

Питання 1.

1.1. Припустимо, що регулярна крива параметризована натуральним параметром t . Якщо уявляти параметрично задану криву як траєкторію точки, що рухається, чому дорівнює абсолютне значення швидкості, з якою рухається точка?

1.2. Якщо взяти на регулярній кривій γ довільну точку P , скільки існує різних дотичних прямих кривої γ в точці P ?

1.3. Якщо взяти на регулярній кривій γ довільну точку P , скільки існує різних щільнодотичних площин кривої γ в точці P ?

1.4. Якщо на регулярній кривій взяти довільну точку P і побудувати дотичну пряму в цій точці, чому дорівнює кут між кривою і її дотичною прямою в точці P ?

2. Кут між кривими

Задача 2.1. Розглянемо наступні параметрично задані криві:

$$\gamma_1: \begin{cases} x^1 = a \cos t \\ x^2 = b \sin t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad \gamma_2: \begin{cases} x^1 = A \cosh t \\ x^2 = B \sinh t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

За яких умов на додатні параметри a, b, A, B задані криві перетинаються взаємно ортогонально (під кутом $\frac{\pi}{2}$)?

Задача 2.2. Розглянемо наступні неявно задані криві:

$$\gamma_1: \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \gamma_2: \frac{(x^1)^2}{A^2} - \frac{(x^2)^2}{B^2} - 1 = 0,$$

За яких умов на додатні параметри a, b, A, B задані криві перетинаються взаємно ортогонально (під кутом $\frac{\pi}{2}$)?

Задача 2.3. Розглянемо наступну параметрично задану криву γ :

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \rho(t) \cos t \\ x^2 = \rho(t) \sin t \end{cases}, \quad t \in (a, b),$$

де $\rho(t)$ – деяка неперервно диференційована функція.

За яких умов на функцію $\rho(t)$ задана крива γ буде регулярною?

Підберіть функцію $\rho(t)$ так, щоб задана крива γ перетиналась з будь-яким променем, що виходить з початку координат O , під одним і тим же кутом α .

Підказка. Запишіть довільний промінь як параметрично задану криву.

3. Щільнодотична площина

Задача 3.1. Перевірте, що для параметрично заданої гвинтової лінії γ в \mathbb{R}^3

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = \cos t \\ x^2 = \sin t \\ x^3 = ht \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

щільнодотичні площини в усіх точках кривої нахилені однаково по відношенню до вертикального координатного напрямку x^3 .

Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої в довільній точці та координатною віссю x^3 .

Задача 3.2. Для параметрично заданої кривої γ в \mathbb{R}^4 запишіть рівняння щільнодотичної площини в заданій точці P :

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = a \cos \alpha t \\ x^2 = a \sin \alpha t \\ x^3 = b \cos \beta t \\ x^4 = b \sin \beta t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad P(t=0).$$

* Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої γ в довільній точці та координатними осями.

* **Задача 3.3.** Доведіть (або спростуйте), що якщо у регулярної (класу C^2) кривої γ в \mathbb{R}^3 усі щільнодотичні площини паралельні фіксованій площині Π , то тоді уся крива γ належить якійсь площині, паралельній площині Π .