Відображення максимального рангу

<u>def.</u> Рангом $F \in C^k(M, N)$ (де M, N – k-гладкі многовиди, $k \geq 1$) в $p \in M$ зветься ранг його диференціала:

$$\operatorname{rank}_p F := \operatorname{rank} d_p F$$

<u>Th</u> (про ранг)

Нехай $F \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, де $U \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита і для $p \in U$ $\operatorname{rank}_p F = l$ $(\leq \min(m,n))$. Тоді $\exists$ відкриті $V \ni p$ $(V \subset U)$ і $W \ni F(p)$ і k-дифеоморфізми $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ (на відкриті підмножини) такі, що

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^l, 0, \ldots, 0).$$

$(\varphi(V) \to \psi(W))$

<u>Rem.</u> Зокрема, при $m = n = l$ відображення $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$: $(x^1, \ldots, x^n) \to (x^1, \ldots, x^n)$ – тотожне, тобто $F = \psi^{-1} \circ \varphi : V \to W$ -

дифеоморфізм (теорема про обернене відображення).

▷ Див. курс аналіза. ◁

<u>def.</u> Якщо для $F \in C^k(M,N)$ $\operatorname{rank}_p F = \dim M = \dim N$, то F зветься локальним дифеоморфізмом у p.

<u>Rem.</u> Нехай (U,φ), (V,ψ) – карти в околах p, $F(p)$ відповідно, тоді лок. задання F $\psi\circ F\circ\varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U\cap F^{-1}(V)), \mathbb{R}^n)$ і, оскільки φ і ψ – дифеоморфізми, в силу ланцюгового правила $\operatorname{rank}_{\varphi(p)} \psi\circ F\circ\varphi^{-1} = \operatorname{rank}_p F$.

Якщо F – лок. дифео-зм у p, це дорівнює n $(=\dim M = \dim N)$. Застосуємо теорему про обернене відображення: $\exists$ відп. околи $W \ni \varphi(p)$ і $\hat{W} \ni \psi(F(p))$: $\psi\circ F\circ\varphi^{-1} : W \to \hat{W}$ – дифеоморфізм. Отже, $F : \varphi^{-1}(W) \to \psi^{-1}(\hat{W})$ – дифео-зм, де $p \in \varphi^{-1}(W) \subset U$, $F(p) \in \psi^{-1}(\hat{W}) \subset V$. Перепозначимо:

відкриті

Сл. 1. Якщо F - лок. дифеоморфізм у p, то $\exists$ відкриті $U \ni p$, $V \ni F(p)$: $F: U \to V$ - дифеоморфізм.

Rem. Звичайно, для $\forall$ дифеоморфізма F $\forall$ точки p з його області визначення м-ця Якобі лок. задання F в околі p (що теж буде дифео-змом) має максимальний ранг, тому F - лок. дифео-зм у p. Зокрема, тому у Сл. 1 вірна і обернена імплікація. При цьому з того, що F k-гладке і лок. дифеоморфізм $\forall p \in M$ не випливає, взагалі кажучи, що F - дифеоморфізм

Ex. $\gamma: \mathbb{R} \to S^1$, $\gamma(t) = e^{it}$ (це ми ототожнюємо S^1 з множиною чисел модуля 1 в $\mathbb{C}$). Якщо параметризувати S^1 кутом, то локально $\gamma(t) = t$ (або $t + t_0$), тому $\gamma' \neq 0$ і γ - лок. дифеоморфізм $\forall t$. Але це не гомеоморфізм (і взагалі не бієкція) $\Rightarrow$ не дифеоморфізм.

(і між ними $\nexists$ дифео-зму, бо вони негомеоморфні).

<u>Рч</u>. Нехай $F \in C^k(M, N)$ - біу і $\forall p \in M$ F - лок. дифео-зм у p. Тоді F - дифеоморфізм.

