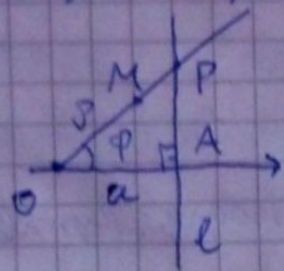


312. O , пряма ℓ : $d(O, \ell) = a$. Кавколо O ођертается
 кружок m , $m \cap \ell = \{P\}$. Вђдмлено M на m : $OP \cdot OM = b^2$.
 Знайти ГМТ M .

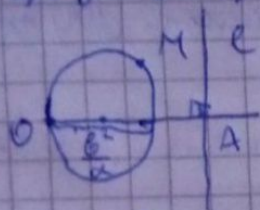
Введено полярну с.к. з початком O i вiссю $\perp \ell$.



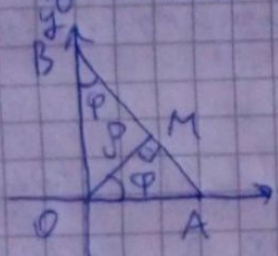
Позн за задачею 309, ℓ має полярне
 рiвн. $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$, тобто $OP = \frac{a}{\cos \varphi}$.

$$OM = \frac{b^2}{OP} = \frac{b^2}{a} \cos \varphi, \text{ тобто } \rho = \frac{b^2}{a} \cos \varphi - \text{рiвн. ГМТ.}$$

Згiдно з задачею 310, це коло радиуса $\frac{b^2}{a}$, що проходить
 через O , з центром на перпендикулярi OA до ℓ
 (образ ℓ при iнверсiї з центром в O вiдн. кола $\rho = b$).



324. Для двiх трикутiв OAB , де $A \in Ox$, $B \in Oy$,
 що лежать у I та III квадрантах, з $S \Delta OAB = 3$ виводяться
 точки OM . Знайти ГМТ M .



Введено полярну с.к. з полюсом O
 та вiссю Ox .

$$\text{З прямокутного } \Delta OAM: OA = \frac{OM}{\cos \varphi} = \frac{\rho}{\cos \varphi}.$$

$$\text{З прямокутного } \Delta OBM: OB = \frac{\rho}{\sin \varphi}.$$

$$\text{Площа: } 3 = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{\rho^2}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\rho^2}{\sin 2\varphi}.$$

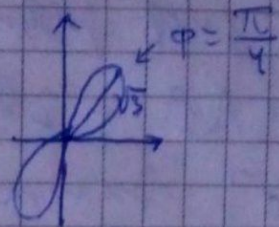
Отже, рiвняння ГМТ з полярними коорд.:

$$\rho^2 = 3 \sin 2\varphi.$$

у I та III квад. $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow 2\varphi \in [0, \pi] \cup$
 $\cup [2\pi, 3\pi] \Rightarrow \sin 2\varphi \neq 0$:

$$\rho = \sqrt{3} \sin 2\varphi.$$

Це ще одна лемніската:



Перейдемо до декартових:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

$$\rho^2 = 3 \sin 2\varphi = 2\sqrt{3} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\rho^4 = 2\sqrt{3} \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\sqrt{3} xy.$$

Або можна поцятати з декартових. Нехай $M(x_0, y_0)$

Пряма AB прос. через $M \perp OM = (x_0, y_0)$:

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

$$x_0 x + y_0 y - x_0^2 - y_0^2 = 0.$$

Перетин з Ox : $x_0 x - x_0^2 - y_0^2 = 0$, маємо $A\left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0}, 0\right)$.

З Oy : $y_0 y - x_0^2 - y_0^2 = 0$, $B\left(0, \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0}\right)$ (це при $M \neq O$).

Площа (у I та III квад. x_0, y_0 одного знака):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0} \cdot \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = S$$

$$(x_0^2 + y_0^2)^2 = 2\sqrt{3} x_0 y_0. \quad (M=O \text{ теж підходить})$$

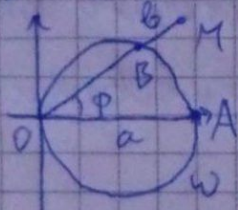
330. O і A - діам. протилежні точки кола ω , $OA = a$.

Прямий ℓ обертається навколо O , $\ell \cap \omega = \{B\}$, на

якому відкладається $BM = b$. Знайти рівн. ГМТ M

у полярних з полюсом O і віссю OA і у відп.

декартових коорд.

