Занурення і вкладення

def. Відображення $\varphi \in C^k(M,N)$ (де M, N – k-гладкі многовиди, $k \geq 1$) зветься зануренням (іммерсією) у $p \in M$, якщо $\operatorname{rank}_p \varphi = \dim M$; φ зветься зануренням, якщо це занурення $\forall\, p \in M$.

Rem. φ – занурення в $p \Leftrightarrow \operatorname{rank} d_p\varphi = \dim M = \dim T_pM \Leftrightarrow d_p\varphi$ – ін'єкція $\Rightarrow \dim M \leq \dim N$.

Rem. Ан-но до лок. диф-зму (це частковий випадок) і субмерсії, з **Th.** про ранг випливає (див. Rem. вище):

Cor. Якщо φ – занурення в p, то $\exists$ карти (U,ϕ) і (V,ψ): $p \in U$, $\varphi(p) \in V$, і локальне задання

$$\psi \circ \varphi \circ \phi^{-1} : (u^1, \ldots, u^n) \mapsto (u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0)$$

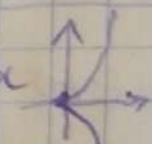
Rem. Вірне й обернене.

Ex. 1. Лок. дифео-зм.

2. Гладкі криві $\gamma \in C^k((a,b), M)$: γ – занурення в t

$\Leftrightarrow$ rank $d_t\gamma = \dim(a,b) = 1 \Leftrightarrow d_t\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) \neq 0$, тобто γ регулярна в t.

~~Най~~Кубічна парабола



$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, t^3)$ – нерегулярна в $t=0$

<u>3.</u> Згадаємо про підмноговиди в $\mathbb{R}^{n+q}$: $\varphi \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+q})$.

Умова $\forall\, p \in M$ $\operatorname{rank}_p \varphi = \dim M = n \Leftrightarrow \forall p$ $d_p\varphi$ – ін'є $\Leftrightarrow \forall p$ $\forall$ лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ в околі p $d_p\varphi$ переводить базис $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}\right\}$ простору T_pM у лінійно незалежну систему $\left\{\varphi_{u^i}(p) = d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right\}_{i=1}^n$ в $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n+q} \leftrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ це і є введена раніше умова регулярності (звичайно, вона також $\Leftrightarrow$ рівності n рангу м-ці Якобі лок. задання φ $\forall p$ і $\forall$ лок. координат).

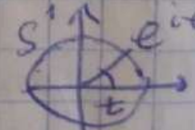
<u>def.</u> $\varphi \in C^k(M, N)$ зветься вкладенням, якщо φ – занурення і топологічне вкладення, тобто $\varphi: M \to \varphi(M)$ – гомеоморфізм, де $\varphi(M)$ – з індукованою з N топологією.

Rem. Якщо φ - вкладення, то на $\varphi(M)$ з індукованою топологією можна перенести гл. структуру з M за допомогою гомеоморфізма $\varphi: M \to \varphi(M)$. А саме, нехай $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ - атлас з k-гл. стр. M. Тоді $\varphi(\mathcal{A}) := \{(\varphi(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})\}_{\alpha \in A}$ задовольняє def. k-гл. атласу $\varphi(M)$ ($\varphi(U_\alpha)$ відкр., бо φ - гомео-зми і утворюють покриття $\varphi(M)$, бо U_α утв. покриття M і φ - бієкц.; $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ - гомео-зми як комп. гомео-змів; $\varphi(M)$ тоді задов. def. n $(= \dim M)$ - вим. многовиду ($\varphi(M)$ - хаусд. і з ! $\leq$ зл. базою, бо N таке, а топ. індукована), а $\varphi(\mathcal{A})$ - його атласу; відобр. переходу $\varphi_\beta \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ - ті ж, що у $\mathcal{A}$, тому k-гладкі), і $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Rightarrow \varphi(\mathcal{A}) \sim \varphi(\mathcal{B})$ (аналогічні міркування), тому однозначно визначена k-гл. структура на $\varphi(M)$. При цьому у картах $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(\varphi(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})$ лок.

