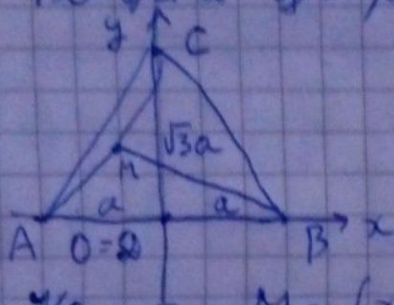
294. ABC – рівносторонній, D – середина AB. Знайти ГМТ M таких, що $MA^2+MB^2+MC^2$ постійна, якщо цьому належить D.

Введемо декартову с.к.: $D = O$, $AB = Ox$:



Тоді $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,\sqrt{3}a)$, де $2a = AB = BC = AC$ – сторона тр-ка.

При $M=D$: $DA^2+DB^2+DC^2 = a^2+a^2+3a^2=5a^2$.

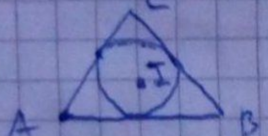
Нехай $M=(x,y)$. Т.ч. маємо умову

$$5a^2 = MA^2+MB^2+MC^2 = (x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2+x^2+(y-\sqrt{3}a)^2.$$

$$3x^2+3y^2-2\sqrt{3}ay+5a^2=5a^2$$

$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=\frac{a^2}{3}$$

Коло з центром у $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$ радіуса $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ – вписане коло $\triangle ABC$.



303. $\omega_1: x^2+y^2-6x-27=0$, $\omega_2: x^2+y^2+2x-8=0$ – кола.

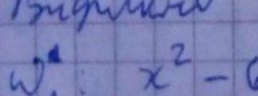
Знайти ГМТ M таких, що ~~довжина~~ $MA = 2MB$, де MA – відрізок дотичної до більшого кола, MB – до меншого.

Виділимо повні квадрати:

ω_1: $x^2-\underset{2\cdot 3}{6x}+3^2-3^2+y^2-27=0$, $(x-3)^2+y^2=36$. Центр $(3,0)$, радіус 6.

ω_2: $x^2+\underset{2\cdot 1}{2x}+1^2-1^2+y^2-8=0$, $(x+1)^2+y^2=9$. Центр $(-1,0)$, радіус 3.

Зокрема, ω_1 більше. Ан-но 300.:



Довжина відр. дотичної з $M(x,y)$ до кола $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – це $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2}$ (за теоремою Піфагора)

В даному випадку:

$$MA^2 = 4MB^2$$

$$(x-3)^2+y^2-36 = 4\left((x+1)^2+y^2-9\right)$$

$$x^2+y^2-6x-27 = 4(x^2+y^2+2x-8)$$ (Це рівняння, що були спочатку)

Перенесемо вправо:

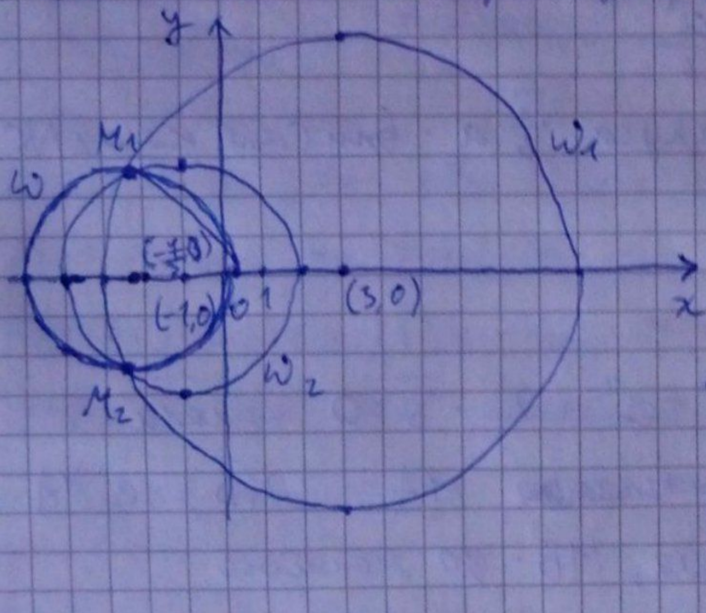
$$3x^2+3y^2+14x-5=0$$

$$x^2+y^2+2\cdot\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{49}{9}+y^2-\frac{5}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+y^2=\frac{64}{9}$$