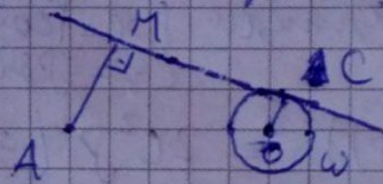


Згідно з 310, рівн. кола - це

$$\rho = a \cos \varphi, \text{ тому } OB = a \cos \varphi \Rightarrow$$

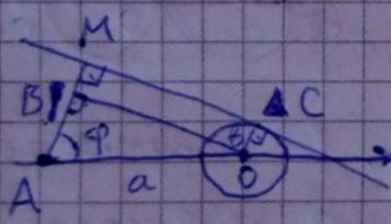
$$\Rightarrow OM = OB + BM = a \cos \varphi + b.$$

Крива $\rho = a \cos \varphi + b$ - крива Паскаля. Перейдіть до декартових - див. у 331 главі.



де 0-группы W.

Введемо порівняння с.к. з нахилом у A і висю AO ,
Нехай $AO = a$, радіус w - b

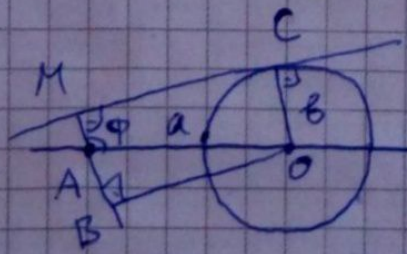
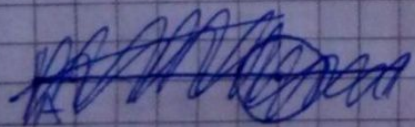


Углы $\angle C$ - тупой, остер,
 OB - перпендикуляр до AM

Прогі $AM \perp MC$, $OC \perp MC \Rightarrow AM \parallel OC$. $BMCO$ - паралелограм $\Rightarrow BM = OC = 6$. Отже,

$$p = AM = AB + BM = AO \cdot \cos \angle OAM + BM = a \cos \varphi + b$$

Se nun $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A $\Delta\sigma$:



$$y = AM = BM - AB = BM - AO \cdot \cos \angle OAB = b - a \cos(\pi - \varphi) = b + a \cos \varphi. \quad \text{Зависит только}$$

Давид Терскага

9. декартовіс $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$:

$$\rho = a \cos \varphi + b$$

$$\rho^2 - a \rho \cos \varphi = b \rho$$

$$x^2 + y^2 - a x = b \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 - a x)^2 = b^2 (x^2 + y^2)$$

Generalized Case

Дати вислов С. декартова.

405. За який умов рівняння

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

визначає коло? Знайти його центр і радіус.

Приймемо за все, $A \neq 0$ (інакше це пряма, $\emptyset$ або уся площина).

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Виділяємо повні квадрати:

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A^2} + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 - \frac{E^2}{A^2} + \frac{F}{A} = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$$

Коло при $D^2 + E^2 - AF > 0$ (точка при $= 0$, $\emptyset$ при < 0).

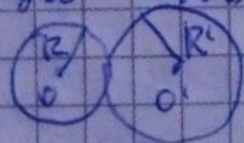
Центр $\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$, радіус $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{|A|}$.

409. Знайти рівняння кола, що проходить через

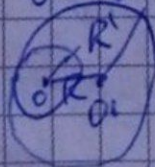
$A(1,1)$, $B(0,2)$ і дотикається до кола ω : $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$.

Рухай же $(x-\underset{a}{\bullet})^2 + (y-\underset{b}{\bullet})^2 = R^2$ з центром $O(\underset{a}{\bullet}, \underset{b}{\bullet})$ радіуса R .

Умова дотикання:
зв'язаний



внутримай



$$OO' = R + R'$$

$$OO' = |R - R'|$$

У нас $O'(5,5)$, $R' = 4$. Умова зв'язаного дотикання:

$$(a-5)^2 + (b-5)^2 = (R+4)^2$$

Але ж константи $R < 0$, вона не існує і умова внутримайного (для кола радіуса $-R$). Разом з умовами перпендикулярності A і B отримуюємо систему:

