30.D Нехай $F: X \times I \to Y$ (X, Y – ТП), і $\forall z \in I$ $f_z = F(\cdot, z)$: $x \mapsto F(x, z)$ неперервне $X \to Y$. Чи обов'язково F неперервне?

Ні. Можна взяти, наприклад, $F(x, z) = g(z)$, де $g: I \to Y$ – не неперервне. Тоді $\forall z$ f_z – постійне у $g(z) \Rightarrow$ непер.
g – не непер. $\Rightarrow \exists$ відкр. $U \subset Y$: $g^{-1}(U)$ не відкр. Але $F^{-1}(U) = X \times g^{-1}(U)$ тоді теж не відкр. $\Rightarrow F$ не непер.

30.Q, R (Впр. 1.1. (c) з лекцій).
Нехай X, Y – ТП, $C(X; Y)$ – з компактно-відкритою топ.
$\forall F: X \times I \to Y$ поставимо у відп. $h: I \to C(X, Y)$:
$h(z)(x) := F(x, z)$ (і навпаки, h відповідає F)
($\forall z \in I, x \in X$) Тоді:
- $F \in C(X \times I, Y) \Rightarrow h \in C(I, C(X, Y))$, тобто $\forall$ гомотопії відображень $f_0 = F(\cdot, 0)$ і $f_1 = F(\cdot, 1)$ відповідає шлях у $C(X, Y)$, що з'єднує $h(0) = f_0$ і $h(1) = f_1$.
- Якщо X лок. компактний і хаусдорфовий, то вірно і $\Leftarrow$.

=> Отже, нехай F непер. $\Leftrightarrow$ $\forall$ відкр. $U \subset Y$ $F^{-1}(U)$ відкр. у $X \times I$.

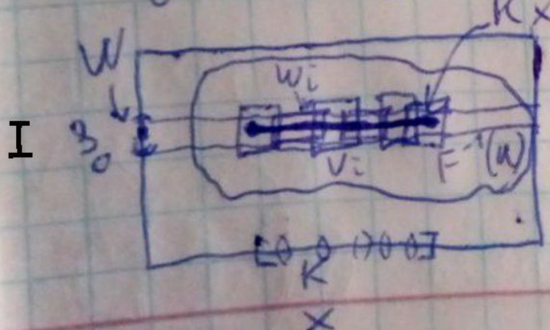
Треба довести: h непер. $\Leftrightarrow$ прообраз $\forall$ відкр. $C(X,Y)$ відкр. $\Leftrightarrow$ $\forall$ компактної $K \subset X$ і відкр. $U \subset Y$ $h^{-1}(W(K,U))$ відкр. в I, бо $\{W(K,U)\}$ утворюють передбазу $C(X,Y)$: $\forall$ відкр. у $C(X,Y)$ має вигляд $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \bigcap\limits_{i=1}^{n_\alpha} W(K_{\alpha i}, U_{\alpha i})$ => її прообраз $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \bigcap\limits_{i=1}^{n_\alpha} h^{-1}(W(K_{\alpha i}, U_{\alpha i}))$

При цьому $W(K,U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$ =>

$$h^{-1}(W(K,U)) = \{s \in I \mid h(s)(K) \subset U\} = \{s \in I \mid \forall x \in K \ F(x,s) \in U\}$$

$$F(K,s) = F(K \times \{s\})$$

$$= \{s \in I \mid K \times \{s\} \subset F^{-1}(U)\}.$$



Нехай $s_0 \in h^{-1}(W(K,U)) \Leftrightarrow K \times \{s_0\} \subset F^{-1}(U)$.

$F^{-1}(U)$ відкр. => $\forall x \in K$ $\exists$ відкр. $V_x \subset X$, $W_x \subset I$: $(x, s_0) \in V_x \times W_x \subset F^{-1}(U)$. Тоді $\{V_x \times W_x\}_{x \in K}$ – відкр. покриття компакта $K \times \{s_0\} \cong K$ => $\exists$ скінч. підпокриття $\{V_i \times W_i\}_{i=1}^{n}$.

