711. Знайти рівняння дотичних до кола $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, що паралельні прямій $Ax+By+C=0$.

З 713, дотична у (x_0,y_0) на колі:

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0$$

Умова паралельності:

$$\frac{a-x_0}{A}=\frac{b-y_0}{B}=:\lambda$$

Т.ч., $a-x_0=\lambda A$, $b-y_0=\lambda B$. $(x_0,y_0)\in$ колу:

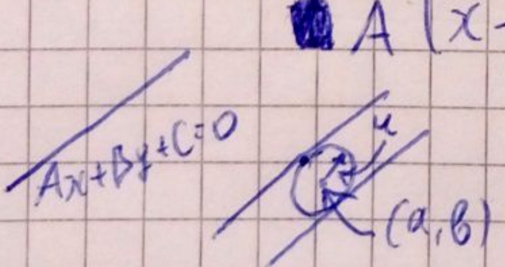
$r^2=(x_0-a)^2+(y_0-b^2)=\lambda^2A^2+\lambda^2B^2 \Rightarrow \lambda^2=\frac{r^2}{A^2+B^2}$, $\lambda=\pm\frac{r}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

$a-x_0=\pm\frac{rA}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $b-y_0=\pm\frac{rB}{\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow (x_0,y_0)=\left(a\mp\frac{rA}{\sqrt{A^2+B^2}}, b\mp\frac{rB}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$. Підставимо у рівн. дотичної:

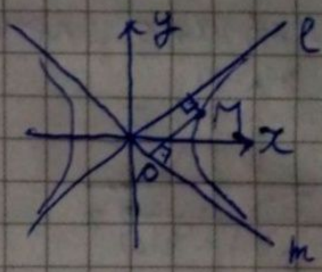
$$\pm\frac{rA}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(x-a\pm\frac{rA}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)\pm\frac{rB}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(y-b\pm\frac{rB}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)=0$$

$$\pm\frac{r}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(A(x-a)+B(y-b)\right)+\frac{r^2}{A^2+B^2}(A^2+B^2)=0$$

$$A(x-a)+B(y-b)\pm r\sqrt{A^2+B^2}=0$$



743. Нехай l, m – асимптоти гіперболи. Тоді $d(M,l)\, d(M,m)$ одне й те саме $\forall\, M \in$ гіперболі.



Можемо вважати гіп. канонічною:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Асимптоти: $y = \pm \frac{b}{a} x$

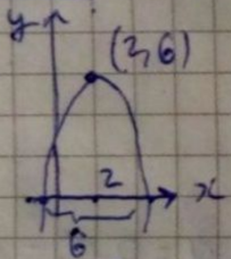
$$bx \pm ay = 0$$

$$d(M,l) = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}, \quad d(M,m) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

Добуток:

$$d(M,l)\cdot d(M,m) = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2+b^2} = a^2b^2\,\frac{\left|\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right|}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

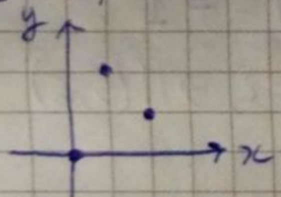
749. Парабола, верш. $(2,6)$, вісь $\parallel Oy$, вис. хорду довж. 6 на Ox:



$$(x-2)^2 = -2p(y-6)$$

Перет. Ox у $(-1,0)$, $(5,0)$. Підставимо...

754. Знайти рівн. гіп.: асимптоти $\parallel Ox, Oy$, прох. через $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$.



Шукаємо у вигляді $2(x-x_0)(y-y_0) = \pm a^2$:

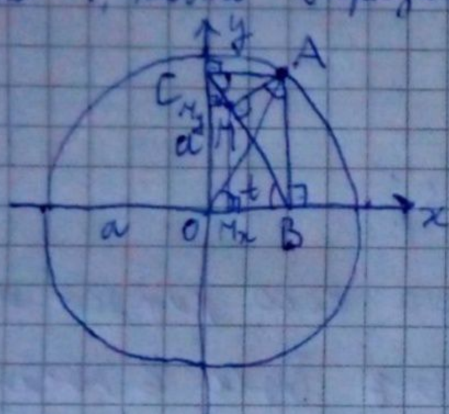
$$\begin{cases} 2x_0y_0 = \pm a^2 \\ 2(2-x_0)(1-y_0) = \pm a^2 \\ 2(1-x_0)(2-y_0) = \pm a^2 \end{cases}$$

$$4 - 2x_0 - 4y_0 + \cancel{2x_0y_0} = \cancel{\pm a^2}$$

$$4 - 4x_0 - 2y_0 + \cancel{2x_0y_0} = \cancel{\pm a^2}$$

Звідси знаходимо x_0 і y_0, потім a і знак.

