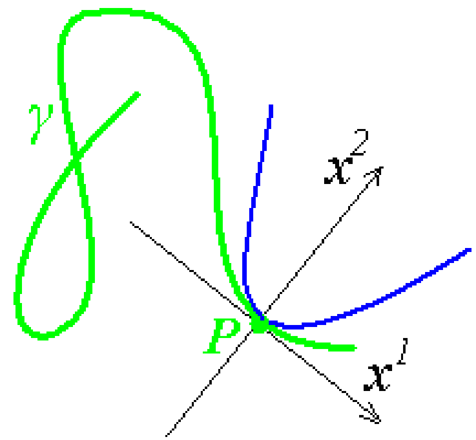


Запишемо розкладання Тейлора вектор-функції $\vec{f}(s)$ в точці P:

$$\vec{f}(s) = \vec{f}(s_0) + \frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)\cdot(s-s_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}(s_0)\cdot(s-s_0)^2 + \vec{o}((s-s_0)^2) =$$

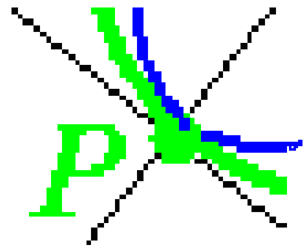
$$= \vec{\tau}(s_0)\cdot(s-s_0) + \frac{1}{2}\cdot k(s_0)\cdot\vec{\nu}(s_0)\cdot(s-s_0)^2 + \vec{o}((s-s_0)^2)$$

В координатній формі маємо:



$$\begin{cases} x^1 = s - s_0 + o((s-s_0)^2) \\ x^2 = k(s_0)\cdot(s-s_0)^2 + o((s-s_0)^2) \end{cases}$$

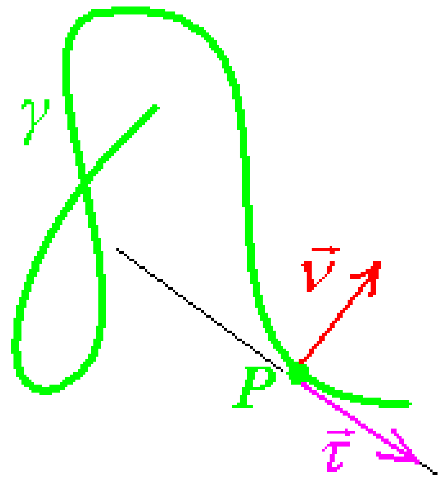
Як наслідок, якщо $k(s_0)\neq 0$, то в досить малому околі точки P крива γ виглядає приблизно (з точністю до $o((s\text{-}s_0)^2)$) як парабола



$$x^2 = k_0\cdot(x^1)^2$$

Зовнішня форма параболи, а як наслідок – зовнішня форма кривої γ в досить малому околі точки P, визначаються значенням кривини $k_0= k(s_0)$.

Зауваження. Якщо P не є точкою перегину, $k(s_0)\neq 0$, то в досить малому околі точки P крива γ лежить по одну сторону від дотичної прямої, причому саме в тій півплощині, куди направлено вектор $\vec{v}$ (еквівалентно – вектор $\vec{f}''$).



4. Локальний вигляд кривої в просторі $I\!R^3$

Розглянемо регулярну класу C^2 параметрично задану криву γ в $I\!R^3$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b),$$

s – натуральний параметр.

Нагадування:

$$<\vec{f}', \vec{f}'> \equiv 1 \qquad <\vec{f}'', \vec{f}''> = k^2$$

$$<\vec{f}', \vec{f}''> \equiv 0 \qquad <\vec{f}'', \vec{f}'''> = k\,k'$$

$$<\vec{f}'', \vec{f}''> + <\vec{f}', \vec{f}'''> \equiv 0$$

$$<\vec{f}', \vec{f}'''> = -k^2$$

Запишемо, як похідні радіус-вектора виражаються через вектори базиса Френе $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$. Маємо:

$$\vec{f}' = \vec{\tau}$$

$$\vec{f}'' = k\vec{\nu}$$

Запишемо

$$\vec{f}''' = A\vec{\tau} + B\vec{\nu} + C\vec{\beta} = A\vec{f}' + B\frac{1}{k}\vec{f}'' + C\frac{1}{k}[\vec{f}', \vec{f}'']$$

Знайдемо крок за кроком коефіцієнти A, B, C.

