Лекція 3. Кут між кривими. Довжина кривої і натуральна параметризація. Щільнодотична площина.

Розглянемо параметрично задану крива γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

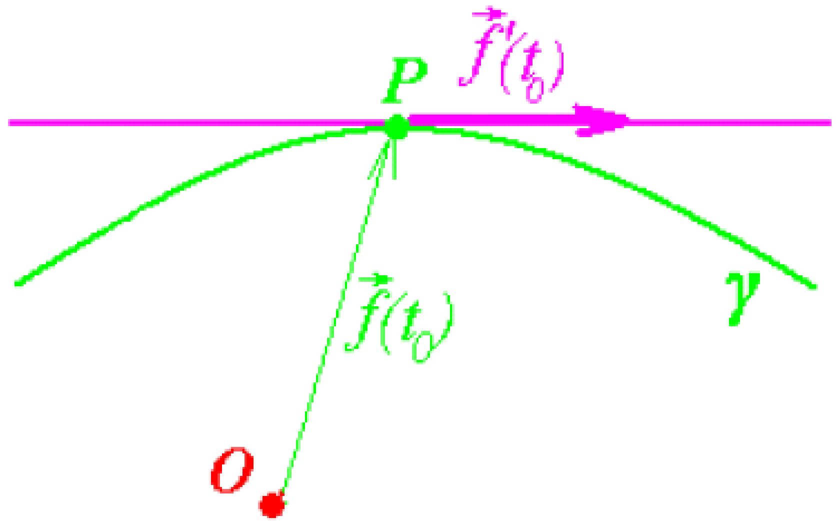
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

$$1)\ \vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1$$

$$2)\ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0 .$$

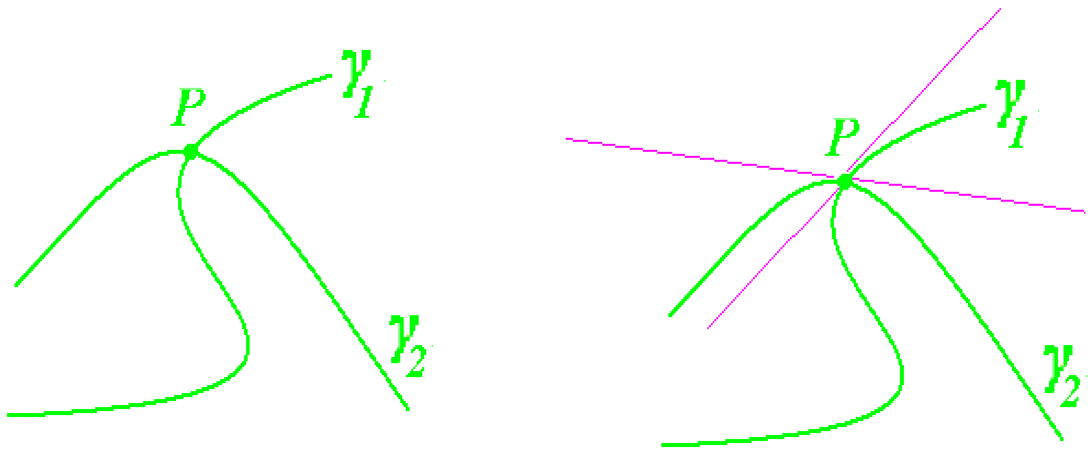
В кожній точці $P(t_0)$ на кривій γ існує і є єдиною *дотична пряма* – вона проходить через точку $P(t_0)$ в напрямку вектора $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$:



Визначення. Якщо дві регулярні криві γ_1 і γ_2 перетинаються в деякій точці P, то *кутом* між кривими γ_1 і γ_2 в точці P називають кут між дотичними прямими кривих γ_1 і γ_2 в точці P.

