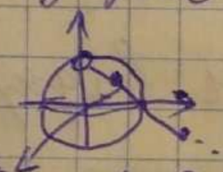
$\forall$ атлас – 0-гл. і $\forall$ два еквівалентні.

<u>Ex. 1.</u> $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний ∞-гл., $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ задає стандартну гладку стр.

<u>2.</u> S^n – n-вимірний ∞-гл.: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, стандартна гл. стр. задається атласом з 2 карт (стереогр. проекції)



<u>3.</u> M, N – k-гладкі многовиди $\Rightarrow$ $M \times N$ – k-гл. многовид (<u>Впр.</u>) Наприклад, n-вимірний тор $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n}$ – ∞-гладкий (і взагалі $\dim M \times N = \dim M + \dim N$),

<u>4.</u> M – n-вимірний k-гладкий, $U \subset M$ – відкрита $\Rightarrow$ U – n-вимірний k-гладкий многовид (<u>Впр.</u>)

<u>5.</u> $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (n-вимірний дійсний проективний простір) – простір прямих, що проходять через 0.

$\mathbb{RP}^n = \{(x^1 : \dots : x^{n+1})\}$, де $(x^1 : \dots : x^{n+1}) = [(x^1, \dots, x^{n+1})]$.

$(x^1 : \dots : x^{n+1}) = (\lambda x^1 : \dots : \lambda x^{n+1})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Або: $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$:  – простір пар діаметрально протилежних точок S^n.

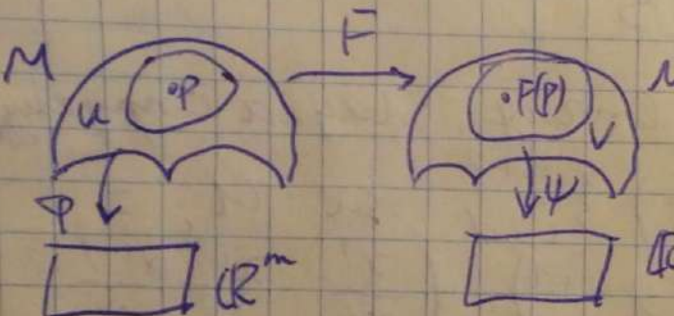
Це n-вимірний C^∞-гл. многовид, станд. гладка структура задається атласом $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$, де $U_i = \{(x^1 : \dots : x^{n+1}) \mid x^i \neq 0\}$, $\varphi_i(x^1 : \dots : x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$.

(комплексний проективний простір)

Впр. Перевірити, що це C^∞-гл. атлас. Що таке $\mathbb{CP}^n$? Чи є воно гл. многовидом? Якої вимірності?

def. Нехай M, N – k-гл. многовиди. Неперервне $F: M \to N$ наз. k-гладким, якщо $\forall p \in M$ і $\forall$ карт (U, φ) і (V, ψ) із якихось атласів гладких структур M і N відповідно таких, що $p \in U$, $F(p) \in V$ відображення $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ – k-гладке.

Rem. $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ наз. локальним заданням F у відп. парі карт (у відп. локальних координатах). Це відображення підмножин $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$, де $m = \dim M$, $n = \dim N$



(Впр. Яких підмножин?)

Якщо $(x^1, \dots, x^m)$, $(y^1, \dots, y^n)$ - лок. коорд., що відповідають (U, φ) та (V, ψ), то його можна записати у вигляді:

$$y^1 = F^1(x^1, \dots, x^m)$$
$$-$$
$$y^n = F^n(x^1, \dots, x^m)$$

Rem. В силу означення гладкої структури, гладкість достатньо перевірити лише для однієї пари карт (U, φ), (V, ψ) в околі точки $p \in M$ (Впр.)

Множина k-гл. відображень $M \to N$ позначається $C^k(M, N)$. Очевидно,

$C^k(M,N) \subset C^{k-1}(M,N) \subset \ldots \subset C^0(M,N) = C(M,N)$.

Крім того, $F \in C^k(M,N)$, $G \in C^k(L,M) \mapsto F \circ G \in C^k(L,N)$ (Впр.)

Ex. 1. k-гладкі криві $\gamma \in C^k((a,b), M)$, де $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

2. k-гладкі функції $f \in C^k(M) := C^k(M, \mathbb{R})$.

