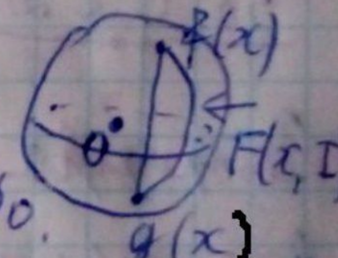
30.13. $f, g \in C(X, S^n)$, $|f(x)-g(x)|<2 \ \forall x \Rightarrow f \sim g$.

$$F(x,s) := \frac{(1-s)f(x) + s g(x)}{|(1-s)f(x) + s g(x)|} : X \times I \to S^n.$$ Коректно визначене, бо $(1-s)f(x) = -s g(x) \Rightarrow [\,|f(x)| = |g(x)| = 1\,] \Rightarrow |1-s| = |-s| \Rightarrow$ $[s \in [0,1]] \Rightarrow 1-s = s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$, тобто $\frac{1}{2} f(x) = -\frac{1}{2} g(x) \Rightarrow$ $|f(x)-g(x)| = 2|f(x)| = 2$. Геометрично $|f(x)-g(x)|<2$ означає, що $f(x)$ і $g(x)$ – не діам. протилежні, а тоді $[f(x), g(x)] \not\ni 0$.



$F \in C(X \times I, S^n)$ (бо f, g непер.), $F(\cdot, 0) = \frac{f}{|f|} = f$, $F(\cdot, 1) = g$ – гомотопія

30.14. $f \in C(S^n, S^n)$, $f(x) \neq x \ \forall x \in S^n$. Тоді $f \sim g : x \mapsto -x$.

f і g задов. умовам 30.13.: $f(x) \neq x = -g(x) \ \forall x$.

30.K. $f, g \in C(X, Y \times Z)$. $f \sim g \Leftrightarrow p_Y \circ f \sim p_Y \circ g$ і $p_Z \circ f \sim p_Z \circ g$.

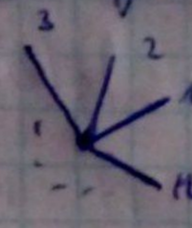
$\Rightarrow$ – з Lem. 2.1. лекції: якщо $F \in C(X \times I, Y \times Z)$ – гомотопія f і g, то $p_Y \circ F$ – гом. $p_Y \circ f$ і $p_Y \circ g$, $p_Z \circ F$ – гом. $p_Z \circ f$ і $p_Z \circ g$.

$\Leftarrow$ нехай $F_Y \in C(X \times I, Y)$, $F_Z \in C(X \times I, Z)$ – гом. $p_Y \circ f$ і $p_Y \circ g$, $p_Z \circ f$ і $p_Z \circ g$ відп. Тоді $F : (x, s) \mapsto (F_Y(x,s), F_Z(x,s))$ – гом. f і g. (див. 39.F)

394 Знайти нескінченну кількість ТП $\{X_\alpha\}$: $X_\alpha \sim X_\beta$ $\forall \alpha, \beta$, але $X_\alpha \not\cong X_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

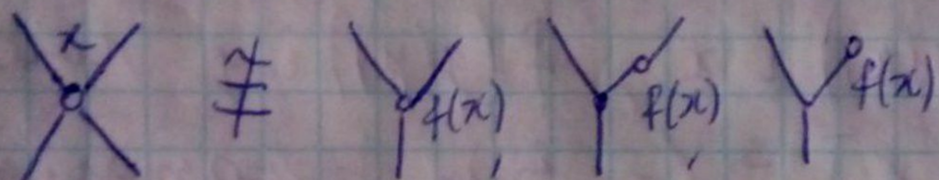
$\{\mathbb{R}^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$: $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^0$ $\forall n$. Але ми поки вміємо доводити лише $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^0$ при $n \geq 2$ (і $\mathbb{R}^1 \not\cong \mathbb{R}^0$). Вірно і $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ $\forall$ $n \neq m$.

Або: X_n – букет n відрізків, з'єднаних у кінці (або гомеоморфна підмножина $\mathbb{R}^2$):



X_n

Вони усі стягні (бо зірчасті), але $X_n \not\simeq X_m$ при $n \neq m$:



n зв. комп. $\leq m$ зв. комп.

(для $n > m$) припустимо, що $\exists$ гомео-зм $f: X_n \to X_m$, тоді $X_n \setminus \{x\} \cong X_m \setminus \{f(x)\}$).

Впр. 2.1. з лекції:

$X \sim Y,\ Z \sim W \Rightarrow X \times Z \sim Y \times W$

Отже, $\exists$ $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$, $h \in C(Z,W)$, $k \in C(W,Z)$: $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, $h \circ k \sim id_W$, $k \circ h \sim id_Z$. Тоді $(f,h): X \times Z \to Y \times W : (x,z) \mapsto (f(x), h(z))$ і ан-но $(g,k): Y \times W \to X \times Z$ непер., і $(g,k) \circ (f,h) = (g \circ f, k \circ h) \sim$ [ан-но 3.F.] $\sim (id_X \times id_Z) = id_{X \times Z}$, $(f,h) \circ (g,k) \sim id_{Y \times W}$

38.E. (Впр. 2.2 лекції)

$A \subset X$ – ретракт ТП $X \Leftrightarrow \forall$ $f \in C(A, Y)$ (Y – ТП)

$\exists\ \bar{f} \in C(X, Y)$: $\bar{f}|_A = f$.