Криві $\gamma_1 : \vec{x} = \vec{f}(t)$, $\gamma_2 : \vec{x} = \vec{w}(\sigma)$

Точка перетину P: $\vec{f}(t_0) = \vec{w}(\sigma_0)$



Дотичні вектори:

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \quad , \quad \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0)$$

Кут визначається формулою

$$\cos\alpha = \frac{< \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0) >}{\left| \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \right| \cdot \left| \frac{d\vec{w}}{d\sigma}(\sigma_0) \right|}$$

Розглянемо параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Будемо вважати, що крива γ є регулярною:

$$1) \ \vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1$$

$$2) \ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0 .$$

Довжина кривої γ обчислюється / визначається за формулою

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt$$

3.1. Натуральна параметризація

Нехай γ – регулярна параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

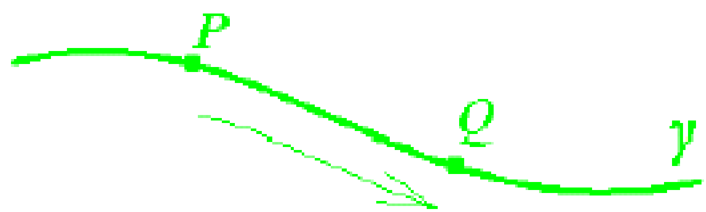
$$\vec{x} = \vec{f}(t), \qquad t \in (a,b).$$

Зафіксуємо точку P на кривій γ, що відповідає значенню параметра t_0.

Кожній довільній точці Q на кривій γ, що відповідає довільному значенню параметра t , зіставимо у відповідність величину

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt$$

Геометрично, величина s дорівнює довжині (зі знаком) дуги кривої γ від точки P до точки Q:



Очевидна формула:

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|$$

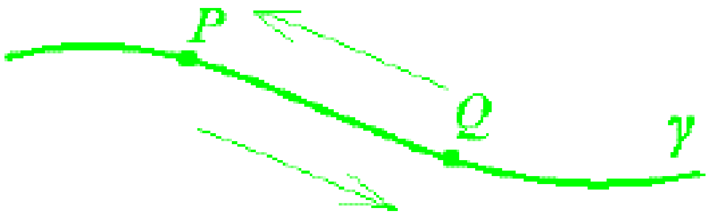
Як наслідок, $\frac{ds}{dt} \neq 0$ і перехід від параметра t до параметра s на кривій γ є регулярною заміною параметру.

Визначення. Величина s називається *натуральним параметром* на кривій γ.

Зауваження. Вибір натурального параметру залежить від вибору початкової точки P і орієнтації на кривій γ. А саме:

1) якщо замість початкової точки $P(t=t_0)$ взяти іншу початкову точку $\tilde{P}(t=\tilde{t}_0)$, то відповідні натуральні параметри та пов'язані співвідношенням $\tilde{s} = s + c$, де c – довжина дуги $\tilde{P}P$;

2) якщо змінити орієнтацію на кривій γ, залишивши початкову точку P незмінною, то натуральний параметр змінить знак на протилежний: $\tilde{s} = -s$.



Висновок. На кожній регулярній параметрично заданій кривій γ в $\mathbb{R}^n$ можна ввести спеціальну параметризацію – параметризацію *натуральним* параметром.

Натуральна параметризація кривої має багато гарних властивостей, вона є дуже зручною при розв'язанні багатьох задач теорії кривих.

Твердження. *Для регулярної параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$ параметр t є натуральним тоді, і тільки тоді, коли виконана умова*

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \equiv 1$$

Схема доведення.

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \equiv 1 \iff s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} 1\, dt = t - t_0 \iff t = s + t_0 = s^*$$

Приклад. Розглянемо параметрично задано криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t + c^1 \\ r \cdot \sin t + c^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \quad .$$

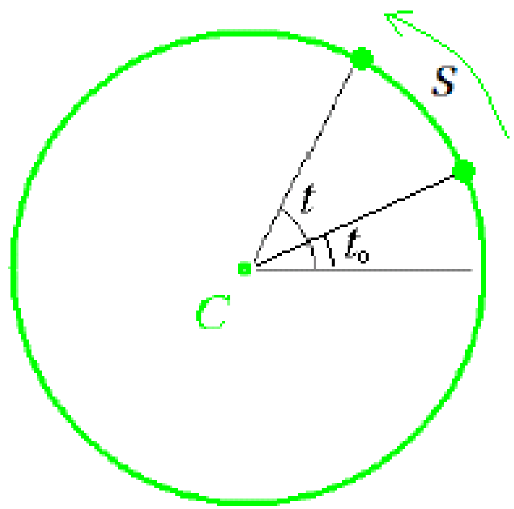
Крива γ – це коло радіуса r з центром в точці $C(c^1, c^2)$.