335. Точка A рухається колом ω (радіуса a) з центром у O - початку коорд. (декартової СК), AB - перп. до Ox, AC - до Oy, AM - до BC. Нехай t - кут від Ox до $\overline{OA}$. Записати параметричні рівняння кривої, що утворена M, тобто виразити її координати x і y через t.



$A(a\cos t, a\sin t) \Rightarrow B(a\cos t, 0),\ C(0, a\sin t)$

Тоді пряма BC: $\dfrac{x - a\cos t}{0 - a\cos t} = \dfrac{y - 0}{a\sin t - 0}$

$$\sin t\,(x - a\cos t) = -\cos t \cdot y$$

$$\sin t \cdot x + \cos t \cdot y - a\sin t\cos t = 0.$$

Пряма AM прох. через A ортогонально до BC:

$$-\cos t\,(x - a\cos t) + \sin t\,(y - a\sin t) = 0$$

$$-\cos t \cdot x + \sin t \cdot y + a\cos 2t = 0.$$

M - точка їх перетину:

$$\begin{cases} \sin t \cdot x + \cos t \cdot y - a\sin t\cos t = 0 & \big| \cdot \cos t \\ -\cos t \cdot x + \sin t \cdot y + a(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0 & \big| \cdot \sin t \end{cases} +$$

Домножимо і додамо:

$$y - a\sin^3 t = 0$$

$y = a\sin^3 t$, $x = \dfrac{1}{\sin t}\left(-\cos t \cdot y + a\sin t\cos t\right) = \cos t\left(-a\sin^2 t + a\right) = a\cos^3 t$. Отже, $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Або з прямокутних трикутників:

У Δ ABC $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = t$, $BC = OA = a \Rightarrow AB = a\sin t$, $AC = a\cos t$.

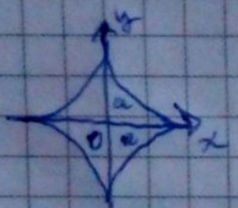
У Δ ACM $\angle M = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = t$, $AC = a\cos t \Rightarrow CM = a\cos^2 t$

У Δ ABM $\angle M = \frac{\pi}{2}$, $\angle A = t$, $AB = a\sin t \Rightarrow BM = a\sin^2 t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{У } \Delta\ CMM_y\ \angle M_y = \frac{\pi}{2}, \angle M = t, CM = a\cos^2 t \Rightarrow MM_y = a\cos^3 t \\ \text{У } \Delta\ BMM_x\ \angle M_x = \frac{\pi}{2}, \angle B = t, BM = a\sin^2 t \Rightarrow MM_x = a\sin^3 t \end{array}\right\}$$

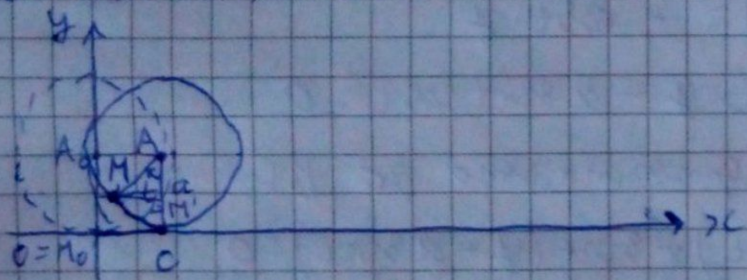
Перейдемо до неявного рівняння: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow$

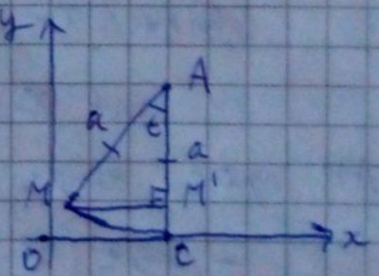
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



(Астроїда).

337. Віссю Ox без проковзання котиться коло радіуса a, M – точка на колі, що на початку руху була в початку коорд. (дек. с.к.), A – центр кола, AC – перп. до Ox, t – кут від $\overline{AC}$ до $\overline{AM}$. Знайти парам. рівн. кривої, що утв. M, з параметром t.

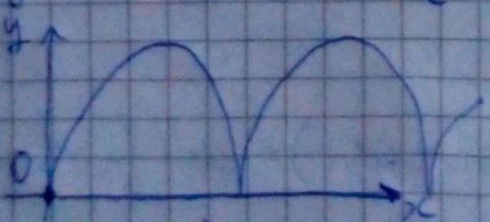




Котиться без проковзання $\Rightarrow OC = \smile MC = at$. Тому $A(at, a)$.