Покр. $W := \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ — відкр. окіл z_0. $\forall z \in W$ $\forall x \in K$ $\exists i : (x, z_0) \in V_i \times W_i \subset F^{-1}(U) \Rightarrow (x, z) \in V_i \times W \subset V_i \times W_i \subset F^{-1}(U)$. Тобто $z \in h^{-1}(W(K,U))$. Т.ч. $W \subset h^{-1}(W(K,U))$. Звідси $h^{-1}(W(K,U))$ — відкрита.

<u>⇐.</u> Нехай X — лок. компактний і хаусдорфовий. За <u>def.</u>, X — лок. комп. $\Leftrightarrow \forall x \in X$ $\exists$ відкр. $V \ni x : \overline{V}$ компактне.

<u>Рч.</u> X — лок. комп. і хаусд. $\Rightarrow \forall x \in X$ і $\forall$ відкр. $U \ni x$ $\exists$ відкр. $W \ni x : \overline{W} \subset U$ і $\overline{W}$ компактне.
(З цієї умови вип. лок. компактність при $U = X$, але необов'язково хаусдорфовість).

▶ Отже, $x \in U$ — відкр. За умовою $\exists V$ — відкр. : $x \in V$ і $\overline{V}$ комп.

$\overline{V} \setminus U = \overline{V} \cap (X \setminus U)$ — замкнена в індукованій топ. компактного $\overline{V} \Rightarrow$ компакт (у $\overline{V}$, але в X також).

X — хаусд. $\Rightarrow \forall y \in \overline{V} \setminus U$ $\exists$ відкр. (в топ. X) $W_y \ni x$,

$V_y \ni y$: $W_y \cap V_y = \emptyset$ (бо $y \neq x$). Також можемо вважати, що $W_y \subset U \cap V$ $\forall y$: за необхідності, замінимо на $W_y \cap U \cap V$ — відкр. $\ni x$. $\{V_y\}_{y \in \overline{V} \setminus U}$ — відкр. покр. компакта $\overline{V} \setminus U$ $\Rightarrow \exists$ скінч. підпокриття $\{V_{y_i}\}_{i=1}^{n}$. Покладемо $W := \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i}$ — відкр. (у топ. X), $x \in W \subset U \cap V$. За побудовою, $W \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = \emptyset$, де відкр. $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supset \overline{V} \setminus U$. Тому $\overline{W} \cap \overline{V} \setminus U = \emptyset$ (кожна $y \in \overline{V} \setminus U$ має відкр. окіл $\bigcup_{1}^{n} V_{y_i}$, що не містить точок $W \Rightarrow y \notin \overline{W}$). З іншого боку, $W \subset V \Rightarrow \overline{W} \subset \overline{V}$. Тому $\overline{W} \subset U$. Крім того, $\overline{W}$ — замкнена підмн. компактного $\overline{V}$ $\Rightarrow$ компакт (в $\overline{V}$, а отже в X). ▲

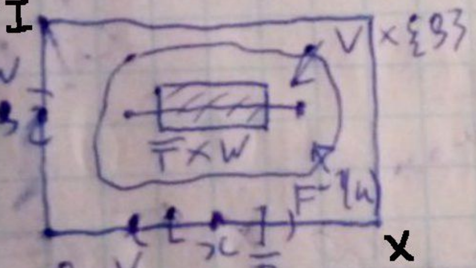
<u>Сн.</u> X лок. комп. і хаусд. $\Rightarrow$ X регулярний.

▲ X - хаусд. $\Rightarrow X - T_1$. Тому треба перевірити, що $X - T_3 \Leftrightarrow$ $\forall x \in X$: $\forall$ відкр. $U \ni x$ $\exists$ відкр. $W \ni x$: $\overline{W} \subset U$. Це вип. з Л. ▲

Повернемося до задачі. Отже, відомо, що $F: X \times I \to Y$ таке, що відповідне $h: I \to C(X,Y): s \mapsto F(\cdot, s)$ неперервне. Треба довести, що F - непер., тобто що $\forall$ відкр. $U \subset Y$ $F^{-1}(U)$ відкр.