Обчислюємо похідну заданої вектор-функції:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t + c^1 \\ r \cdot \sin t + c^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

Обчислюємо довжину похідної вектор-функції:

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = r$$



Обчислюємо натуральний параметр:

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} r\, dt = r(t - t_0) = rt - rt_0$$

$$t = \frac{s}{r} + t_0\,, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\frac{s}{r} + t_0) + c^1 \\ r\sin(\frac{s}{r} + t_0) + c^2 \end{pmatrix}$$

3.2. Характерна властивість дотичної прямої

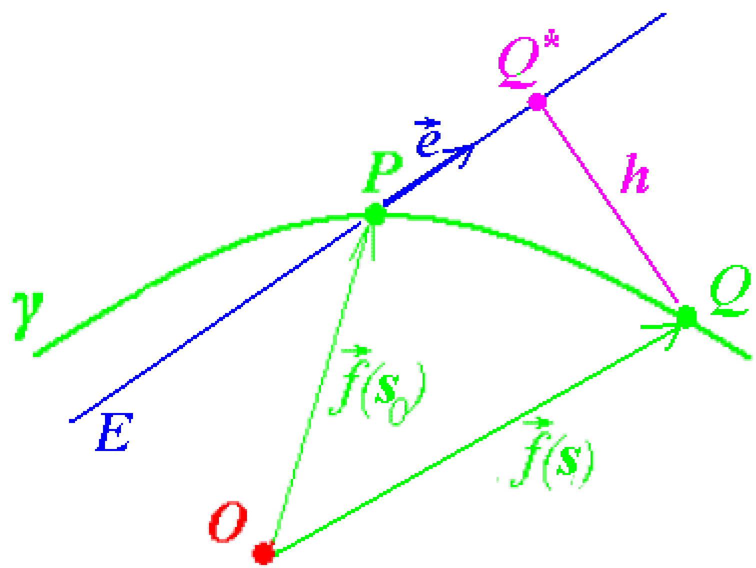
Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$, параметризовану натуральним параметром

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ і проведемо через цю точку пряму E з одиничним напрямним вектором $\vec{e}$.

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій позначимо h відстань від точки $Q(s)$ до прямої E:

$$h = \sqrt{|PQ|^2 - |PQ^*|^2} = \sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}$$



Проаналізуємо поведінку функції $h(s)$ при $s \to s_0$.

Маємо:

$$h(s_0) = 0$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{d}{ds}\left(|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2\right)}{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}} =$$

$$= \frac{\frac{d}{ds}\left(<\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)> - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2\right)}{2\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}} =$$

$$= \frac{<\frac{d\vec{f}(s)}{ds}, \vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)> - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}><\frac{d\vec{f}(s)}{ds}, \vec{e}>}{\sqrt{|\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0)|^2 - <\vec{f}(s) - \vec{f}(s_0), \vec{e}>^2}}$$

$$\frac{dh}{ds}(s_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{dh}{ds}(s_0)=$$

$$=\lim_{s\to s_0}\frac{<\frac{d\vec{f}}{ds}(s),\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0)>-<\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0),\vec{e}><\frac{d\vec{f}}{ds}(s),\vec{e}>}{\sqrt{|\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0)|^2-<\vec{f}(s)-\vec{f}(s_0),\vec{e}>^2}}=$$

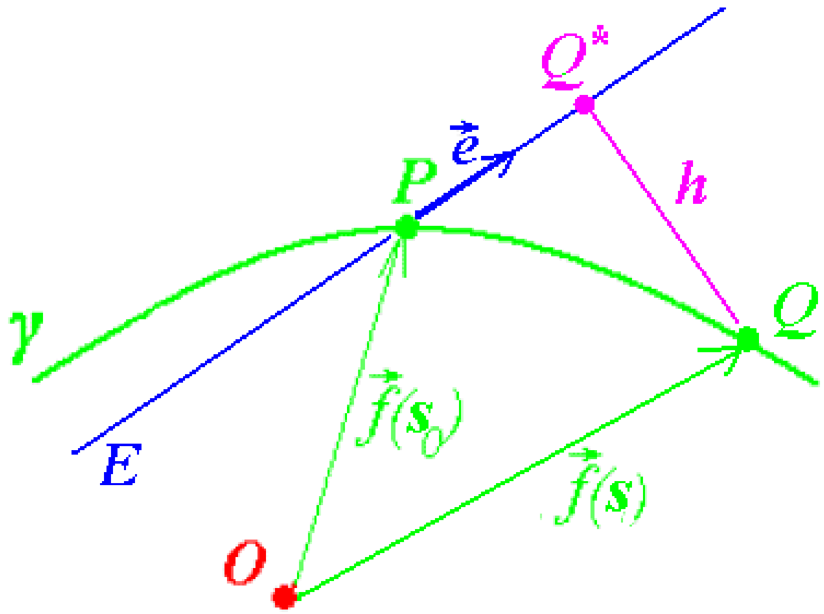
$$=\frac{<\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)>-<\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\vec{e}><\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\vec{e}>}{\sqrt{|\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)|^2-<\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\vec{e}>^2}}=$$

$$=\sqrt{|\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)|^2-<\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0),\vec{e}>^2}=\sin\varphi$$