задання φ буде $(\Phi_\alpha \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \Phi_\alpha^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, тому
φ - дифеоморфізм. Так переносити структуру можна
$\forall$ гомео-зма $g: M \to L$ (і взагалі $\forall$ біє, але тоді
треба переносити і топологію). З урахуванням цієї
конструкції можна казати, що φ - дифеоморфізм на $\varphi(M)$.

Ex.1. Звісно, φ - вкладення $\Rightarrow$ φ - іну, тому неін'єкт.
занурення - не вкладення. Наприклад:

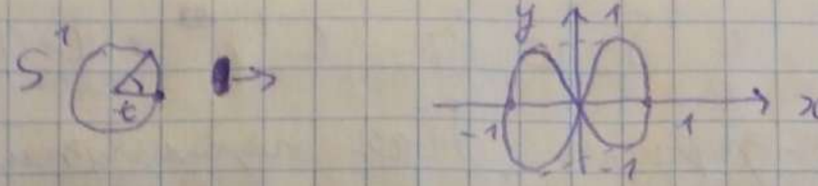
$\gamma: S^1 \to \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi)$

(це замкнена крива, тобто гладке (тут ∞) відобр. S^1 у
многовид; взагалі S^1 і $\mathbb{R}$ вичерпують зв'язні 1-вимірні
многовиди з точністю до дифео-зма у $\forall$ гладкості
включно з 0; t можна розуміти як коорд.: 

).

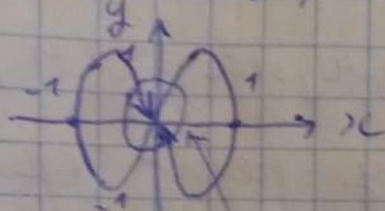
$\gamma'(t) = (-\sin t, 2\cos 2t) \neq 0 \ \forall t$, тому це занурення
(рег. крива). $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,0) = \gamma(\frac{3\pi}{2})$, тому вона не іну $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не вкладення



2. Модифікуємо попередній приклад:

$\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$: $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$.



Ан-но, це занурення; крім того, γ - ін'є.

Але це не вкладення: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ не гомеоморфне $\gamma((-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}))$ з індук. топ. (і тим більше γ - не гомеоморфізм):

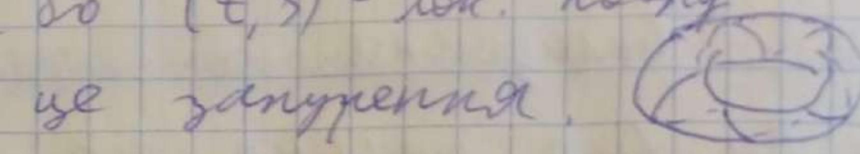
$\boxed{\text{або можна перевірити, що } \gamma \text{ переводить окіл } (\tfrac{\pi}{2}-\varepsilon, \tfrac{\pi}{2}+\varepsilon) \text{ у множину, що не відкр. у індук. топ.} \Rightarrow \gamma \text{ - не відкрите.}}$

- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ - не компакт, образ - компакт.
- образ - взагалі не многовид (1-вимірний), бо у $(0,0)$ немає околу, що гомеоморфний $\mathbb{R}$: .

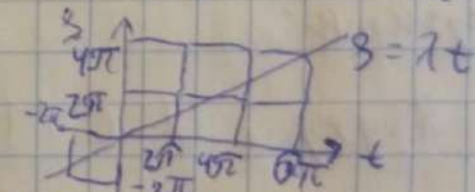
3. Обмотки тора $\gamma: \mathbb{R} \to T^2$:

$\gamma(t) = (e^{it}, e^{i\lambda t})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (тут $T^2 = S^1 \times S^1$ записуємо як пару чисел з $\mathbb{C}$ з модулем 1).

Локально $\gamma(t) = (t, \lambda t)$ (бо (t, s) - лок. коорд. $(e^{it}, e^{is}) \in T^2$) тому $\gamma' \neq 0$ - це занурення.