За def.: A – ретракт $X \Leftrightarrow \exists\ g \in C(X, A)$: $g|_A = id_A$

(тобто $\forall\ x \in A$ $g(x) = x$) – ретракція.

$\Rightarrow$. Нехай A – ретракт, $g: X \to A$ – відп. ретракція, $f \in C(X, Y)$. Тоді $\overline{f} := f \circ g \in C(X, Y)$ як комп. непер., $\forall x \in A$ $\overline{f}(x) = f(g(x)) = f(x)$.

$\Leftarrow$. Застосуємо умову до тотожного $id_A: A \to A: x \mapsto x$. Тоді його продовження $g = \overline{id_A} \in C(X, A)$ – ретракція, бо $g|_A = id_A$ за умовою.

38.С:Д. $\{x, y\}$ $x \neq y$ – не ретракт $\mathbb{R}$; S^0 – не ретракт D^1.
(з дискр. топ.)

Ретракція $f: X \to A$ – сюр (бо $\forall x \in A$ $x = f(x) \in f(X)$) і неперервна, тому X – зв'язний $\Rightarrow$ A – зв'язний.

38.3. $[a, b]$ – ретракт $\mathbb{R}$.

$f: \mathbb{R} \to [a, b]: f(x) = \begin{cases} a, & x \le a \\ x, & x \in [a, b], \\ b, & x \ge b \end{cases}$ – ретракція. Дійсно, $f|_{[a,b]} = id$; відкриті в $[a, b]$ – це об'єднання проміжків $[a, c)$, $(c, d) \subset$ (вигляду) $\subset (a, b)$, $(d, b]$; $f^{-1}([a, c)) = (-\infty, c)$, $f^{-1}((c, d)) = (c, d)$, $f^{-1}((d, b]) = (d, +\infty)$ – відкр., отже, f – непер.

38.4. (a, b) – не ретракт $\mathbb{R}$. Нехай $\exists$ ретракція $f: \mathbb{R} \to (a, b)$. Тоді $\forall n \ge n_0$ [щоб $a + \frac{1}{n} \in (a, b)$] $f(a + \frac{1}{n}) = a + \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ [неперервність f] $\Rightarrow$ $f(a) = a \notin (a, b)$ ↯. Або випливає з 38.6 (у/з).

39.F. A - деформаційний ретракт X, B - деформаційний ретракт Y $\Rightarrow$ $A \times B$ - деф. ретракт $X \times Y$.

Якщо $f: X \to A$, $g: Y \to B$ - відп. ретракції, то $(f,g): X \times Y \to A \times B$ - неперервне ($\forall$ ел-та $U \times V \subset A \times B$ бази топ. $A \times B$ $(f,g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ - відкр. в $X \times Y$),

$\forall (x,y) \in A \times B$ $(f,g)(x,y) = (f(x), g(y)) = (x,y) \Rightarrow (f,g)$ - ретракція

За умовою, $f \sim id_X$, $g \sim id_Y \Rightarrow (f,g) \sim (id_X, id_Y) = id_{X \times Y}$

ретр. деформаційний

(Якщо $F \in C(X \times I, X)$, $G \in C(Y \times I, Y)$ - відп. гомотопії, то $H: (x,y,s) \mapsto$

$\mapsto (F(x,s), G(y,s)) \in C(X \times Y \times I, X \times Y)$ непер., бо $H^{-1}(U \times V) =$

$= \{(x,y,s) \mid (x,s) \in F^{-1}(U), (y,s) \in G^{-1}(V)\} = \Phi(F^{-1}(U) \times Y) \cap (X \times G^{-1}(V))$

$\forall$ відкр. $U \subset X$, $V \subset Y$, де $\Phi: X \times I \times Y \to X \times Y \times I: (x,s,y) \mapsto (x,y,s)$ -

гомеоморфізм. Тому $H^{-1}(U \times V)$ відкр. в $X \times Y \times I$.

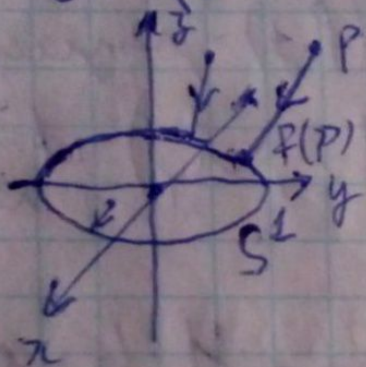
При цьому $H(x,y,0) = (F(x,0), G(x,0)) = (f(x), g(x)) = (f,g)(x)$

$H(x,y,1) = (F(x,1), G(x,1)) = (x,y)$.)

39.13(1) $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \sim S^1$.

Оскільки аф. перетворення – гомеоморфізми, можемо вважати без обмеження загальності, що $\mathbb{R}^1$ – це Oz:

$\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.



Побудуємо деф. ретракцію на коло $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z=0\} \cong S^1$:

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$$ – кор. визн., непер.,

$\forall (x,y,z) \in S^1 \quad f(x,y,z) = (x,y,z)$ => ретракція.

$F : (P, s) \mapsto (1-s)f(P) + sP : \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \times I \to \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$

кор. визначене (бо $x \neq 0 \Rightarrow (1-s)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + sx \neq 0 \ \forall s \in I$ і ан-но для y), непер., $F(\cdot,0) = f$, $F(\cdot,1) = id_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1}$. Отже, f – деф. ретракція => $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \sim S^1$.