де φ – кут між $\frac{d\vec{f}}{ds}(s_0)$ та $\vec{e}$, тобто, кут між прямою E і дотичною прямою кривої γ в точці P.

Наслідок. $h(s) = \sin\varphi \cdot (s - s_0) + o(s - s_0)$

Наслідок. $h(s) = o(s - s_0)$ тоді, і тільки тоді, коли E – дотична пряма кривої γ в точці P.



3.3. Щільнодотична площина кривої

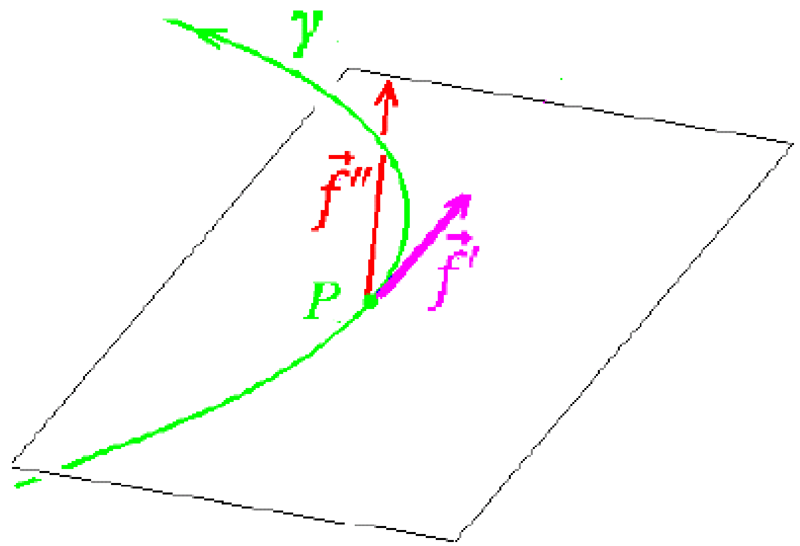
Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Зафіксуємо довільну точку P кривої γ і розглянемо пару векторів

$$\frac{d\vec{f}}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}.$$

Якщо ці вектори є лінійно незалежними, $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \neq 0$, то через точку P можна провести однозначно визначену площину, натягнуту на вказані вектори.



Ця площина називається *щільнодотичною* площиною кривої γ в точці P.

Зауваження 1. Визначення є змістовним при $n \geq 3$.

У випадку $n=2$ щільнодотична площина в довільній точці кривої γ просто співпадає з обхопною площиною $\mathbb{R}^2$.

Зауваження 2. Визначення є коректним і не залежить від вибору параметризації на регулярній кривій. Якщо зробити регулярну заміну $t = t(\tilde{t})$ і записати радіус-вектор кривої в новій параметризації:

$$\vec{x} = \vec{f}(t(\tilde{t})) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t}),$$

то маємо

$$\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}$$

$$\frac{d^2\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2 + \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d^2t}{d\tilde{t}^2}$$

тобто

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} \\ \dfrac{d^2\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dt}{d\tilde{t}} & 0 \\ \dfrac{d^2t}{d\tilde{t}^2} & \left(\dfrac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d\vec{f}}{dt} \\ \dfrac{d^2\vec{f}}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Отже, при регулярній заміні параметру на кривій щільно дотична площина не змінюється, змінюється лише базис в цій площині.