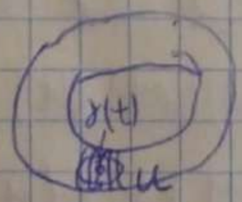


- Якщо $\lambda \in \mathbb{Q}$, крива замикається: $\gamma(t) = \gamma(t + 2\pi q)$, де $\lambda = \frac{p}{q}$, і $\gamma(\mathbb{R}) = \tilde{\gamma}(S^1)$, де $\tilde{\gamma} : S^1 \to T^2$ - вкладення (Впр., див. також наступне Рч.)



Підняття γ у накриття $\mathbb{R}^2$ тору T^2

- Якщо $\lambda \notin \mathbb{Q}$, то γ - ін'єкт (Впр.), але не вкладення, бо $\gamma(\mathbb{R})$ з індук. топологією - не 1-вимірний многовид, тому $\mathbb{R} \not\cong \gamma(\mathbb{R})$: $\forall t \in \mathbb{R}$ у $\gamma(t)$ $\nexists$ околу, гомеоморфного $\mathbb{R}$ (бо $\forall$ відкр. у T^2 $U \ni \gamma(t)$ U містить нескінченну кількість "шматків" - Впр.) При цьому $\overline{\gamma(\mathbb{R})} = T^2$



(або можна безпосередньо перевірити, що γ - не відкр. бо $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ не перех. у відкр.)

Зауважимо, що на $\gamma(\mathbb{R})$ можна перенести топологію і стр. ∞-гл. многовида з $\mathbb{R}$, але γ все одно не буде вкладенням, бо топологія - не індукована.

Рч. Якщо M - компакт і $\varphi \in C^k(M, N)$ - ін'єкт. занурення, то φ - вкладення.

▶ Ми вже знаємо, що $\varphi: M \to \varphi(M)$ - бієкція і неперервне. Залишилося перевірити, що φ^{-1} - неперервне $\Leftrightarrow$ φ - відкрите:

$\forall$ відкр. $U \subset M$ $M \setminus U$ замкнена $\Rightarrow$ [M - компакт] $\Rightarrow$ $M \setminus U$ - компакт $\Rightarrow$ [φ неперервне] $\Rightarrow$ $\varphi(M) \setminus \varphi(U) = \varphi(M \setminus U)$ - компакт $\Rightarrow$ [N хаусдорфовий $\Rightarrow$ $\varphi(M)$ хаусд.] $\Rightarrow$ $\varphi(M) \setminus \varphi(U)$ замкнена $\Rightarrow$ $\varphi(U)$ відкрита в $\varphi(M)$. ◀

Означення підмноговиду

def. 1. Нехай $\overline{M}$ - k-гладкий многовид ($k \geq 1$). (k-гладким) (занурення) підмноговидом у $\overline{M}$ будемо називати пару (M, φ), де M - k-гладкий многовид, а $\varphi \in C^k(M, \overline{M})$ - занурення. Якщо φ - вкладення, (M, φ) зветься вкладеним.

def. Два (k-гл.) підмноговиди (M, φ) і $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ в $\overline{M}$ звуться еквівалентними, якщо $\exists$ k-дифеоморфізм $F: M \to \tilde{M}$:

$\varphi = \tilde{\varphi} \circ F$.

Rem. Це узагальнення поняття еквівалентності кривих (там F – це строго монотонні гладкі ф-ції на проміжках) $\widehat{F' \neq 0}$

Pr. Це відношення еквівалентності

▷ 1. $\forall$ підмн. (M, φ): $(M, \varphi) \underbrace{\sim}_{\text{дифео-зм}} (M, \varphi)$, $F := id_M$.

2. Якщо $(M, \varphi) \sim (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, то $\exists F$: $\varphi = \tilde{\varphi} \circ F$. Тоді $F^{-1}: \tilde{M} \to M$ – також дифео-зм, і $\tilde{\varphi} = \varphi \circ F^{-1}$, тому $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}) \sim (M, \varphi)$.