Це коло ω з центром $\left(-\frac{7}{3}, 0\right)$ радіуса $\frac{8}{3}$. Але з точок M повинна існувати можливість проводити дотичні, тобто вони повинні бути ззовні ω_1, ω_2! Розташування кіл:



Перетин ω і ω_1:

$$\begin{cases} x^2+y^2+\frac{14}{3}x-\frac{5}{3}=0 \\ x^2+y^2-6x-27=0 \end{cases}$$

$$\frac{32}{3}x+\frac{76}{3}=0$$

$$x=-\frac{76}{32}=-\frac{19}{8}.$$

Перетин ω і ω_2:

$$\begin{cases} x^2+y^2+\frac{14}{3}x-\frac{5}{3}=0 \\ x^2+y^2+2x-8=0 \end{cases}$$

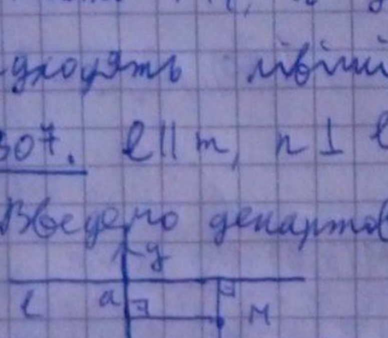
$$\frac{8}{3}x+\frac{19}{3}=0$$

$$x=-\frac{19}{8}$$

Тобто M_1, M_2 з $x=-\frac{19}{8}$ – точки перетину 3 кіл. Нам підходять лівіші точки ω: $x \leq -\frac{19}{8}$.

307. $l \parallel m$, $n \perp l, m$. Знайти ГМТ M: $d(M,l)+d(M,m)=2d(M,n)$.

Введемо декартову с.к.! $Ox \parallel l, m$, $Oy = n$, O – посередині між l, m. Тоді:



$l: y=a$, $m: y=-a$, $n: x=0$.

Для $M=(x,y)$: $d(M,l)=|y-a|$, $d(M,m)=|y+a|$, $d(M,n)=|x|$. Умови:

$$|y-a|+|y+a|=2|x|$$

Квадрат.

$$(y-a)^2 + (y+a)^2 + 2|y^2-a^2| = 4x^2$$

$$|y^2-a^2| = 2x^2 - y^2 - a^2.$$

Піднесення до квадрату тут не буде рівносильним перетворенням (з'являться зайві точки), бо справа — не обов'язково невід'ємне число (на відміну від 30б.). Тому треба або додати умову $2x^2-y^2-a^2 \ge 0$ (точки зовні гіперболи), або розкривати модуль:

$y^2-a^2 \ge 0$, тобто $y^2 \ge a^2$, $|y| \ge a$:

$$y^2 - \cancel{a^2} = 2x^2 - y^2 - \cancel{a^2}$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x-y)(x+y) = 0$$ — бісектриси коорд. кутів

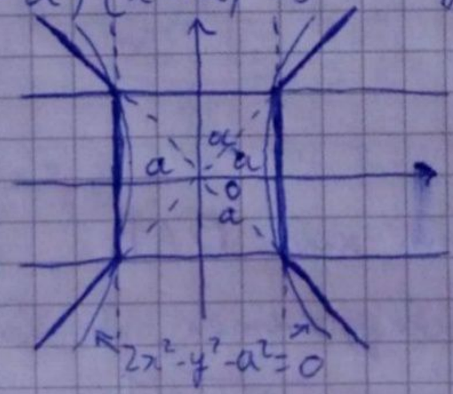
$y^2-a^2 \le 0$, тобто $y^2 \le a^2$, $|y| \le a$:

$$-\cancel{y^2} + a^2 = 2x^2 - \cancel{y^2} - a^2$$

$$x^2 - a^2 = 0$$

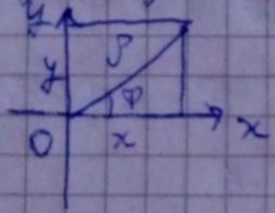
$$(x-a)(x+a) = 0$$ — дві вертикальні (||Oy) прямі

Т.ч., маємо:



120(1). У деякій полярній с.к. $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$. Знайти її координати у відповідній декартовій с.к.