Маємо: $$\vec{f}''' = A\vec{f}' + B\frac{1}{k}\vec{f}'' + C\frac{1}{k}[\vec{f}', \vec{f}'']$$

$$1) < \vec{f}', \vec{f}''' >= A < \vec{f}', \vec{f}' > +B\frac{1}{k} < \vec{f}', \vec{f}'' > +C\frac{1}{k} < \vec{f}', [\vec{f}', \vec{f}''] >$$

$$-k^2 = A$$

$$2) < \vec{f}'', \vec{f}''' >= A < \vec{f}'', \vec{f}' > +B\frac{1}{k} < \vec{f}'', \vec{f}'' > +C\frac{1}{k} < \vec{f}'', [\vec{f}', \vec{f}''] >$$

$$k\, k' = B\frac{1}{k}k^2$$

$$k' = B$$

$$3) < [\vec{f}', \vec{f}''], \vec{f}''' >= A < [\vec{f}', \vec{f}''], \vec{f}' > +B\frac{1}{k} < [\vec{f}', \vec{f}''], \vec{f}'' > +C\frac{1}{k} < [\vec{f}', \vec{f}''], [\vec{f}', \vec{f}''] >$$

$$\kappa k^2 = C\frac{1}{k}k^2$$

$$\kappa k = C$$

Отже, отримали: $$\vec{f}''' = -k^2\vec{\tau} + k'\vec{\nu} + \kappa k\vec{\beta}$$

Запишемо тепер розкладання Тейлора для радіус-вектора $\vec{f}(s)$ кривої γ в довільній точці $P(s_0)$, що не є точкою перегину ($k(s_0)\neq 0$):

$$\vec{f}(s)=\vec{f}(s_0)+\vec{f}'(s_0)\cdot(s-s_0)+\frac{1}{2}\cdot\vec{f}''(s_0)\cdot(s-s_0)^2+\frac{1}{6}\cdot\vec{f}'''(s_0)\cdot(s-s_0)^3+\vec{o}((s-s_0)^3)$$

Підставимо

$$\vec{f}'=\vec{\tau}$$
$$\vec{f}''=k\vec{\nu}$$
$$\vec{f}'''=-k^2\vec{\tau}+k'\vec{\nu}+\kappa k\vec{\beta}$$

Отримаємо:

$$\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0)=$$
$$=\vec{\tau}_0\cdot(s-s_0)+\frac{1}{2}k_0\vec{\nu}_0\cdot(s-s_0)^2+\frac{1}{6}(-k_0^2\vec{\tau}_0+k_0'\vec{\nu}_0+\kappa_0 k_0\vec{\beta}_0)(s-s_0)^3+\vec{o}((s-s_0)^3),$$

тобто,

$$\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0)=\vec{\tau}_0\cdot((s-s_0)-\frac{k_0^2}{6}(s-s_0)^3)+\vec{\nu}_0\cdot(\frac{1}{2}k_0(s-s_0)^2+\frac{k_0'}{6}(s-s_0)^3)+$$
$$+\vec{\beta}_0\cdot\frac{\kappa_0 k_0}{6}(s-s_0)^3+\vec{o}((s-s_0)^3)$$

Оберемо тепер систему координат в $\mathbb{R}^3$ так, щоб точка P була початком координат, а вектори базису Френе $\vec{\tau}_0$, $\vec{\nu}_0$, $\vec{\beta}_0$ в точці P були напрямними векторами координатних осей x^1, x^2, x^3.

Крім того, натуральний параметр на кривій γ будемо відраховувати від точки P , тобто, $s_0=0$.

Тоді матимемо:

$$\vec{f}(s)=\begin{pmatrix} s+o(s) \\ \frac{1}{2}k_0\, s^2+o(s^2) \\ \frac{\kappa_0 k_0}{6}s^3+o(s^3) \end{pmatrix}$$

Щоб проаналізувати зовнішній вигляд кривої γ, спроектуємо її на координатні площини в $\mathbb{R}^3$.