$\overline{AM}\,(-a\sin t, -a\cos t)$ (з прямокутного $\Delta AMM'$)

Тому $M = A + \overline{AM} = (at - a\sin t,\ a - a\cos t)$.



(Циклоїда)

336. ω – коло з діаметром OK, $OK = a$, l – дот. до ω у K. Навколо O обертається пряма m, $m \cap \omega = \{A\}$; $m \cap l = \{B\}$, прямі

$n \ni A$, $n \parallel l$, $k \ni B$, $k \parallel OK$, $n \cap k = \{M\}$. Знайти рівн. ГМТ M у декартовій с.к. з початком O і $Ox = OK$.

У відповідній полярній с.к.: A: $\rho = a\cos\varphi \Rightarrow M_x = A_x = a\cos^2\varphi$.

B: $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \Rightarrow M_y = B_y = \dfrac{a}{\cos\varphi}\cdot\sin\varphi = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

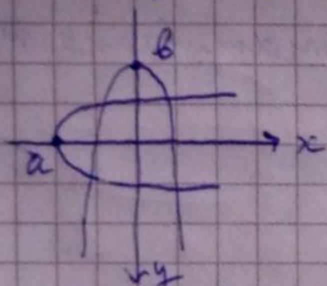
Отже, рівн. кривої (верзієри Марії Аньєзі) $\begin{cases} x = a\cos^2\varphi \\ y = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \end{cases}$

Неявно: $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi$: $\dfrac{a}{x} = 1 + \dfrac{y^2}{a^2}$

$$a^3 = a^2x + xy^2.$$

747. Якщо осі 2 парабол перпендикулярні, то їх 4 точки перетину лежать на 1 колі.

Введемо дек. с.к.: Ox і Oy – осі парабол (додатні):



Тоді їх рівняння (див. 737.): $\begin{cases} y^2 = 2p(x-a) \\ x^2 = 2q(y-b) \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - 2px + 2pa = 0 \\ x^2 - 2qy + 2qb = 0 \end{cases}$

Точки перетину задов. цій системі, тому для них

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + 2pa + 2qb = 0$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pa - 2qb.$$

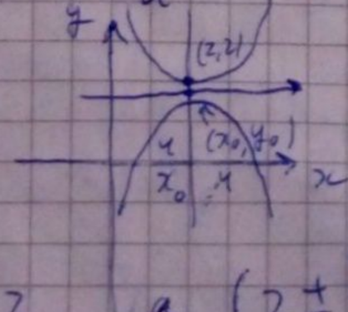
Ми знаємо, що це не $\varnothing$ і не 1 точка, тому справа >0, і це коло.

750. Рівнобічна гіпербола, одна з вершин – $(2,2)$, дійсна вісь $\parallel Oy$, на Ox висікає хорду довжини 8. Знайти рівн.

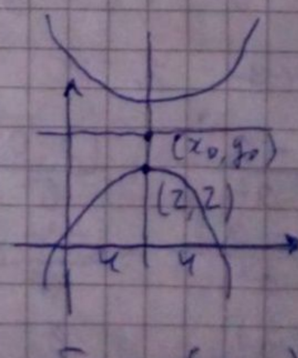
Рівнобічна і дійсна вісь $\parallel Oy$ => рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = -1$$

Розглядування:



або



В $\forall$ разі $x_0 = 2$, а $\left(2 \pm \frac{8}{2}, 0\right)$, тобто $(-2,0)$ і $(6,0)$ –

т. перетину з Ox. Підставимо точки:

$(2,2)$: $(2-2)^2 - (2-y_0)^2 = -a^2$

$(-2,0)$: $(-2-2)^2 - (0-y_0)^2 = -a^2$

$$\begin{cases} y_0^2 - 4y_0 + 4 = a^2 \\ y_0^2 - 16 = a^2 \end{cases}$$

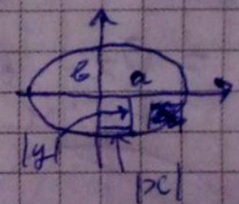
$$-4y_0 + 20 = 0$$

$y_0 = 5$ (тобто це другий варіант розташування) $\Rightarrow a^2 = 25-16 = 9$:

$$(x-2)^2 - (y-5)^2 = -9$$

751. $l: x+y-1=0$ і $m: x-y+1=0$ – велика та мала осі еліпса, $a=2, b=1$. Знайти рівняння.