Відповідність між системами координат:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$x = 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, $y = 2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. $A(1, \sqrt{3})$.

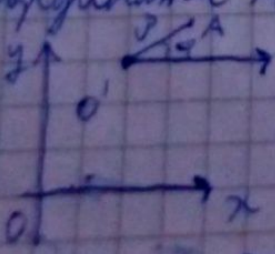
121(1) У декартовій с.к. $A(-1, 1)$. Знайти її координати у відповідній полярній системі.

Якщо $A(\rho, \varphi)$, то $\begin{cases} \rho\cos\varphi = -1 \\ \rho\sin\varphi = 1 \end{cases}$, тому

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

$A\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

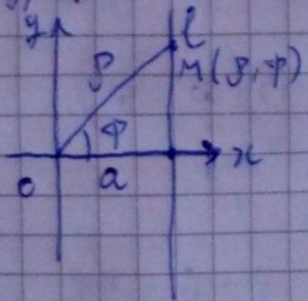
122. $A\left(10, \frac{\pi}{6}\right)$ у полярній с.к. з полюсом $(2,3)$ у деякій декартовій с.к. Полярна вісь паралельна Ox. Знайти декартові координати A



Тут координати зсунуті: $\begin{cases} x = 2 + \rho\cos\varphi \\ y = 3 + \rho\sin\varphi \end{cases}$.

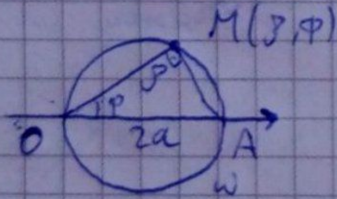
Для A маємо $\left(2 + 10\cdot\cos\frac{\pi}{6}, 3 + 10\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right) = (2 + 5\sqrt{3}, 8)$.

309 Пр. $l \perp Ox$ і відтинає на її додатньому промені відрізок $a>0$. Знайти її рівняння у відповідній полярній с.к.



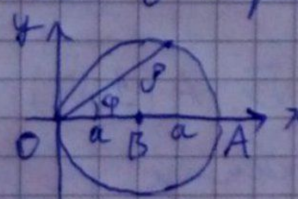
$M(\rho,\varphi) \in l \iff \rho\cos\varphi = a$. Отже, рівняння $\rho = \frac{a}{\cos\varphi}$.

310 ω - коло, $O \in \omega$. Введемо полярну с.к.: полюс в O, вісь - діаметр ω. Знайти у ній рівняння ω, a - радіус ω.



OA - діаметр $\iff OMA$ - прямий. Точку $M(\rho,\varphi) \in \omega$ $\iff \rho = OM = OA \cdot \cos\angle MOA = 2a\cos\varphi$. Рівн.: $\rho = 2a\cos\varphi$.

Або: використаємо відповідну декартову с.к.



Тоді центр кола у $B(a,0)$, його рівняння:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0.$$

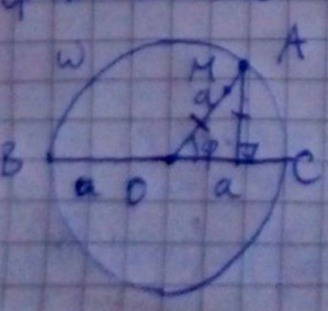
Підставимо $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2a\rho\cos\varphi = 0.$$

$$\rho(\rho - 2a\cos\varphi) = 0;$$

тобто $\rho = 0$ або $\rho = 2a\cos\varphi$.

311 ω - коло з центром O радіуса a. На кожному його радіусі OA відкладають відрізок $OM = d(A, BC)$, де BC - фіксований діаметр. Знайти ГМТ M.



Введено полярну с.к. з полюсом O і віссю OC. У ній рівн. ω - це просто (для $\varphi \in [0,\pi]$) $\rho = a$. Тоді для $A(a,\varphi)$ $d(A,BC) = a \sin\varphi$. Отже, M має полярні коорд. $(a\sin\varphi, \varphi)$.

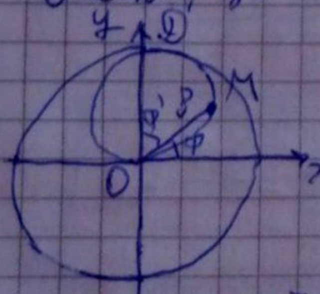
Рівняння кривої: $\rho = a\sin\varphi$. Що це?