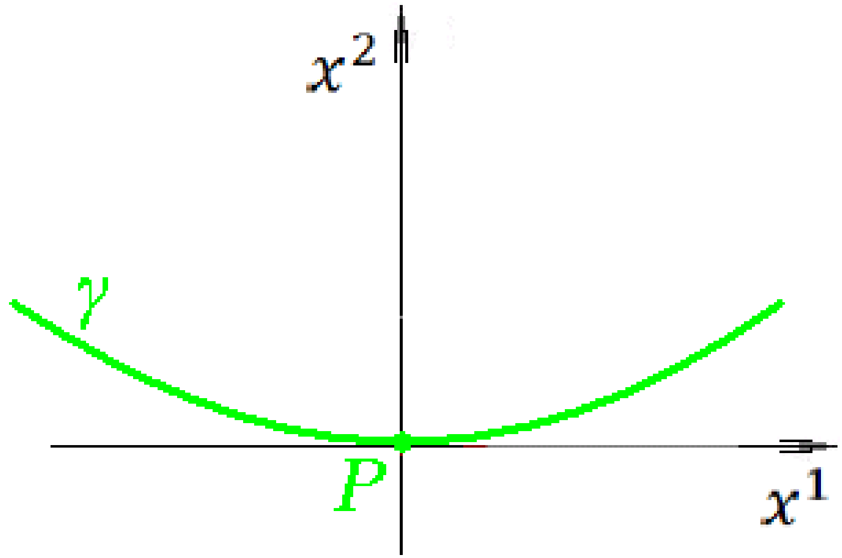
В проекції на площину (x^1, x^2), що є щільнодотичною площиною кривої γ в точці P , отримаємо:

$$x^1 = s + o(s)$$

$$x^2 = \frac{k_0}{2} s^2 + o(s^2)$$

Отже, в проекції крива γ виглядає *приблизно* як парабола

$$x^2 = \frac{k_0}{2} (x^1)^2$$

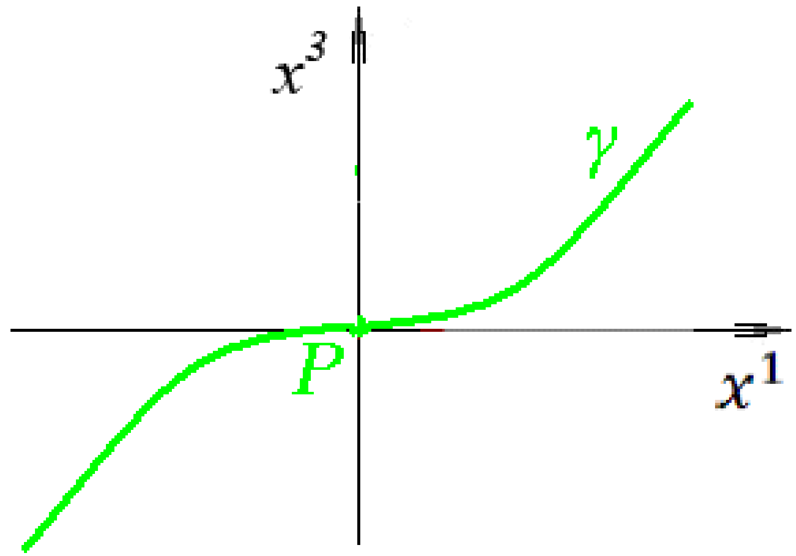


Кривизна $k_0 = k(0)$ в точці P – це коефіцієнт в рівнянні параболи. Чим більше (менше) значення k_0, тим сильніше (слабше) викривлена парабола в точці P.