Зауваження 3. Для регулярної параметрично заданої кривої γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) \ ,$$

якщо записати розкладання Тейлора в довільній точці $P(t_0)$,

$$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

то наближенням першого порядку буде *дотична* пряма кривої γ в точці P:

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) \ ,$$

а наближенням *другого* порядку буде якась крива, що належить *щільнодотичній* площині кривої γ в точці P:

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot (t - t_0)^2 \ .$$

Рівняння щільнодотичної площини

Параметричне задавання (при довільному $n \geq 3$)

$$\vec{x}(u,v) = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot u + \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \cdot v$$

Неявне задавання (при $n=3$)

$$N_1 \cdot (x^1 - f^1(t_0)) + N_2 \cdot (x^2 - f^2(t_0)) + N_3 \cdot (x^3 - f^3(t_0)) = 0,$$

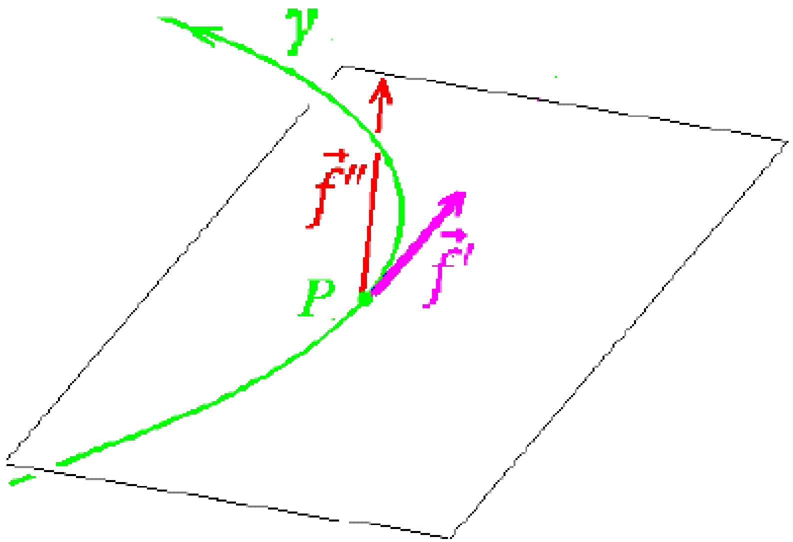
де

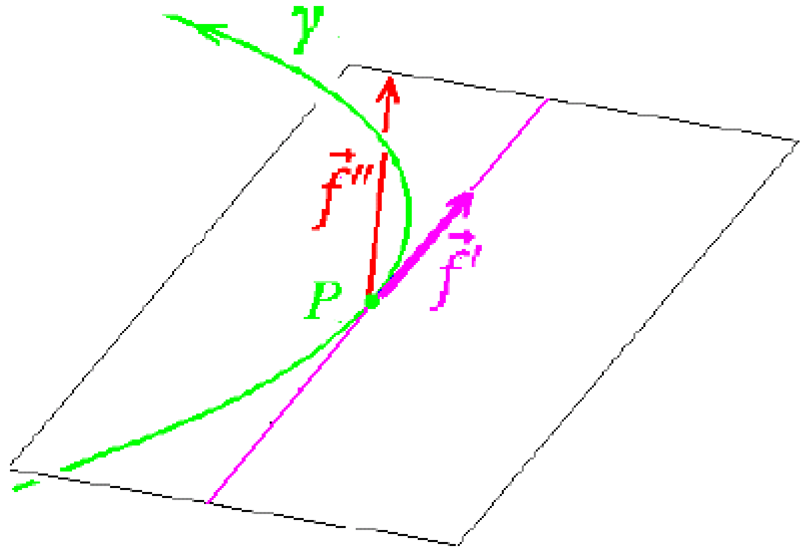
$$\vec{N} = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0) \right]$$

$$(N_1, N_2, N_3) = \left(\begin{vmatrix} \frac{df^2}{dt} & \frac{df^3}{dt} \\ \frac{d^2 f^2}{dt^2} & \frac{d^2 f^3}{dt^2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{df^3}{dt} & \frac{df^1}{dt} \\ \frac{d^2 f^3}{dt^2} & \frac{d^2 f^1}{dt^2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{df^1}{dt} & \frac{df^2}{dt} \\ \frac{d^2 f^1}{dt^2} & \frac{d^2 f^2}{dt^2} \end{vmatrix} \right)_{t=t_0}$$

Твердження. *Щільнодотична площина кривої γ в точці P містить дотичну пряму кривої γ в точці P.*

Доведення.