Розглянемо відп. дек. с.к. У ній $x = \rho\cos\varphi = a\sin\varphi\cos\varphi = \frac{a}{2}\sin 2\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi = a\sin^2\varphi = \frac{a}{2}(1-\cos 2\varphi)$. Тобто $M(x,y)$ належить цьому ГМТ $\Leftrightarrow$

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\left(\sin^2 2\varphi + (-\cos 2\varphi)^2\right) = \frac{a^2}{4}.$$

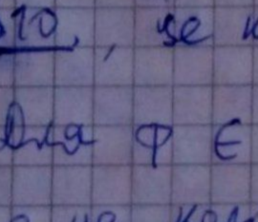
Це коло з центром $(0, \frac{a}{2})$ радіуса $\frac{a}{2}$ (вписане у півкруг, що обмежений BC).

Або: розглянемо нову полярну с.к. з полюсом O і віссю, що ортогональна BC (відповідає Oy декартової)



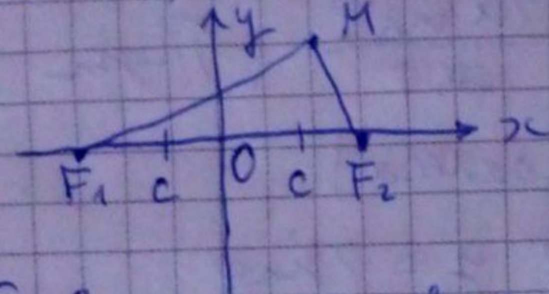
Змінимо також орієнтацію на протилежну. У цих нових коорд.: $\rho' = \rho$ і $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Тому $M \in$ ГМТ $\Leftrightarrow \rho' = \rho = a\sin\varphi = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right) = a\cos\varphi' = 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\varphi'$. Згідно з задачею 310, це коло радіуса $\frac{a}{2}$ з діаметром OD.

Для $\varphi \in [\pi, 2\pi)$ $\rho = d(A,BC) = -a\sin\varphi$. Ан-но знаходимо, що це коло, вписане в нижній півкруг. Т.ч., відповідь - два кола.



326. F_1, F_2: $F_1F_2 = 2c$. Знайти рівняння ГМТ M таких, що $MF_1 \cdot MF_2 = c^2$, у декартовій с.к. з початком у середині O відр. F_1F_2 і $Ox = F_1F_2$ та у відповідній полярній с.к.

Отже, с.к.:



$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Умова:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}=c^2.$$

Піднесено до квадрата:

$$(x^2+y^2+c^2+2xc)(x^2+y^2+c^2-2xc)=c^4$$

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=c^4$$

$$(x^2+y^2)^2+\cancel{c^4}+2c^2(x^2+y^2)-4c^2x^2=\cancel{c^4}$$

$$\boxed{(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)}$$

(Перетв. рівносильні, бо до квадрату підносили ≥ 0 число)

Перейдемо до відп. полярних: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$