3. Якщо $(M, \varphi) \sim (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, $(\tilde{M}, \tilde{\varphi}) \sim (\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{\varphi}})$, то $\exists$ дифео-зми F, G: $\varphi = \tilde{\varphi} \circ F$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}} \circ G$ $\Rightarrow$ $\varphi = \tilde{\tilde{\varphi}} \circ (G \circ F)$ і $G \circ F: M \to \tilde{\tilde{M}}$ – дифео-зм, отже $(M, \varphi) \sim (\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{\varphi}})$ ◭

Def. Клас еквівалентності k-м. підмноговидів у $\overline{M}$ зветься непараметризованим k-м. підмноговидом у $\overline{M}$.

Rem. З def., усі екв. підмноговиди мають один образ (носій):
$\varphi(M) = \tilde{\varphi}(F(M)) = \tilde{\varphi}(\tilde{M})$.

При цьому φ-ія $\Leftrightarrow$ $\tilde\varphi$-ія. Більш того, для вкладень:

Рч. 1. Якщо $(M,\varphi)\sim(\tilde M,\tilde\varphi)$ і один з підмноговидів вкладений, то $\bar\varphi$ інший також.

2. Для вкладених $(M,\varphi),(\tilde M,\tilde\varphi)$ $\varphi(M)=\tilde\varphi(\tilde M)\Leftrightarrow(M,\varphi)\sim(\tilde M,\tilde\varphi)$
(тут все k-гладке).

▷ 1. Якщо $\varphi=\tilde\varphi\circ F$ і $\tilde\varphi:\tilde M\to\tilde\varphi(\tilde M)$ - гомео-зм, то і $\varphi: M\to\varphi(M)=\tilde\varphi(\tilde M)$ - гомео-зм як композиція гомео-змів.
Ан-но для $\tilde\varphi=\varphi\circ F^{-1}$.

2. $\Leftarrow$ показали вище у загальному випадку.

$\Rightarrow$. Покладемо $F:=\tilde\varphi^{-1}\circ\varphi: M\to\tilde M$, де $\tilde\varphi^{-1}$ - обернене до обмеження $\tilde\varphi:\tilde M\to\tilde\varphi(\tilde M)=\varphi(M)$. Оскільки за умовою (обмежені) φ і $\tilde\varphi$ - гомео-зми, то і F - гомео-зм. Доведемо його гладкість. Нехай $p\in M$ і $\tilde p=F(p)\in\tilde M$, тобто $\varphi(p)=\tilde\varphi(\tilde p)$. Нехай $(U,\phi),(V,\psi)$ - карти M і $\overline{M}$ в околах p і $\varphi(p)$ відп. з лок. коорд. $(u^1,..,u^n)$ і $(x^1,..,x^{n+q})$ відп.,

а $(\tilde U,\tilde\varphi)$ і $(\tilde V,\tilde\psi)$ – карти $\tilde M$ і $\bar M$ в околах $\tilde p$ і $\tilde\iota(\tilde p)=\iota(p)$ відп. З <u>Th.</u> про ранг: лок. задання $\tilde\iota$ має вигляд $\tilde\psi\circ\tilde\iota\circ\tilde\varphi^{-1}:(y^1,\dots,y^n)\mapsto(y^1,\dots,y^n,0,\dots,0)$.
Тоді у деякому околі p лок. задання F буде мати вигляд:
$\tilde\varphi\circ\tilde\iota^{-1}\circ\iota\circ\varphi^{-1}=(\tilde\varphi\circ\tilde\iota^{-1}\circ\tilde\psi^{-1})\circ(\tilde\psi\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\iota\circ\varphi^{-1})$ – композиція лок. задання ι, відобр. переходу і оберненого до лок. задання $\tilde\iota$:
$(u^1,\dots,u^n)\mapsto(x^1,\dots,x^{n+q})\mapsto(y^1,\dots,y^n,0,\dots,0)\mapsto(y^1,\dots,y^n)$;
оскільки кожне з цих відобр. k-гладке (останнє – ∞-гладке), F – k-гладке в околі p. Ан-но перевіряємо гладкість $F^{-1}=\iota^{-1}\circ\tilde\iota$. Отже F – дифео-зм і за побудовою $\iota=\tilde\iota\circ F$. ▲