Помітимо, що у канон. рівнянні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a>b$



$|x|$ – це відстань до малої осі, $|y|$ – до великої.

Тому рівняння в загальному вигляді:

$$\frac{d(M,m)^2}{a^2} + \frac{d(M,l)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$(x-y+1)^2 + 4(x+y-1)^2 = 8$$

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$$

760. Знайти фокус і директрису параболи

$$3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$$

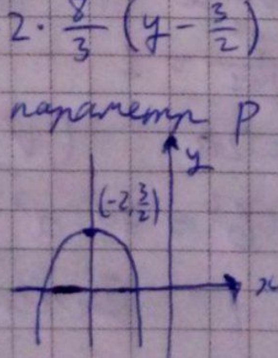
Виділяємо повний квадрат:

$$3(x^2 + 4x + 4) - 12 + 16y - 12 = 0$$

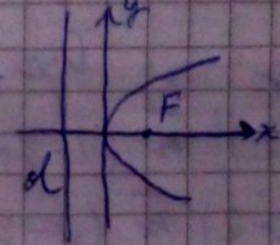
$$3(x+2)^2 = -16\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

$$(x+2)^2 = -2\cdot\frac{8}{3}\left(y - \frac{3}{2}\right)$$

Вершина у $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, параметр $p = \frac{8}{3}$, вісь $\parallel$ від'ємному напр. Oy (див. 737)



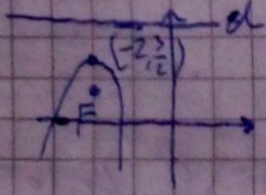
Для канонічної пар. $y^2 = 2px$



Фокус у $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, директриса d:

$x = -\frac{p}{2}$.

У нас:

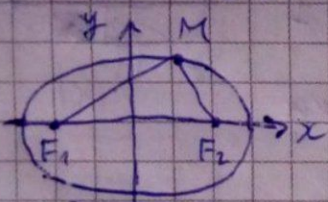


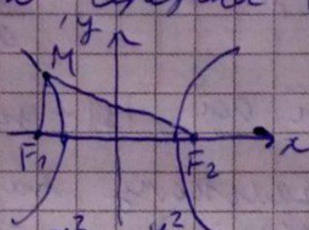
Фокус $F\left(-2, \frac{3}{2} - \frac{p}{2}\right) = \left(-2, \frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) = \left(-2, \frac{1}{6}\right)$

Директриса d: $y = \frac{3}{2} + \frac{p}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}$

763. Знайти рівн. еліпса і гіперболи з фокусами $F_{1,2}(\pm 7, 0)$, що проходять через $M(-2, 12)$

З такими фокусами рівн. канонічні (бо фокальна вісь $F_1F_2 = Ox$ – вісь симетрії, середина $(0,0)$ відр. F_1F_2 – центр):





$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), c = \sqrt{a^2 - b^2}$ | $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Тобто $c = 7$. Для еліпса тоді $a^2 - b^2 = 49$, для гіп. $a^2 + b^2 = 49$

Далі можна підставити M. Еліпс:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{144}{b^2} = 1$$
$$\frac{4}{a^2} + \frac{144}{a^2 - 49} = 1$$

і розв'язувати відн. a. Або згадати фокальну властивість: $MF_1 + MF_2 = 2a$. (вірно $\forall M \in$ еліпсу)

Тобто $2a = \sqrt{(-2+7)^2 + (12-0)^2} + \sqrt{(-2-7)^2 + (12-0)^2} = 13 + 15 = 28$

$a = 14$. Дійсно, у рівн. вище $\frac{4}{14^2} + \frac{144}{14^2 - 7^2} = \frac{1}{49} + \frac{144}{49(4-1)} = \frac{1}{49} + \frac{48}{49} = 1$.

Отже рівняння $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{147} = 1$. $(b^2 = a^2 - 49 = 147)$.

Гіпербола: $|MF_1 - MF_2| = 2a$ ($\forall M \in$ гіперболі)

$2a = |13 - 15| = 2$, $a = 1$, $b^2 = 49 - a^2 = 48$

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{48} = 1$. Дійсно, M підходить.

Або можна було б вивести рівн. із фок.

властивостей безпосередньо!

Еліпс: $\sqrt{(x+7)^2+y^2}+\sqrt{(x-7)^2+y^2}=28$,

Гіпербола: $\left|\sqrt{(x+7)^2+y^2}-\sqrt{(x-7)^2+y^2}\right|=2$.