3. k-дифеоморфізми:

def $F: M \to N$ наз. k-дифеоморфізмом, якщо F-біє, $F \in C^k(M,N)$, $F^{-1} \in C^k(N,M)$. Якщо існує такий диф-зм, M і N наз. k-дифеоморфними ($M \cong N$)

Впр. Це відношення еквівалентності.

Впр. $\forall$ карти (U, φ) (з атласу k-гл. стр. M) $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ — k-дифео-зм

Rem. Зокрема, F — дифеоморфізм $\Rightarrow$ F — гомеоморфізм $\Rightarrow$ $\dim M = \dim N$.

Впр. Якщо $[A]$ і $[B]$ — k-гл. стр. на M, то $id_M: (M,[A]) \to (M,[B])$ — k-дифеоморфізм $\Leftrightarrow$ $[A] = [B]$.

Rem. Якщо розглядати не id_M, а якесь довільне $F: M \to M$ отримаємо означення еквівалентності гладких структур на M.

Дотичний простір і диференціал

Нехай M - k-гладкий многовид, $k \geqslant 1$, $n = \dim M$.

__def__ Дотичним вектором M в $p \in M$ будемо називати відображення

$$v : \left\{\begin{array}{l}\text{карти } (U,\varphi) \text{ гладкої структури } M \\ \text{такі, що } p \in U\end{array}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

таке, що якщо $v((U,\varphi)) = (v^1, \ldots, v^n)$, а $v((\tilde{U},\tilde{\varphi})) = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^n)$, то $\forall\ i = \overline{1,n}$

$$\tilde{v}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p)\, v^j \qquad (*)$$

далі не пишемо

де $(x^1, \ldots, x^n)$, $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ - лок. коорд., що відп. (U,φ) і $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ відповідно, а $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial (\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p))$ - часткові похідні відображень переходу.

__Rem.__ Тобто $(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n) = (\tilde{x}^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \tilde{x}^n(x^1, \ldots, x^n))$

Rem. 3 (*) випливає що значення v достатньо задати в (при цьому значення в $\forall$ парі карт узгоджені за правилом (*) — Впр.) одній карті. Зокрема, якщо це значення $= 0$ в одній карті, воно $= 0$ і $\forall$ іншої (і в цьому випадку пишемо $v=0$)

def. Лінійні операції над дотичними векторами в p задаються наступним чином:

$$(v+w)((U,\varphi)) := v((U,\varphi)) + w((U,\varphi)),$$

$$(\lambda v)((U,\varphi)) := \lambda \cdot v((U,\varphi)),$$

де v, w - дот. вектори в p, $\lambda \in \mathbb{R}$, (U,φ) - карта з $p \in U$

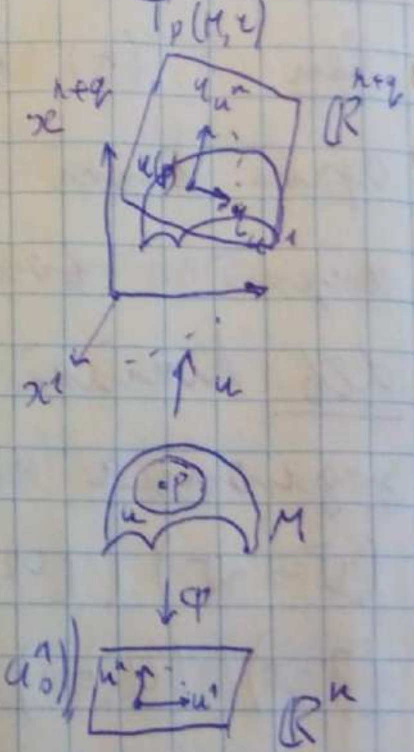
Rem. В силу лінійності (*) $v+w$ і λv - також дотичні вектори в p (коректно визначені).

Cor. Дотичні вектори в p утворюють векторний простір (підпростір у просторі всіх відображень з множини карт в околі p у $\mathbb{R}^n$)

def. Цей простір зветься дотичним простором (до) M у

p і позначається T_pM.

<u>Ex.</u> Нехай $\psi \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+q})$, $q\in\mathbb{Z}_+$, $p\in M$, (U,φ) - карта з $p\in U$ і лок. коорд. $(u^1,\dots,u^n)$.