▷ $\forall q = F(p) \in N$ F - лок. дифео-зм у p. Згідно <u>Сеч. 1</u>, тоді $F: U \to V$ - дифео-зм для відкр. $U \ni p$, $V \ni F(p)$, зокрема, $F^{-1}: V \to U$ - неперервне і k-гладке. Тоді і $F^{-1}: N \to M$ - неперервне і k-гладке (це локальні властивості). △

<u>Rem.</u> Можна використати саму теорему про ранг, а не її наслідок: F - лок. дифео-зм у p $\Rightarrow$ для карт (U, φ) і (V, ψ) у околах p і $F(p)$ відповідно $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ має максимальний ранг n у $\varphi(p)$ $\Rightarrow$ $\exists$ відкриті $W \ni \varphi(p)$ і $\hat{W} \ni \psi(F(p))$ і k-дифеоморфізми $\chi: W \to \chi(W)$ і $\hat{\chi}: \hat{W} \to \hat{\chi}(\hat{W})$ на відкр. підмножини $\mathbb{R}^n$ такі, що $\hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}$ має вигляд $(x^1, \dots, x^n) \mapsto$

$(x^1, .., x^n)$. З відкритості випливає, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що (евклідова) відкрита куля $B_\varepsilon(x) \subset \chi(W) = \hat{\chi}(\hat{W})$, де $x = \chi(\varphi(p)) = \hat{\chi}(\psi(F(p)))$. Розглянувши які-небудь стандартний C^∞-дифеоморфізм $\Omega : B_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}^n$, отримаємо карти $(\varphi^{-1}(\chi^{-1}(B_\varepsilon(x))), \Omega \circ \chi \circ \varphi)$ і $(\psi^{-1}(\hat{\chi}^{-1}(B_\varepsilon(x))), \Omega \circ \hat{\chi} \circ \psi)$ в околах p і $F(p)$ відповідно, в яких локальне задання F: $\Omega \circ \hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1} \circ \Omega^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$. Отже:

<u>Cor. 2.</u> Якщо F - лок. дифео-зм в p (зокрема, дифеоморфізм), то в околах точок p і $F(p)$ існують карти, в яких F задається тотожним відображенням (рівністю координат).

<u>def.</u> $F \in C^k(M, N)$ зветься субмерсією в $p \in M$, якщо $\mathrm{rank}_p F = \dim N$; F зветься субмерсією, якщо це субмерсія в $\forall p \in M$.

<u>Rem.</u> F - субмерсія в p $\Leftrightarrow$ rank $d_pF = \dim N = \dim T_{F(p)} N$

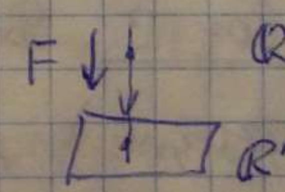
$\Leftrightarrow$ d_pF - сюр $\Rightarrow$ $\dim M \geq \dim N$

<u>Rem.</u> Ан-но до випадку лок. дифеоморфізма з <u>Тх.</u> про ранг випливає (<u>Впр.</u> або як Rem. нижче):

<u>Cor.</u> Якщо F - субмерсія у p, то $\exists$ карти (U,φ) і (V,ψ) : $p \in U$, $F(p) \in V$ і локальне задання

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^n).$$

$(m = \dim M,\ n = \dim N \leq m)$. <u>Rem.</u> Вірне і обернене.



<u>Ex. 1.</u> Лок. дифео-зм.

<u>2.</u> Ортогональне проектування $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m \geq n$: для нього $(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$ глобально.

<u>3.</u> Відображення Хопфа.

Аналогічно до $\mathbb{R}P^n$, n-вимірний комплексний проективний простір:

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \big/ \mathbb{C}\setminus\{0\} = \{(\xi^1 : \dots : \xi^{n+1})\}$$

$$\begin{array}{c} \{(\xi^1 : \dots : \xi^{n+1})\} \\ \parallel \\ [(\xi^1, \dots, \xi^{n+1})] \\ \parallel \\ \{(\lambda\xi^1, \dots, \lambda\xi^{n+1}) \mid \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\} \end{array}$$

Або $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$, де $S^{2n+1} = \{(\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 = 1\}$ і $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. При цьому S^{2n+1} розбивається на великі кола, що не перетинаються. Канонічна проекція $F: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n : (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \mapsto (\xi^1 : \dots : \xi^{n+1})$ і зветься відображення Хопфа. Це ∞-гладке відобр. і субмерсія.