<u>Rem.</u> У <u>Ex.1</u> і <u>2.</u> вище криві мають однакові образи, але не еквівалентні, бо S^1 не гомеоморфне $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. Вони обидві не вкладені. Або можна розглянути <u>Ex.2.</u> і таку ж $\tilde\gamma:(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^2$, γ і $\tilde\gamma$ – ін'є, але $\tilde\gamma^{-1}\circ\gamma$ – не неперервне.

<u>Rem.</u> Як бачили вище, для вкладеного (M,ι) на $\iota(M)$

переноситься з M стр. гладкого многовиду. Якщо ж φ — лише ін'у, то спочатку треба перенести на $\varphi(M)$ топологію: $V \subset \varphi(M)$ відкрита $\iff V = \varphi(U)$, U — відкр. в M, далі все аналогічно (<u>Впр.</u> перевірити, що це топологія, і що для атласа $\mathcal{A}$ з гл. стр. M $\varphi(\mathcal{A})$ задає стр. гл. многовида на цьому топ. просторі). Отже, у цьому випадку також можна вважати $\varphi(M)$ гл. многовидом, дифеоморфним M.

<u>Впр.</u> Якщо $(M, \varphi) \sim (\tilde{M}, \tilde{\varphi})$, де φ (і $\tilde{\varphi}$) — ін'у, то гладкі стр., побудовані на $\varphi(M) = \tilde{\varphi}(\tilde{M})$ за допомогою φ і $\tilde{\varphi}$, співпадають.

Це все мотивує альтернативне означення:

<u>Озн.</u> Нехай $\overline{M}$ — k-гл. многовид ($k \geq 1$). Його підмножина $M \subset \overline{M}$ зветься його k-гл. (занурення) підмноговидом, якщо:

– M має структуру k-гл. многовиду (відносно деякої топології на M).

– Формальне вкладення $i: M \to \overline{M} : p \mapsto p$ – $\underbrace{\text{запуренням}}_{}$ k-гладке

Якщо при цьому i – (топологічне) вкладення, M зветься вкладеним.

Rem. i – вкладення $\Leftrightarrow$ топологія M – індукована з $\overline{M}$.

Ці означення еквівалентні у наступному сенсі:

Pr. Існує природня біекція між непараметризованими і ін'єктивно запуреними k-гладкими підмноговидами у $\overline{M}$ у сенсі def. 1 і k-гладкими підмноговидами у $\overline{M}$ у сенсі def. 2, що здається:

$$[(M,\varphi)] \mapsto \varphi(M),$$

(клас екв-сті (M,φ))

де на $\varphi(M)$ вводиться топологія і гл. структура, що описані вище. При цьому вкладеним підмноговидам відповідають вкладені.

$\Rightarrow$ Отже, ми вже показали, що класу екв. $[(M,\varphi)]$

коректно ставиться у відп. $\varphi(M)$ з k-гл. стр. $\forall$ $\varphi(p) \in \varphi(M)$ оберемо в околі $\varphi(p)$ карту з цієї структури вигляду $(\varphi(U), \phi \circ \varphi^{-1})$, де (U, ϕ) - карта M в околі p. Тоді для карти (V, ψ) в околі $\varphi(p) = i(\varphi(p)) \in \overline{M}$ лок. задання i

$$\psi \circ i \circ (\phi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \psi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$$