Щільнодотична площина як границя січних площин

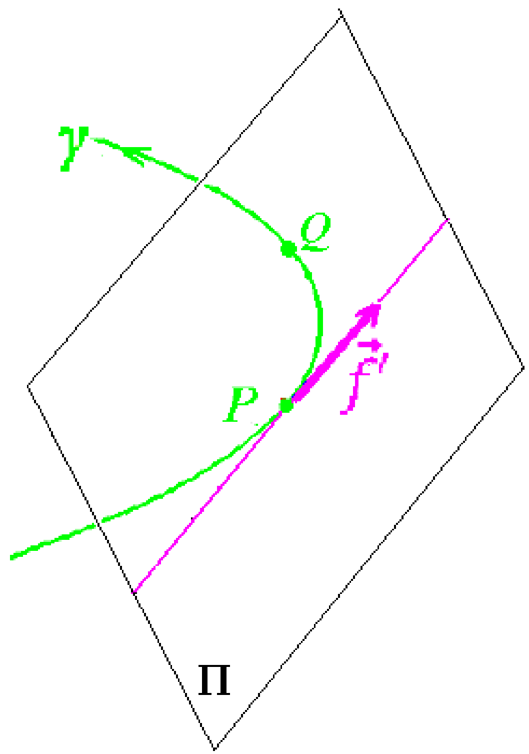
Розглянемо регулярну (класу C^2) параметрично задану криву γ в $I\!R^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a, b)$$

Зафіксуємо довільну точку $P(t_0)$ кривої γ.

Візьмемо дотичну пряму кривої γ в точці P, її напрямний вектор $\dfrac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Для довільної точки $Q(t)$ кривої γ побудуємо двомірну площину П, що містить дотичну пряму кривої γ в точці P і проходить через точку Q.



Яким буде граничне положення площини П, коли точка *Q(t)* прямує по кривій γ до точки $P(t_0)$?

Ідея розв’язання. Зважаючи на розкладання Тейлора

$$\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)+\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)\cdot(t-t_0)^2+o((t-t_0)^2)\ ,$$

площина П буде натягнута на вектори

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\ \text{і}\ \ \vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)=\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)\cdot(t-t_0)^2+o((t-t_0)^2),$$

тобто

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\ \text{і}\ \ \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)+\frac{1}{(t-t_0)^2}\cdot o((t-t_0)^2).$$

Якщо $[\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0),\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)]\neq 0$, то при $t\to t_0$ отримаємо площину, натягнуту на вектори $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ і $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t_0)$, тобто, щільнодотичну площину кривої γ в точці *P*.

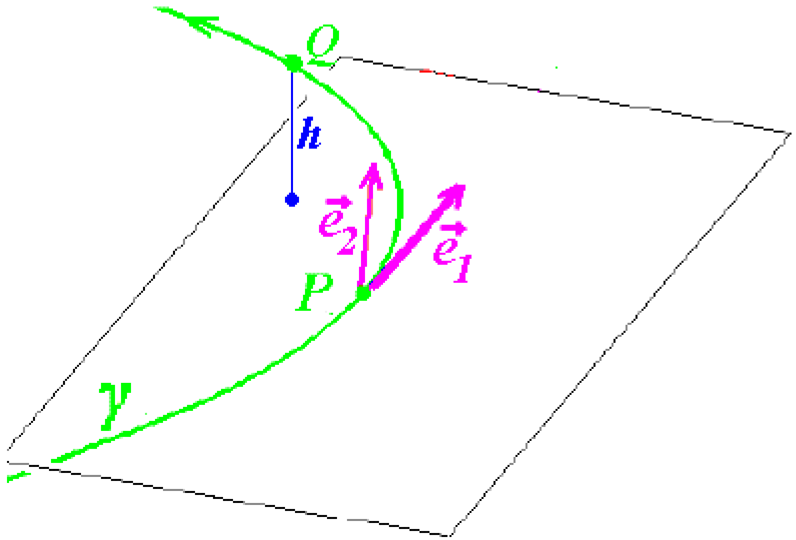
Характерна властивість щільно дотичної площини

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $\mathbb{R}^n$, параметризовану натуральним параметром

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad s \in (a,b)$$

Зафіксуємо точку $P(s_0)$ на кривій γ і проведемо через цю точку довільну двомірну площину E , натягнуту на пару ортонормованих векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Для довільної точки $Q(s)$ на кривій позначимо h відстань від точки $Q(s)$ до площини E



Задача. Перевірте, що $h(s) = o((s-s_0)^2)$ тоді, і лише тоді, коли площина E є щільнодотичною площиною кривої γ в точці P.