Зокрема, при $n=1$ отримуємо класичне відобр. Хопфа:

$$\mathbb{C}P^1 = \{(\xi^1 : \xi^2)\} = \begin{array}{c} \{(\xi^1 : \xi^2) \mid \xi^2 \neq 0\} \\ \updownarrow \; (\xi^1 : \xi^2) \mapsto \frac{\xi^1}{\xi^2} \\ \mathbb{C} \\ \updownarrow \\ \mathbb{R}^2 \end{array} \sqcup \begin{array}{c} \{(1 : 0)\} \\ \parallel \\ \infty \\ \\ \\ \end{array}$$

За допомогою стереографічної проекції будуємо дифеоморфізм $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ (сфера Рімана).

Отже $F: S^3 \to S^2$. Знайдемо його локальне задання!

$S^3 \subset \mathbb{C}^2$: $\{\xi \mid |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 = 1\}$. Нехай

$|\xi^1| = \cos\alpha \Rightarrow \xi^1 = \cos\alpha\, e^{i\beta}$

$|\xi^2| = \sin\alpha \Rightarrow \xi^2 = \sin\alpha\, e^{i\gamma}$

Тобто (α, β, γ) – лок. коорд. S^3 (Впр. на якій підмножині?)

і під дією лок. задання F

$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \frac{\xi_1}{\xi_2} = \operatorname{ctg}\alpha\, e^{i(\beta-\gamma)} \Leftrightarrow (\operatorname{ctg}\alpha \cos(\beta-\gamma), \operatorname{ctg}\alpha \sin(\beta-\gamma))$.

Впр. Перевірити, що це субмерсія, тобто що матриця Якобі має ранг 2. Для яких (α, β, γ) це працює? Як щодо інших точок!

def. $p \in M$ зветься критичною точкою $F \in C^k(M, N)$, якщо $\operatorname{rank}_p F < \dim N$ (тобто F – не субмерсія в p). У цьому випадку точка $F(p)$ зветься критичним значенням F; інші точки $F(M) \subset N$ звуться регулярними значеннями F.

Ex. Для $f \in C^k(M) = C^k(M, \mathbb{R})$ $\dim \mathbb{R} = 1$, тобто

p критична $\iff d_p f = 0$. У лок. координатах $(x^1, \dots, x^n)$ в околі p це означає $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$.

Сл. Якщо p — точка локального мінімуму або максимуму f (зокрема, глобального), то p — критична точка f.

Rem. Лок. min: $\exists$ відкр. $U \ni p$: $\forall q \in U \quad f(q) \geq f(p)$

Глоб. min: $\forall q \in M \quad f(q) \geq f(p)$

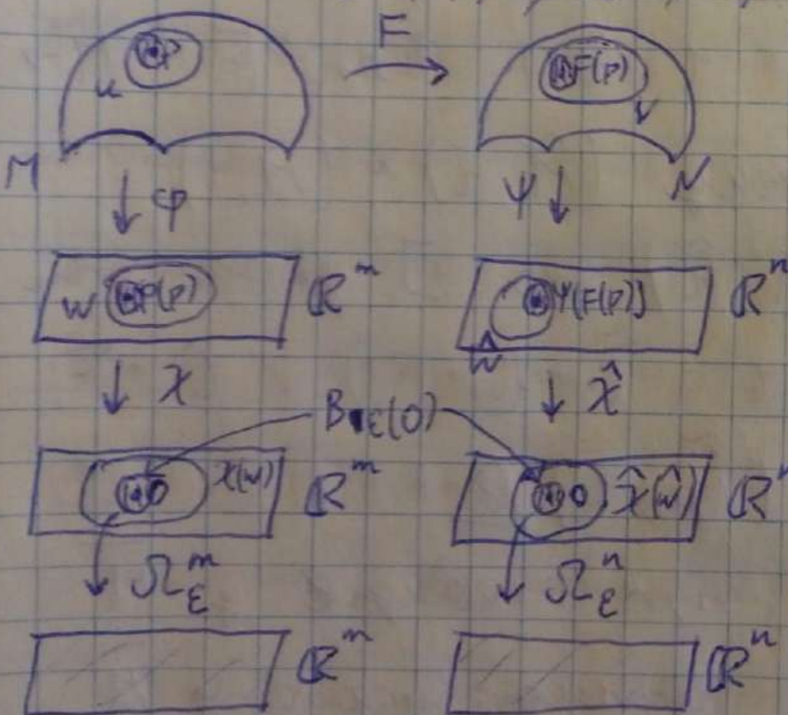
Ан-но max.