В проекції на площину (x^1, x^3), що є спрямною площиною кривої γ в точці P, отримаємо:

$$x^1 = s + o(s)$$

$$x^3 = \frac{k_0 \varkappa_0}{6} s^3 + o(s^3)$$



Якщо не лише кривина $k_0 \neq 0$, а і скрут $\varkappa_0 \neq 0$, то в проекції крива γ виглядає *приблизно* як кубічна крива

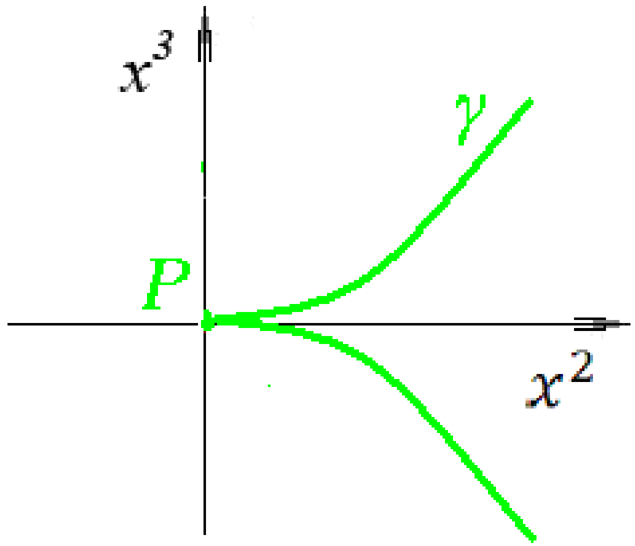
$$x^3 = \frac{k_0 \varkappa_0}{6} (x^1)^3$$

Кривизна $k_0 = k(0)$ та скрут $\varkappa_0 = \varkappa(0)$ кривої γ в точці P визначають коефіцієнт в рівнянні кубічної кривої.

В проекції на площину (x^2, x^3), що є нормальною площиною кривої γ в точці P, отримаємо:

$$x^2 = \frac{k_0}{2} s^2 + o(s^2)$$

$$x^3 = \frac{k_0 \varkappa_0}{6} s^3 + o(s^3)$$



Якщо скрут $\neq 0$, то в проекції крива γ виглядає *приблизно* як півкубічна парабола