Тоді $id\circ\psi\circ\varphi^{-1} = \psi\circ\varphi^{-1}$ - лок. задання ψ:
$(u^1,\dots,u^n)\mapsto (x^1(u^1,\dots,u^n),\dots,x^{n+q}(u^1,\dots,u^n))$.

Позначимо

$$\psi_{u^i}(p) := \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}(u_0^1,\dots,u_0^n),\dots,\frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(u_0^1,\dots,u_0^n)\right)$$

де $(u_0^1,\dots,u_0^n)=\varphi(p)$ - координати p ($\psi_{u^i}(p)\in\mathbb{R}^{n+q}$)

Будемо розглядати такі ψ, для яких $\forall\, p\in M$ і $\forall$ карти (U,φ) в околі p вектори $\{\psi_{u^1}(p),\dots,\psi_{u^n}(p)\}$ лінійно незалежні в $\mathbb{R}^{n+q}$. У цьому випадку ψ зветься регулярним (або занурення), а пара (M,ψ) - підмноговидом у $\mathbb{R}^{n+q}$ (пізніше ми дамо відповідні загальні означення). Наприклад, при $n=2, q=1$ ця умова еквівалентна $[r_{u^1}(p), r_{u^2}(p)] \neq 0$. У заг. випадку вона також еквівалентна умові $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(\varphi(p))\right)_{\substack{a=\overline{1,n+k}\\ i=\overline{1,n}}} = n$ (м-ця Якобі лок. задання r).

Нехай тепер $p \in U \cap \tilde{U}$, де $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – якась інша карта з лок. коорд. $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$. Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$:

$$r_{\tilde{u}^i}(p) = \frac{\partial(r\circ\tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial(r\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \left[\begin{matrix}\text{похідна}\\ \text{компо-}\\ \text{зиції}\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{\partial(r\circ\varphi^{-1})}{\partial u^j}(\varphi(p))\,\frac{\partial(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}^1_0, \dots, \tilde{u}^n_0)\cdot r_{u^j}(p),$$

де $(\tilde{u}^1_0, \dots, \tilde{u}^n_0) = \tilde{\varphi}(p)$ – нові координати p, і $\left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(p))\right)_{i,j=1}^{n}$ – м-ця Якобі відобр. переходу $\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ у $\tilde{\varphi}(p)$. Оскільки це відобр. – дифеоморфізм, ця м-ця невироджена. Тому система $\{r_{\tilde{u}^1}(p), \dots, r_{\tilde{u}^n}(p)\}$ також лін. незалежна (тобто умову регулярності достатньо перевірити в одній карті), і лінійна оболонка

$\mathrm{span}\{\varphi_{\tilde{u}^1}(P), .., \varphi_{\tilde{u}^n}(P)\} = \mathrm{span}\{\varphi_{u^1}(P), .., \varphi_{u^n}(P)\}$ – залежить лише від (M, φ) і P. Назвемо цей підпростір $\mathbb{R}^{n+q}$ $T_P(M,\varphi) := \mathrm{span}\{\varphi_{u^i}(P)\}_{i=1}^n$ дотичним підпростором (M, φ) у P. Відповідний афінний підпростір, що проходить через $\varphi(P)$, назвемо аф. дотичним підпростором (M, φ) у P. Тоді $\{\varphi_{u^i}(P)\}_{i=1}^n$ – його базис.

Для $M = (a,b) \subset \mathbb{R}$ і кривої $\varphi = \gamma \in C^k((a,b), \mathbb{R}^{n+q})$
$\varphi_t(t_0) = \gamma'(t_0) = ((\gamma^1)'(t_0), .., (\gamma^{n+q})'(t_0))$ – дотичний вектор,
і умова регулярності означає $\gamma'(t_0) \neq 0 \ \forall t_0 \in (a,b)$.
Тоді $T_{t_0}((a,b), \gamma)$ – це пряма, натягнута на $\gamma'(t_0)$,
а відп. аф. підпростір – дотична до γ у $\gamma(t_0)$.

Зауважимо, що $\varphi_{u^i}(P)$ – це дотичний вектор до кривої $t \mapsto (u_0^1, .., \underset{i}{t}, .., u_0^n) \xmapsto{\varphi\circ\phi^{-1}} (x^1(u_0^1, .., t, .., u_0^n), .., x^{n+q}(u_0^1, .., t, .., u_0^n))$
(i-тої координатної лінії (M, φ) у відп. лок. коорд.)