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 = R^2 \\ (a-0)^2 + (b-2)^2 = R^2 \\ (a-5)^2 + (b-5)^2 = (R+4)^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} (1) & a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = R^2 \\ (2) & a^2 + b^2 - 4b + 4 = R^2 \\ (3) & a^2 + b^2 - 10a - 10b + 50 = R^2 + 8R + 16 \end{aligned}$$

$$\text{З (1) і (2),} \quad -2a + 2b - 2 = 0 \quad : \quad b = a + 1.$$

$$\text{Підставимо в (3):} \quad R^2 = a^2 + (a+1)^2 - 4(a+1) + 4 = 2a^2 - 2a + 1.$$

$$3 \quad (2) : (3): \quad 10a + 6b - 46 = -8R - 16$$

$$-4R = 5a + 3b - 15 = 5a + 3a + 3 - 15 = 8a - 12$$

$$R = 3 - 2a.$$

~~Решение~~ Тл. 4. $(3-2a)^2 = 2a^2 - 2a + 1$
 $9 - 12a + 4a^2$

$$2a^2 - 10a + 8 = 0$$

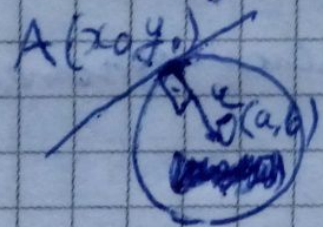
$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$a=1 \Rightarrow b=2, R=1: \text{коло } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1, \text{ зовн. готик.}$$

$$a=4 \Rightarrow b=5, R=-5: \text{коло } (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25, \text{ внутр. готик.}$$

413. Знайти рівняння дотичної до кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ у т. $A(x_0, y_0)$ на колі.



$O(a, b)$ — центр, r — радіус;

Проходить через A і $\perp \overline{AO}$, що сполучає A з центром.

$$(a-x_0)(x-x_0) + (b-y_0)(y-y_0) = 0$$

Зауважимо, що для $\Phi(x, y) := (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$ $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x-a)$,
 $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(y-b)$, тому рівн. дотичної: $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) = 0$

423. Знайти рівняння кола, що проходить через $A(1, -2)$ і точки B, C перетину $l: x - 7y + 10 = 0$ і $\omega: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Це можна зробити, не знаходячи B і C ! Запишемо рівняння пучка ω і l :

$$(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20) + \lambda(x - 7y + 10) = 0$$

Кожну рівнянню задовольняють координати B і C (бо обидва доданки мають нулі), звідси, це не $\emptyset$ і не 1 точка. Тоді це рівняння кола (див. 705.).

Можна показати, що і навпаки: рівняння $\forall$ кола,

що проходить через B, C, але такий буває
 Кожну кону повинна належати A:

$$1^2 + (-2)^2 - 2 \cdot 1 + 4(-2) - 20 + \lambda(1 - 4(-2) + 10) = 0$$

$$-25 + 25\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

Отже, рівн:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 + x - 4y + 10 = 0$$

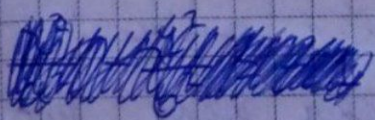
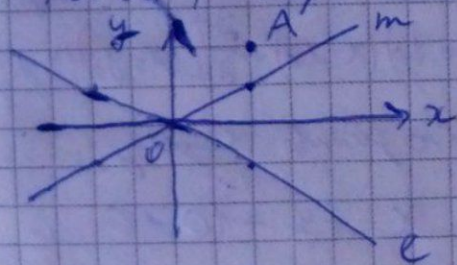
$$x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$$

Це єдина фігурація, що через A, B, C проходить лише
 одна коло (звичайно, неочовно це показати, що $B \neq C$,
 $A \neq B$, $A \neq C$: наприклад, можна перевірити, що центр
 ω належить лінії l на фігурі, менші за радіус, і
 що $A \notin l$).

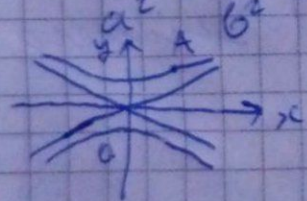
431. Гіпербола проходить через $A(1, 2)$, а її асимптотами
 є прями $y = \pm \frac{1}{2}x$. Знайти її рівняння.

Центр гіперболи - точка перетину асимптот, тобто $(0, 0)$.
 А її гіперболи - бісектриси кутів між ас., тобто Ox і Oy .

П.ч., гіпербола канонічна (ну навіть):



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (-1, \text{бо } A - \text{внутрі асимптот}).$$



Рівняння асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Тобто $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $a = 2b$.