Нехай $(x, z) \in F^{-1}(U)$. $h(z) = F(\cdot, z) \in C(X, Y)$ і $h(z)(x) = F(x, z) \in U \Rightarrow \exists$ відкр. $V \ni x$ у X: $U \supset h(z)(V) = F(V \times \{z\})$. X - лок. комп. і хаусд. $\Rightarrow$ за Pr. $\exists$ відкр. $T \ni x$: $\overline{T} \subset V$ і $\overline{T}$ - компакт. Зокрема, $h(z)(\overline{T}) \subset h(z)(V) \subset U \Rightarrow h(z) \in W(\overline{T}, U)$. За непер. h $\exists$ відкр. $W \ni z$: $h(W) \subset W(\overline{T}, U)$ (бо $W(\overline{T}, U)$ - відкр.).

Т.ч., $W \subset h^{-1}(W(\overline{T}, U)) \Leftrightarrow$ (як вище) $\Leftrightarrow \overline{T} \times W \subset F^{-1}(U)$.



Очевидно, $T \times W$ - відкр., і $(x, z) \in T \times W \subset \overline{T} \times U \subset F^{-1}(U)$. Це й значить, що $F^{-1}(U)$ - відкр., F - непер.

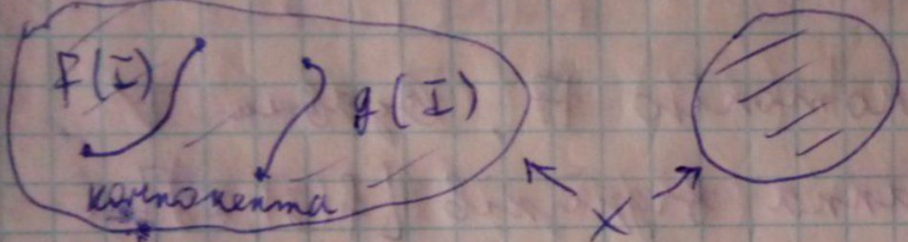
Це все залишиться вірним, якщо замінити I на довільний Z.

30.3 (30.9, Впр. 3.1 з лекції)

Шляхи $f, g : I \to X$ гомотопні $\Leftrightarrow$ $f(I)$, $g(I)$ лежать в одній комп. лін. зв'язності X.

f, g - непер. I - лін. зв. $\Rightarrow f(I), g(I)$ лін. зв. $\Rightarrow$ лежать у деякій комп. лін. зв. (але, можливо, різних).

$\Rightarrow$ $f \sim g \Rightarrow \exists$ гомотопія $F \in C(I \times I, X)$:
$F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$. $I \times I$ лін.зв., F непер. $\Rightarrow$
$F(I \times I)$ лін.зв. $\Rightarrow F(I \times I)$ лежить у деякій комп. лін.зв.
$X \Rightarrow f(I) = F(I \times \{0\}) \subset F(I \times I)$ і $g(I) = F(I \times \{1\}) \subset$
$\subset F(I \times I)$ лежать в тій же.



$\Leftarrow$ Будь-який шлях гомотопний постійному: наприклад, $f \sim e_{f(0)}$. Гомотопія:

$F(t,s) = f(ts)$ – непер. $\left(I \times I \xrightarrow{(s,t) \mapsto st} I \xrightarrow{f} \right.$ – комп. непер.$\left. \right)$

$F(t,0) = f(0)$ $\forall t$, $F(t,1) = f(t)$ $\forall t$, тому це потр. гомотопія. Ан-но, $g \sim e_{g(0)}$.