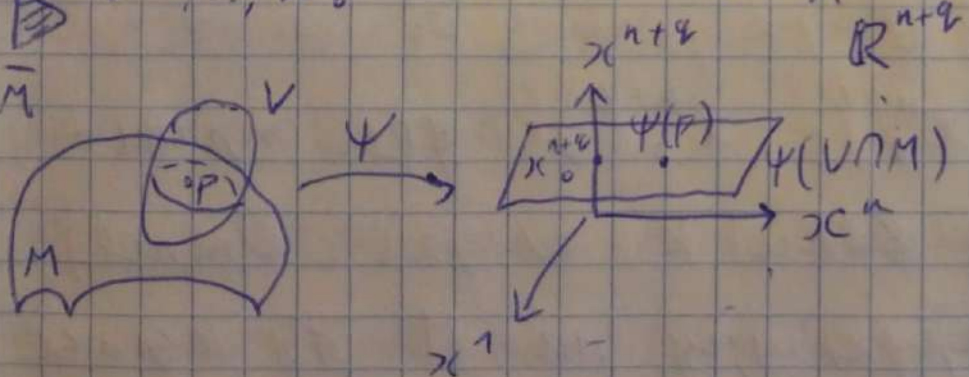
збігається з лок. заданням φ, тому i - k-гладке, і $\mathrm{rank}_{\varphi(p)} i = \mathrm{rank}_p \varphi = \dim M$. Отже, i - занурення. φ - вкладення $\Rightarrow$ перенесена топ. з M співпадає на $\varphi(M)$ з індукованою $\Rightarrow$ i - вкладення.

У навпаки, якщо $M \subset \overline{M}$ - підмноговид у $\overline{M}$ у сенсі <u>def. 2</u> (k-гл.), то $[(M, i)]$ - непараметризований k-гл. підмн. у $\overline{M}$ у сенсі <u>def. 1</u> (вкладений, якщо M вкл.), якому відповідає M під дією нашої біекції. $\triangle$

Rem. У невкладеному випадку $\psi(M)$ з індукованою топ. може взагалі не бути многовидом: див. Ex. 2 ("вісімка") і Ex. 3 (ірраціональна обмотка тора).

Pr. Нехай $\overline{M}$ – $(n+q)$-вимірний k-гл. многовид ($k \geq 1$). $M \subset \overline{M}$ є його n-вимірним k-гл. вкладеним підмноговидом $\iff \forall p \in M$ $\exists$ карта (V, ψ) мног. $\overline{M}$ така, що $p \in V$ і $\psi(V \cap M) =$
$= \{(x^1, \ldots, x^{n+q}) \in \mathbb{R}^{n+q} \mid x^{n+1} = x_0^{n+1}, \ldots, x^{n+q} = x_0^{n+q}\}$ (де $x_0^{n+1}, \ldots, x_0^{n+q} \in \mathbb{R}$ – постійні).

$\Rightarrow$



$\Leftarrow$. Введемо на M індуковану базою топологію. Вона хаусд. і з ЗЗЛ. $\forall p \in M$ розглянемо карту (V, ψ) з умови. Тоді $V \cap M$ – відкритий окіл p в M. Побудуємо $\varphi: V \cap M \to \mathbb{R}^n$:
$\varphi = ((\psi|_{V \cap M})^1, \ldots, (\psi|_{V \cap M})^n)$ (тобто обмежимо ψ на підпростір $\psi(V \cap M)$). Це гомеоморфізм як обмеження

гомео-зма. Тобто $(V \cap M, \varphi)$ - карта M в околі p. Таким чином, M - n-вимірний многовид. Побудуємо атлас, взявши такі карти в околі кожної $p \in M$. Якщо $p \in V \cap \tilde{V}$, де (V, ψ), $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ - карти $\bar{M}$ з умови з лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^{n+q})$ і $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^{n+q})$ відп., то коорд ф-ції відобр. переходу $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ карт M $(V \cap M, \varphi)$, $(\tilde{V} \cap M, \tilde{\varphi})$, що відповідають цим картам $\bar{M}$, мають вигляд для $i = \overline{1, n}$:

$$\tilde{x}^i (x^1, \ldots, x^n) = \tilde{x}^i (x^1, \ldots, x^n, x_0^{n+1}, \ldots, x_0^{n+q})$$

, де справа - коорд. ф-ції $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$. Тому вони k-гладкі. Отже, цей атлас задає k-гл. структуру на M. В картах $(V \cap M, \varphi)$, (V, ψ) лок. задання $i : M \to \bar{M}$ має вигляд $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, x_0^1, \ldots, x_0^{n+q})$, отже i - занурення (має ранг n), і M - вкладений (в силу вибору топології) підмноговид.