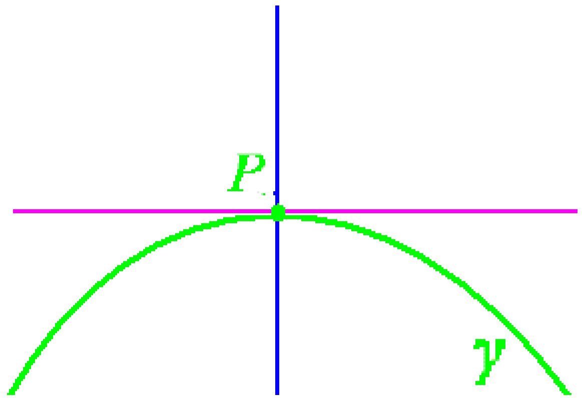
Нормальна пряма кривої в $I\!R^2$

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $I\!R^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Зафіксуємо точку P на кривій γ.

Пряма, що проходить через точку P ортогонально до дотичної прямої кривої γ в точці P, називається *нормальною прямою* кривої γ в точці P.



Задача. Запишіть рівняння нормальної прямої в термінах радіус-вектора кривої γ.

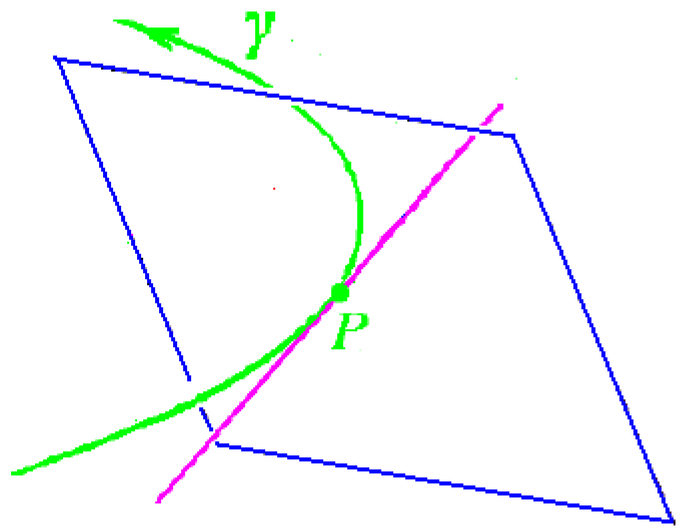
Тригранник Френе кривої в $I\!R^3$

Розглянемо регулярну параметрично задану криву γ в $I\!R^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

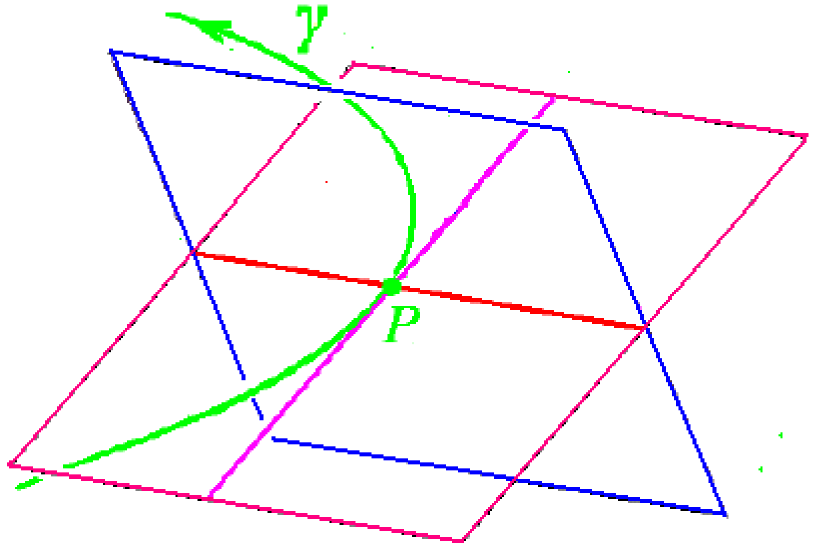
Зафіксуємо точку P на кривій γ.

Площина, що проходить через точку P ортогонально до дотичної прямої кривої γ в точці P, називається *нормальною площиною* кривої γ в точці P.



Задача. Запишіть рівняння нормальної площини в термінах радіус-вектора кривої γ.