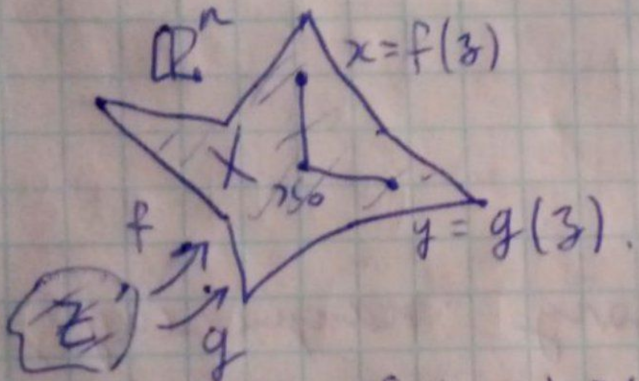
За умовою, $f(0) \in f(I)$ і $g(0) \in g(I)$ лежать в одній комп. лін. зв. $\Rightarrow \exists$ шлях $h : I \to X$: $h(0) = f(0)$, $h(1) = g(0)$. Тоді $H(t,s) = h(s)$ – гомотопія $e_{f(0)}$ і $e_{g(0)}$.
(це Cor.1.1. з лекцій).

Отже, $f \sim e_{f(0)} \sim e_{g(0)} \sim g$.

30.4. (Впр. 1.2. лекції)

$\forall$ неперервних $f, g : Z \to X$, де $X \subset \mathbb{R}^n$ – зірчата, $f \sim g$.

Нехай x_0 – центр X: $\forall x \in X$ $[x_0, x] \subset X$



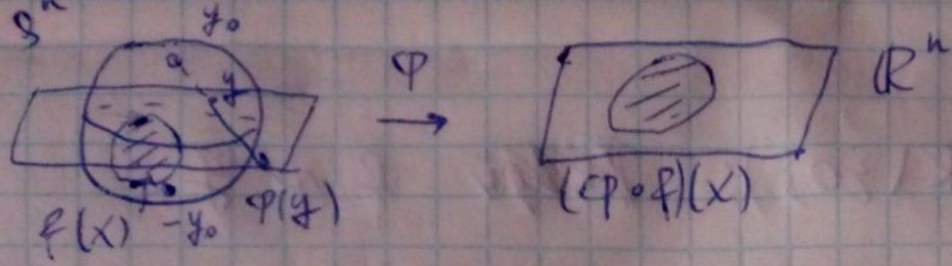
Побудуємо гомотопію F, взявши $\forall$ $z \in Z$ об'єднання відрізків $[f(z), x_0]$ і $[x_0, g(z)]$:

$$F(z,s) = \begin{cases} (1-2s)f(z) + 2s x_0, & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2-2s)x_0 + (2s-1)g(z), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$F : Z \times I \to X$ за зірчатістю. Неперерв. (з неперерв. f, g і лінійних відобр.); при $s = \frac{1}{2}$ маємо x_0), $F(z,0) = f(z)$, $F(z,1) = g(z)$ $\forall z$.

30.7. $f \in C(X, S^n)$, $n \geq 1$, f – не сюр'єкт. Показати, що f гомотопне постійному.

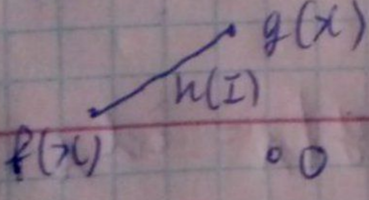
За умовою, $\exists$ $y_0 \in S^n$: $y_0 \notin f(X)$

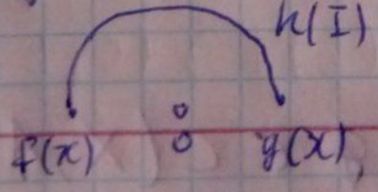


Розглянемо стереогр. проекцію $\varphi: S^n\setminus\{y_0\}\to\mathbb{R}^n$. Це гомеоморфізм. Тоді визначене $\varphi\circ f\in C(X,\mathbb{R}^n)$. З опуклості $\mathbb{R}^n$ і попер. задачі, $\varphi\circ f$ гомотопне постійному, скажімо, e_0. Нехай F – відп. гомотопія: $F\in C(X\times I,\mathbb{R}^n)$, $F(\cdot,0)=\varphi\circ f$, $F(\cdot,1)=0$. Тоді $\varphi^{-1}\circ F\in C(X\times I, S^n\setminus\{0\})\subset C(X\times I,S^n)$, $\varphi^{-1}\circ F(\cdot,0)=\varphi^{-1}\circ\varphi\circ f=f$, $\varphi^{-1}\circ F(\cdot,1)=\varphi^{-1}\circ e_0=e_{\varphi^{-1}(0)}=e_{-y_0}$. Отже, це гомотопія, $f\sim e_{-y_0}$.