A належить гіперболі:

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = -1$$

$$\frac{1}{4b^2} - \frac{4}{b^2} = -1$$

$$\frac{-15}{4b^2} = -1$$

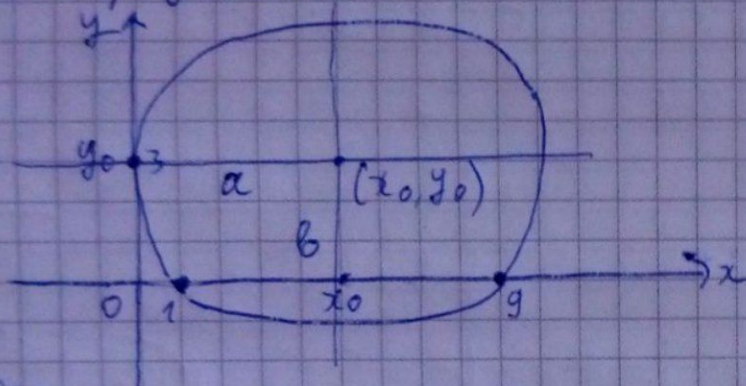
$$b^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow a^2 = 15$$

Отже, рівн:

$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{\frac{15}{4}} = -1$$

$$x^2 - 4y^2 = -15$$

435. ~~В~~і еліпса паралельні осей координат, він перетинає Ox у $(1,0)$, $(9,0)$ і дотикається до Oy у $(0,3)$. Знайти його рівняння.



Рівняння такого еліпса має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

де (x_0, y_0) - координати центра. ^{а б - піввісь} з розташування, $x_0 = \frac{1+9}{2} = 5$, $y_0 = 3$. Також видно, що $a = x_0 = 5$. Або просто підставимо $(0,3)$:

$$\frac{(0-5)^2}{a^2} + \frac{(3-3)^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \quad (a, b > 0)$$

Підставимо $(1,0)$:

$$\frac{(1-5)^2}{25} + \frac{(0-3)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$b^2 = 25$$

Отже, рівн:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

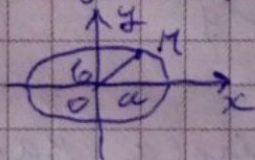
$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Це коло!

732. $M \in$ еліпсу з центром O і напіввісьми a, b . Знайти OM .

Рівняння еліпса канонічне:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



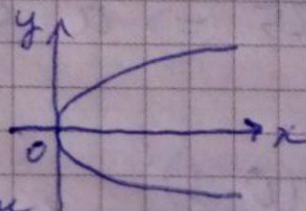
Параметричне завдання: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$

$$OM = \sqrt{\underbrace{a^2 \cos^2 t}_{b^2} + \underbrace{b^2 \sin^2 t}_{a^2}} \leq \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = a. \text{ Але ж, } OM \geq b.$$

737. Знайти рівн. парабол з вершиною (a, b) , параметром p такої, що її вісь:

1) збіг. з додатним напрямком Ox :

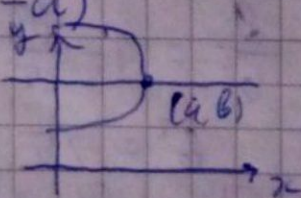
Канонічне пар.: $y^2 = 2px$



Потім треба просто перенести

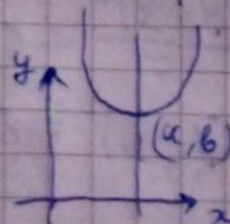
вершину в (a, b) : $(y-b)^2 = 2p(x-a)$

2) збіг. з від'ємним напр. Ox :



Треба ще обернути за x :

$$(y-b)^2 = -2p(x-a)$$



3) -//- з поз. напр. Oy :

Поміняємо $x-a$ і $y-b$ місцями: $(x-a)^2 = 2p(y-b)$

$$(x-a)^2 = -2p(y-b).$$

Знайти рівні.

$$2(1-0)(0-1) = -a^2 \Rightarrow a^2 = 2$$

742 Две лінії II нпр. Ох - відсередині, Оу - гомогена у вершині,
вона проріс. через $(2,3)$ і $(6,-3)$

O_x - фикс. сум. $\Rightarrow (2, -3) \in (6, 3)$ максим.
набл. сум.

Defn. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(2-a)^2}{a^2} + \frac{(3-0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(6-a)^2}{a^2} + \frac{(-3-0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(2-a)^2}{a^2} = 1 - \frac{9}{a^2} = \frac{(6-a)^2}{a^2}$$

$$(2-a)^2 = (6-a)^2$$

$$4 - 4a + a^2 = 36 - 12a + a^2$$

$$8a = 32$$

$$a = 4$$

(me, uso $a = \frac{2+6}{2} = 4$, bisogna i 3 ruscynna).

$$\frac{9}{6^2} = 1 - \frac{(2-a)^2}{a^2} = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

$$6^2 = 12 : \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{4^2}{12} = 1$$