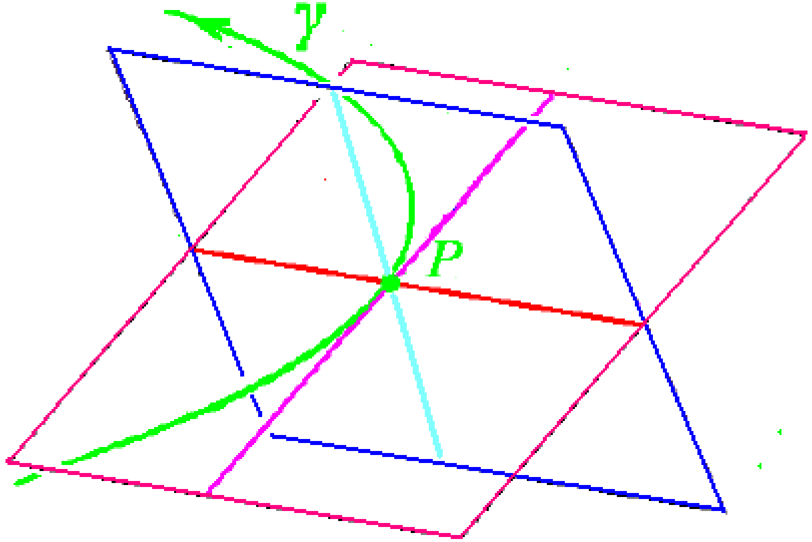
Якщо $[\frac{d\vec{f}}{dt},\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}]\neq 0$ в точці P, то в точці P є ще шільнодотична площина:



Пряма, що є перетином шільнодотичної і нормальної площин кривої γ в точці P, називається *головною нормаллю* кривої γ в точці P.

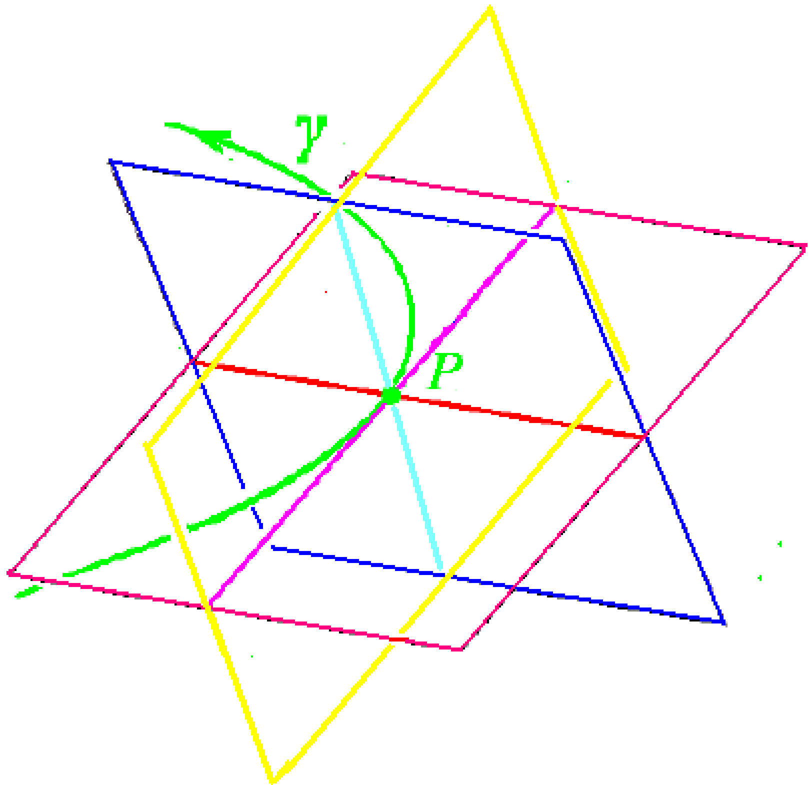
Задача. Запишіть рівняння головної нормалі в термінах радіус-вектора кривої γ.

Пряма в нормальній площині кривої γ в точці P, яка проходить через точку P ортогонально до головної нормалі кривої γ в точці P, називається *бінормаллю* кривої γ в точці P.



Задача. Запишіть рівняння бінормалі в термінах радіус-вектора кривої γ.

Площина, що проходить через дотичну пряму і бінормаль кривої γ в точці P, називається *спрямною площиною* кривої γ в точці P.



Задача. Запишіть рівняння спрямної площини в термінах радіус-вектора кривої γ.