<u>30.7.</u> Нехай $n>1$, $f,g\in C(\{x\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Тоді $f\sim g$.

Це знову <u>Cor. 1.1</u> лекції: нехай шлях h сполучає $f(x)$ і $g(x)$ у $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ – це може бути відрізок

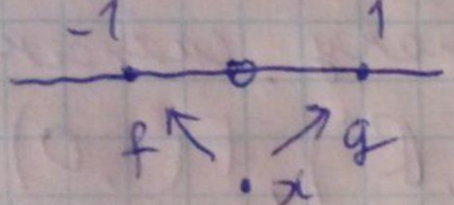




або дуга кола. Тоді $F(x,s):=h(s)$ – гомотопія постійних f і g: непер., $F(x,0)=h(0)=f(x)$, $F(x,1)=h(1)=g(x)$.

$30.8.$ ~~Нехай~~ $\exists$ $f, g \in C(\{x\}, \mathbb{R}\setminus\{0\})$: ~~Тоді~~ $f \not\sim g$.

Знову ж, Сор. 1.1. $\Rightarrow$ треба обирати $f(x)$ і $g(x)$ у різних комп. лін. зв'язності. Скажімо, $f(x) = -1$, $g(x) = 1$.



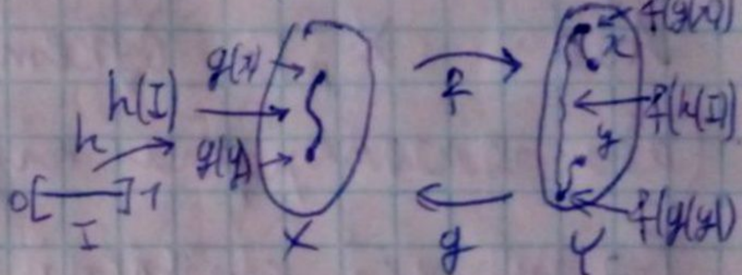
Тоді ~~н~~ $\exists$ гомотопія $F \in C(\{x\}\times I, \mathbb{R}\setminus\{0\})$: $F(x,0) = f(x) = -1$, $F(x,1) = g(x) = 1$. Тоді $h: s \mapsto F(x,s)$ — неперервне $I \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (шлях у $\mathbb{R}\setminus\{0\}$), $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 1$. I — зв'язний, але $h(I)$ — ні: $h(I) \cap \underset{u}{(-\infty,0)} \neq \emptyset$, $h(I) \cap \underset{v}{(0,+\infty)} \neq \emptyset$, $\underset{u}{(-\infty,0)} \cap \underset{v}{(0,+\infty)} = \emptyset$, $\underset{u}{(-\infty,0)} \cup \underset{v}{(0,+\infty)} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Це суперечить неперервності h. $\lightning$

39.2. (спрощений). X лінійно зв'язний, $X \sim Y \Rightarrow Y$ лін. зв'язний.

Отже, $\exists\, f \in C(X,Y),\ g \in C(Y,X):\ f \circ g \sim id_Y,\ g \circ f \sim id_X$.

Нехай $x, y \in Y$. X - лін. зв. $\Rightarrow \exists$ шлях $h \in C(I, X)$: $h(0) = g(x)$, $h(1) = g(y)$. Тоді $f \circ h \in C(I, Y)$ - шлях, і $f \circ h(0) = f(g(x))$, $f \circ h(1) = f(g(y))$.



З іншого боку, $f \circ g \sim id_Y \Rightarrow f(g(x))$ і x, $f(g(y))$ і y можна з'єднати шляхами: якщо $F: Y \times I \to Y$ - відп. гомотопія, то $s \mapsto F(x,s)$, $s \mapsto F(y,s)$ - шляхи: $F(x,0) = f(g(x))$ і $F(x,1) = id_Y(x) = x$, і ан-но для y. $g \circ f \sim id_X$ не знадобилося.