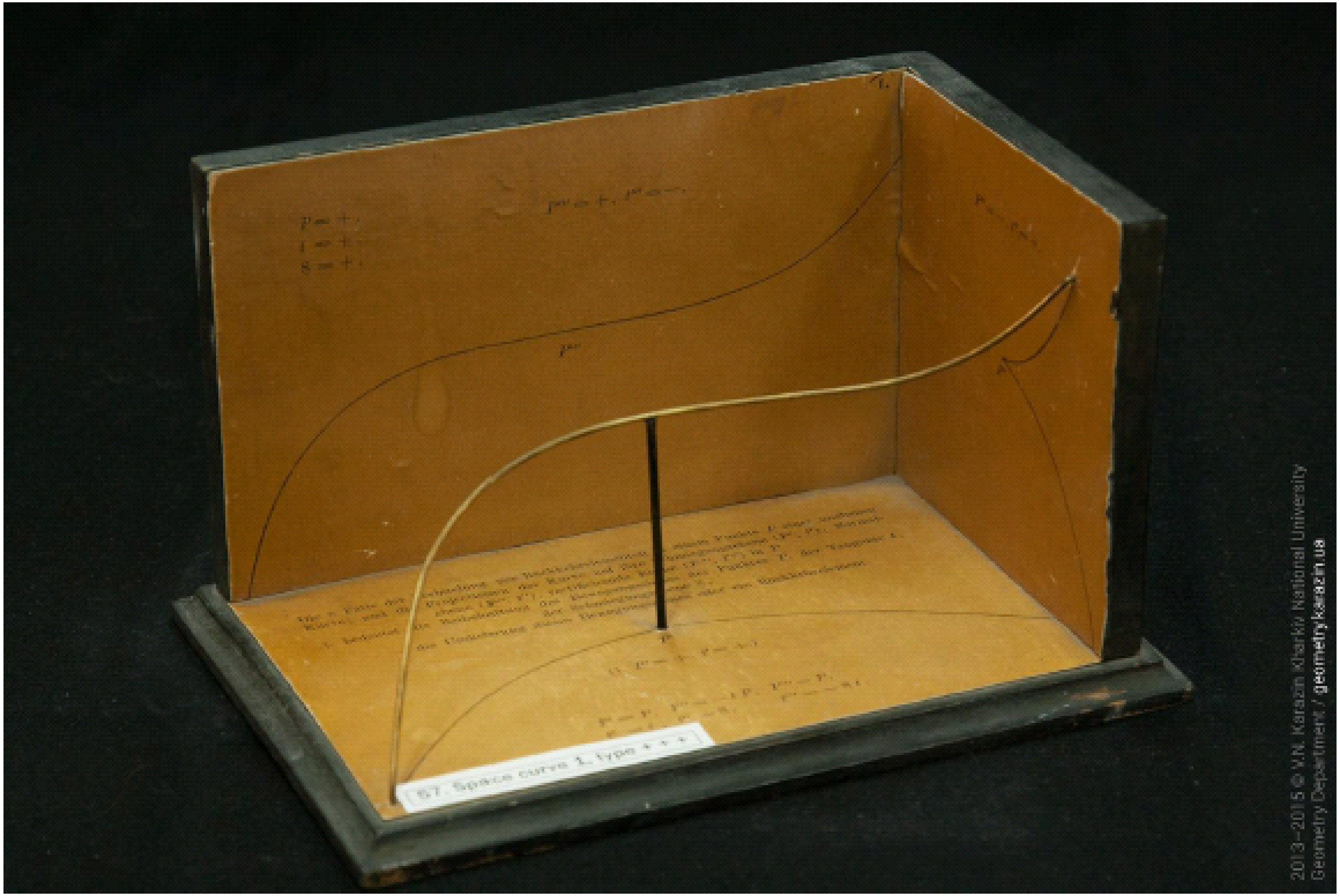
$$x^2 = \frac{k_0}{2} s^2$$

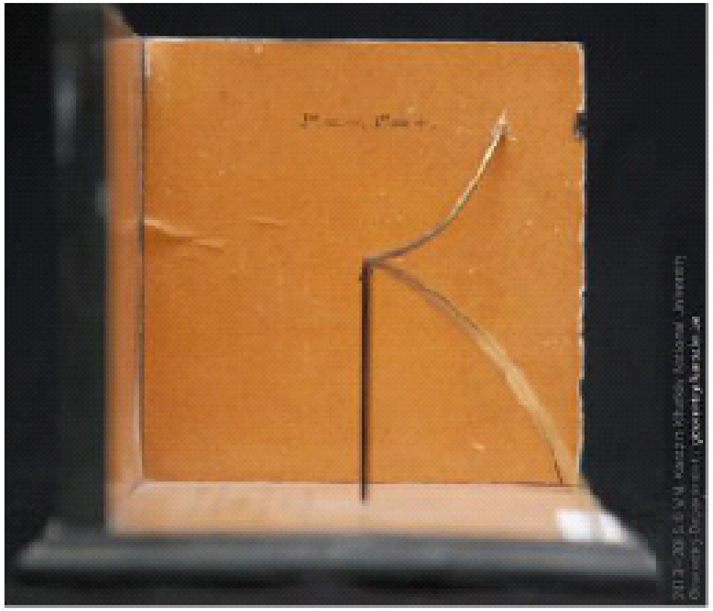
$$x^3 = \frac{k_0 \varkappa_0}{6} s^3$$

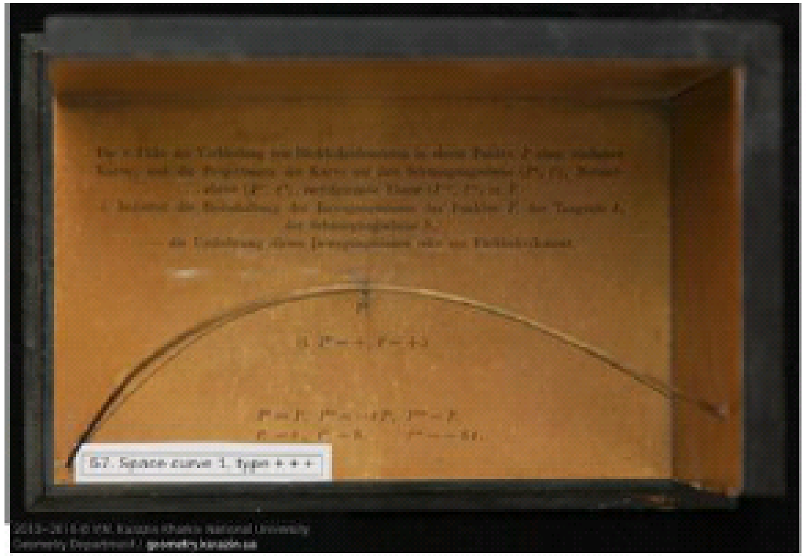
Кривизна $k_0 = k(0)$ та скрут $\varkappa_0 = \varkappa(0)$ кривої γ в точці P визначають коефіцієнти в параметричних рівняннях півкубічної параболи.