▷ Очевидно, якщо p — точка лок. $\underbrace{\text{екстремуму}}_{\text{(мінімуму або максимуму)}}$ f, то $\forall$ карти (U, φ) в околі p $\varphi(p)$ — точка лок. екстремуму її лок. задання $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тому, згідно з відомим фактом з аналіза, для відп. лок. координат $(x^1, \dots, x^n)$ $\forall i = \overline{1,n}$ $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = 0$. ◁

Rem. Як побачимо далі, дослідження критичних точок ф-ції за допомогою 2-х похідних (гессіану) також є і на многовидах.

Rem. Переформулюємо теорему про ранг для многовидів у загальному вигляді (з цього випливають, зокрема, випадки лок. диф-зму, субмерсії, а також занурення нижче).

Нехай M, N – k-гл. многовиди, $k \geq 1$, $\dim M = m$, $\dim N = n$, $F \in C^k(M, N)$ і $\operatorname{rank} d_pF = \operatorname{rank}_p F = l$ $(\leq m, n)$. Оберемо карти (U, φ), (V, ψ) : $p \in U$, $F(p) \in V$. Лок. задання F



$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underset{\substack{\cap\ \text{відкр.} \\ \mathbb{R}^m}}{\varphi(U \cap F^{-1}(V))} \to \mathbb{R}^n$ – k-гладке і має ранг l в $\varphi(p)$ (бо згідно з ланцюговим правилом $d_{\varphi(p)}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = d_{F(p)}\psi \circ d_pF \circ d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}$, а ψ і φ^{-1} – k-дифеоморфізми, тому мають max ранг – n і m відповідно). Отже, згідно з Th. про ранг:

$\exists$ відкр. $\underbrace{W \ni \varphi(p)}^{\{W \subset \varphi(U \cap F^{-1}(V))\}}$, $\hat{W} \ni \psi(F(p))$ і k-дифеоморфізми $\chi : W \to \chi(W)$, $\hat{\chi} : \hat{W} \to \hat{\chi}(\hat{W})$ на відкриті підмножини $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ відповідно такі, що відображення

$$\hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1} : \chi(W) \to \hat{\chi}(\hat{W})$$

має вигляд $(x^1, .., x^m) \mapsto (x^1, .., x^\ell, 0, .., 0)$. Можемо, не зменшуючи загальність, вважати, що $\chi(\varphi(p)) = 0$ і $\hat{\chi}(\psi(F(p))) = 0$ (просто доповнимо χ і $\hat{\chi}$ зсувами за необхідності).

Відкр. $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B^m_\varepsilon(0) \subset \chi(W)$, $B^n_\varepsilon(0) \subset \hat{\chi}(\hat{W})$ (відкриті евкл. кулі відповідної вимірності). Очевидно, $\hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1}(B^m_\varepsilon(0)) \subset B^n_\varepsilon(0)$. Нарешті, побудуємо стандартний ∞-дифео-зм з відкр. кулі $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$:

$$\Omega^m_\varepsilon : B^m_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^m : x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{|x|}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{x}{|x|}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Тоді $(\varphi^{-1}(\chi^{-1}(B^m_\varepsilon(0))), \Omega^m_\varepsilon \circ \chi \circ \varphi)$ і $(\psi^{-1}(\hat{\chi}^{-1}(B^n_\varepsilon(0))), \Omega^n_\varepsilon \circ \hat{\chi} \circ \psi)$ - карти M і N в околах p і $F(p)$ відп., і лок. задання F:

$$\Omega^n_\varepsilon \circ \hat{\chi} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \chi^{-1} \circ (\Omega^m_\varepsilon)^{-1} : (x^1, .., x^m) \mapsto (x^1, .., x^\ell, 0, .., 0).$$

(Впр. перевірити акуратно)