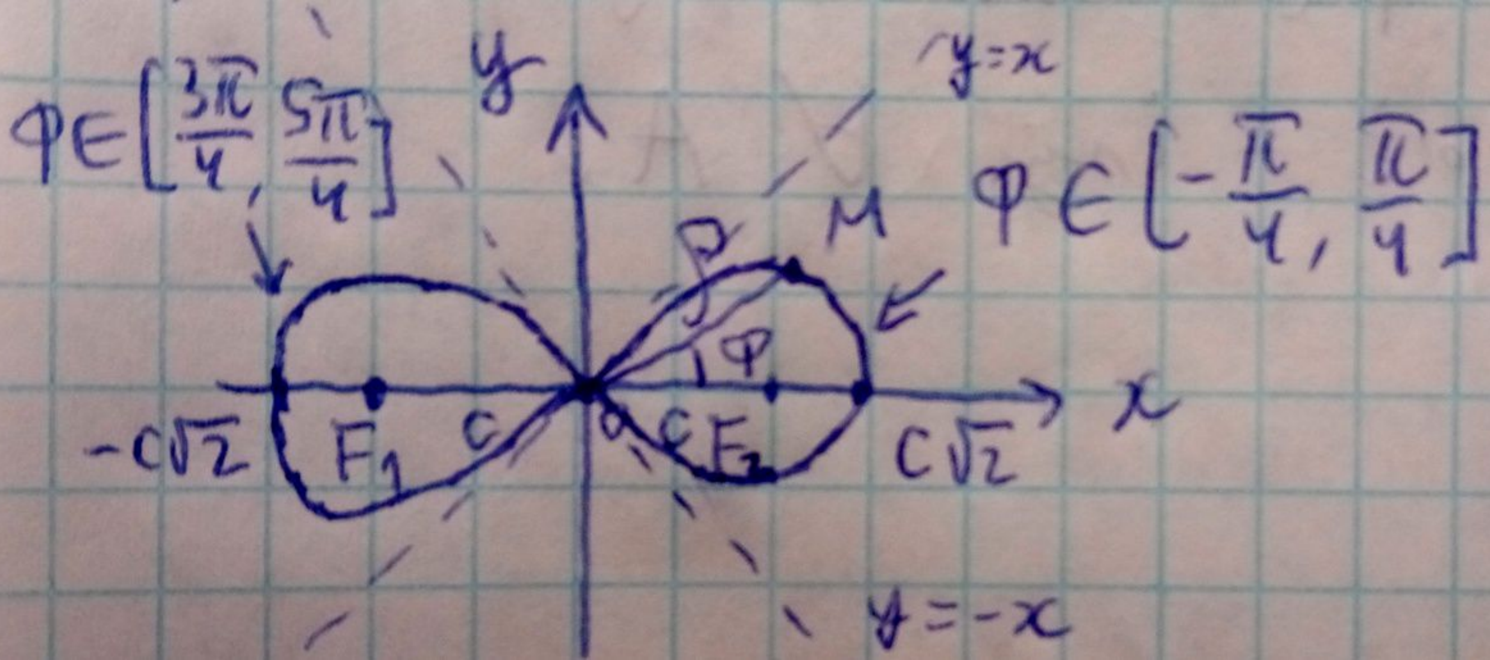
$$\left(\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\right)^2=2c^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$

Тобто $\rho=0$ або $\rho^2=2c^2\cos 2\varphi$.

$$\boxed{\rho=c\sqrt{2\cos 2\varphi}}$$

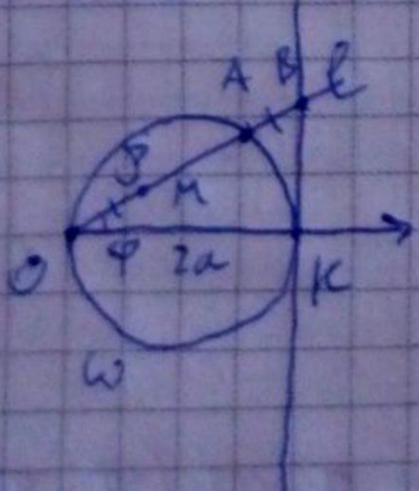
Це дозволяє зрозуміти вигляд кривої:

(лемніската Бернуллі).



y = x
y
φ ∈ [3π/4, 5π/4]
M
ρ
φ ∈ [−π/4, π/4]
φ
x
−c√2
F1
c
c
F2
c√2
y = −x

328. ω - коло радіуса a, OK - його діаметр, l - дотична до ω у K. Навколо O обертається промінь, що перетинає ω і l у точках A і B відп., на ньому відкладається OM = = AB. Знайти рівняння ГМТ M у полярних коорд. з полюсом O і віссю OK та у відп. декартових.



За 309, рівн. l: $\rho = \dfrac{2a}{\cos\varphi}$

За 310, рівн. ω: $\rho = 2a\cos\varphi$.

Тому для $M(\rho, \varphi)$ маємо $\rho = OM = AB = OB - OA =$
$= \dfrac{2a}{\cos\varphi} - 2a\cos\varphi = \dfrac{2a}{\cos\varphi}(1-\cos^2\varphi) = \dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$. Тут

$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.  (циссоїда Діоклеса).

Перепишемо у декартових $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\rho\cos\varphi = 2a\sin^2\varphi$$

$$\rho^2 \cdot \rho\cos\varphi = 2a(\rho\sin\varphi)^2$$

$$(x^2+y^2)x = 2ay^2.$$