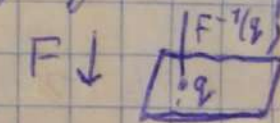
$\Rightarrow$ Застосуємо теорему про ранг: $\forall p \in M$ $\operatorname{rank}_p i = n$ $\Rightarrow \exists$ карти (U, φ) і (V, ψ) мног. M і $\overline{M}$ відп. з $p = i(p) \in U \cap V$ і лок. задання $\psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ i \circ \varphi^{-1}$: $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$, тобто $\psi(V \cap M) = \{x \in \mathbb{R}^{n+q} \mid x^{n+1} = \dots = x^{n+q} = 0\}$ $\blacktriangle$

Rem Формулювання цього Рч. також використовується для означення підмноговиду у сенсі def. 2 (але лише для вкладених).

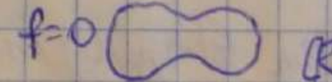
Th. (про прообраз регулярного значення). Нехай M, N - k-гл. многовиди $(k \geq 1)$, $F \in C^k(M, N)$, $q \in F(M)$ - регулярне значення F. Тоді $F^{-1}(q)$ - k-гладкий $(\dim M - \dim N)$-вимірний вкладений підмноговид у M.

Rem. Очевидно, $\dim M - \dim N \geq 0$, бо інакше всі значення F критичні. Якщо F – субмерсія, то $\forall\, q \in F(M)$ – рег. значення.

Ex. 1. Ортог. проектування $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: прообрази – аф. підпростори.



2. Відобр. Хопфа $S^3 \to S^2$: прообрази – великі кола S^3 (шари у шаруванні Хопфа).



3. Якщо $f \in C^k(M)$ і $c \in \mathbb{R}$ – регулярне (тобто $\forall\, p \in f^{-1}(c)$ $d_p f \neq 0$), то $f^{-1}(c)$ – вкладений k-гл. підмноговид вимірності $\dim M - 1$ (гіперповерхня).

Це узагальнення класичної <u>Тh.</u> про неявну функцію.

▷ Отже, q – регулярне, тобто $\forall\, p \in F^{-1}(q)$ – не критична, тобто F – субмерсія в p. <u>Тh.</u> про ранг $\Rightarrow$ $\exists$ карти (U, φ) і (V, ψ) M і N відп. : $p \in U$, $q \in V$

і лок. задання $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}: (x^1,\dots,x^m)\mapsto(x^1,\dots,x^n)$

(це $m=\dim M$, $n=\dim N$). Якщо $\psi(q)=(x_0^1,\dots,x_0^n)$ –

коорд. q, з цього отримуємо, що

$$\varphi(U\cap F^{-1}(q)) = \{x\in\mathbb{R}^m \mid x^1=x_0^1,\dots,x^n=x_0^n\}.$$

Тоді з попереднього Рч. випливає, що $F^{-1}(q)$ – вклад.

к-гл. $(m-n)$-вимірний підмноговид. ▲

__Rem__ Повернемося до __def 1__: якщо (M,φ) – підмн. у $\overline{M}$,

то $\forall p\in M$ $d_p\varphi$ – лінійна ін'є, тобто $d_p\varphi: T_pM\to$

$d_p\varphi(T_pM)\subset T_{\varphi(p)}\overline{M}$ – лін. ізоморфізм. Крім того,

з $T_pM=\{\gamma'(t_0)\mid \gamma\in C^k((a,b),M),\ \gamma(t_0)=p\}$ і __def__ диференціалу: $d_p\varphi(T_pM)=\{\underbrace{(\varphi\circ\gamma)'(t_0)}_{d_p\varphi(\gamma'(t_0))}\mid \gamma\in C^k((a,b),M),\ \gamma(t_0)=p\}$,