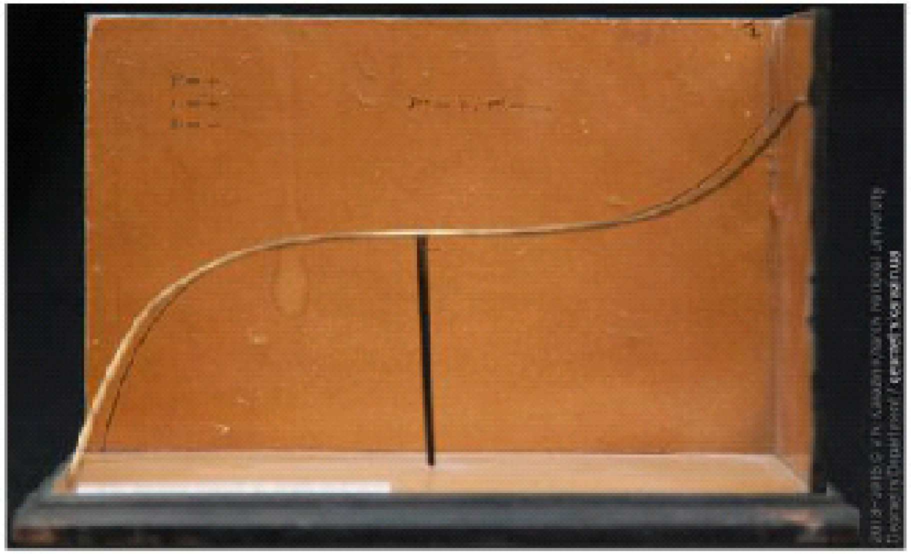
Колекція геометричних моделей:

http://geometry.karazin.ua/geometric-models-collection.html









Нами розглянуто загальний випадок, коли $k_0 \neq 0$, $\varkappa_0 \neq 0$.

Якщо $k_0 = 0$ або $k_0 \neq 0$, $\varkappa_0 = 0$, то формули і малюнки будуть іншими!

Наслідок–висновок. Значення кривини k_0 та скруту $\varkappa_0$ кривої γ в точці P визначають *приблизну* поведінку кривої γ в досить малому околі точки P.

Наслідок. *Якщо крива γ має ненульову кривину $k \neq 0$ в точці P, то досить малий окіл точки P на кривій γ лежить по одну сторону від спрямної площини кривої γ в точці P, причому саме в тому півпросторі, куди спрямовано вектор головної нормалі $\vec{\nu}(P)$.*

Доведення. З отриманого вище розкладу

$$\vec{f}(s) = \vec{\tau}_0 \cdot \left(s - \frac{k_0^2}{6}s^3\right) + \vec{\nu}_0 \cdot \left(\frac{k_0}{2}s^2 - \frac{k_0'}{6}s^3\right) + \vec{\beta}_0 \cdot \left(\frac{k_0\,\varkappa_0}{6}s^3\right) + \vec{o}(s^3)$$

легко вбачити, що коефіцієнт при $\vec{\nu}_0$ (вісь x^2) є додатним при досить малих за модулем значеннях параметру s. А це і означає, що крива γ лежить у півпросторі $x^2>0$, визначеному спрямною площиною $x^2=0$ кривої γ в точці P, при цьому саме в тому підпросторі, куди направлений вектор $\vec{\nu}_0$.