$\underset{T_p(M,\varphi)}{\text{як}}$ у частк. випадку $\overline{M}=\mathbb{R}^{n+q}$ (коли ми вважаємо

$d_p\varphi(T_pM)\subset\mathbb{R}^{n+q}\leftrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n+q}$). Інколи – ототожнюють

особливо для $M\subset\overline{M}$

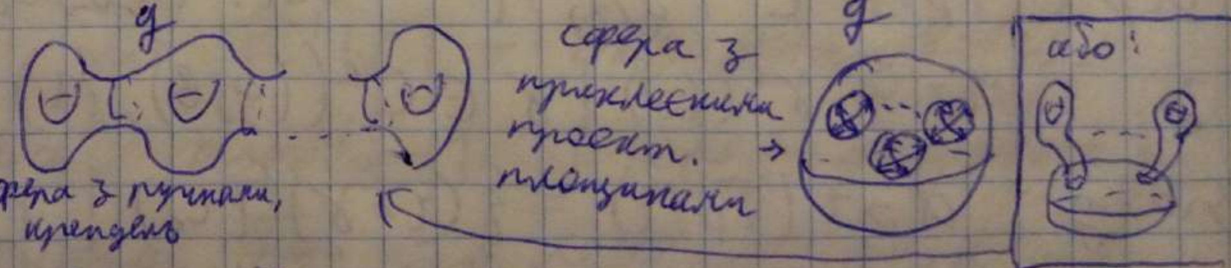
T_pM і $d_p\varphi(T_pM)$ (і p з $\varphi(p)$) і пишуть $T_pM\subset T_p\overline{M}$.

Теореми про занурення і вкладення

Th. (Уітні) Нехай M – n-вимірний k-гладкий многовид, $k \geq 1$. Тоді існують k-гладкі занурення $M \to \mathbb{R}^{2n-1}$ і вкладення $M \to \mathbb{R}^{2n}$.

Rem. Тобто $\forall$ многовид можна вважати підмноговидом $\mathbb{R}^N$.

Ex. При $n=2$ і компактному зв'язному M: M k-дифеоморфний S^2 або $\underbrace{T^2 \# \ldots \# T^2}_{g}$ або $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g}$ (зв'язні суми), g [redacted] наз. родом M.

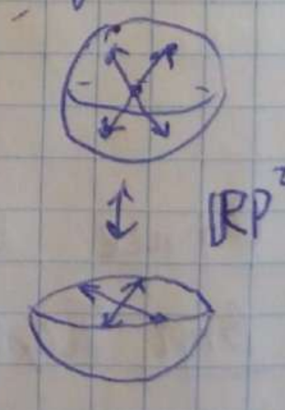


Зазвичай операції зв'язної суми і ця теорема розглядаються у топології у неперервному випадку, але це працює і $\forall$ гладкості k (див. Рохлін-Фукс або Уоллес).

Для S^2 і $T^2\#\ldots\#T^2$ $\exists$ вкладення в $\mathbb{R}^3$ (максимальної гладкості). Занурення і вкладення $\mathbb{R}P^2\#\ldots\#\mathbb{R}P^2$ будуються за допомогою зан. і вкл. $\mathbb{R}P^2$. Вкладення в $\mathbb{R}^3$ не існує, але існують занурення макс. гладкості (для $\mathbb{R}P^2$ – поверхня Боя, для $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ – пляшка Клейна)

Нарешті, побудуємо ∞-гл. вкладення $\mathbb{R}P^2$ у $\mathbb{R}^4$:

$\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2 = \{(u:v:w) \mid u^2+v^2+w^2=1\}$, де



$(u:v:w) = \{(u,v,w), (-u,-v,-w)\}$ – пара діам. протилежних точок S^2. Отже, визначимо $\varphi: \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$:

$$(u:v:w) \mapsto (uv, uw, vw, u^2-v^2),$$

воно коректно визначене ((u,v,w) і $(-u,-v,-w)$ переходять в одну точку) і неперервне як факторизація неперервного $S^2 \to \mathbb{R}^4$.