у $t_0 = u_0^i$. Нехай тепер $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – крива в M. Тоді $\psi\circ\gamma \in C^k((a,b), \mathbb{R}^{n+q})$ (як композиція гладких) – гл. крива в $\mathbb{R}^{n+q}$. Нехай $\gamma(t_0) = p$. Тоді лок. задання γ: $(\varphi\circ\gamma)(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ (воно визначене на $\gamma^{-1}(U) \ni t_0$). Для $t \in \gamma^{-1}(U)$ $(\psi\circ\gamma)(t) = (\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma)(t) =$

$= (x^1(\gamma^1(t),\ldots,\gamma^n(t)),\ldots, x^{n+q}(\gamma^1(t),\ldots,\gamma^n(t)))$, тому

$$(\psi\circ\gamma)'(t_0) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}(\gamma^1(t_0),\ldots,\gamma^n(t_0))(\gamma^i)'(t_0), \ldots, \frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(\gamma^1(t_0),\ldots,\gamma^n(t_0))(\gamma^i)'(t_0)\right) =$$

$$= (\gamma^i)'(t_0)\,\psi_{u^i}(p) \in T_p(M,\psi)$$

<u>Вп.</u> Перевірити, що вірне і обернене включення, тобто

$$T_p(M,\psi) = \{(\psi\circ\gamma)'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b),M) : \gamma(t_0)=p\}.$$

Отже, дотичний підпростір – це множина усіх дотичних векторів до кривих, що проходять через p у M. Відповідно, аф. дот. підпростір – це об'єднання дотичних до цих кривих.

Нехай $v \in T_p(M,\varphi)$. Розкладемо його по двох базисах:

$$v = v^i \varphi_{u^i}(p) = \tilde{v}^i \varphi_{\tilde{u}^i}(p) \ominus$$

З співвідношень вище:

$$\ominus\ \tilde{v}^i \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p)\, \varphi_{u^j}(p)$$

(тут повинно бути $\tilde{\varphi}(p)$, але ми спростили позначення)

Прирівнюючи коеф. при базисних векторах, отримаємо:

$$v^j = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p)\, \tilde{v}^i \qquad j = \overline{1,n}$$

У ан-но: $\tilde{v}^j = \dfrac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}(p)\, v^i$.

Ми отримали правило (*). Це мотивує наше означення і демонструє, що можна встановити лін. ізоморфізм між T_pM і $T_p(M,\varphi)$ для будь-якого регулярного $\varphi: M \to \mathbb{R}^{n+q}$: якщо (U,φ) - якась карта в околі p з лок. коорд. $(u^1,\dots,u^n)$, і $v((U,\varphi)) = (v^1,\dots,v^n)$, то $v \mapsto v^i \varphi_{u^i}(p)$.

Повернемося до загального випадку і розглянемо приклад дотичного вектора:

<u>Ex.</u> Нехай (U, φ) - карта в околі p з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$. Позначимо $\forall\, i = \overline{1,n}$ через $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ вектор, що ставить у відповідність карті (U, φ) набір $(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (як ми зауважили, значення у будь-якій іншій карті знаходиться тоді зі допоміжного $(*)$).

<u>Rem</u> Якщо тепер $v \in T_pM$ і $v((U, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n) = v^1(1, \dots, 0) + \dots + v^n(0, \dots, 1)$, то $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. У якщо $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$, то, розглянувши значення цього вектора в (U, φ), отримаємо $v^1 = \dots = v^n = 0$. Тобто $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ - повна і лін. незалежна в T_pM.

<u>Cor.</u> $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ - базис T_pM. Зокрема, $\dim T_pM = n$.

Rem. У $T_p(M,\mathcal{U})$ вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ відповідає $\varphi_{u^i}(p)$.

def Похідною функції $f \in C^\infty(M)$ у напрямку вектора $v \in T_pM$ (у точці p) зветься

$$v(f) := v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in \mathbb{R},$$

де $(x^1, \dots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U,φ), $p \in U$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (як ми бачили, це $\Leftrightarrow v((U,\varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$),

і $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$ – спрощене позначення.

Рм. Це означення коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – інша карта з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ і $v = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$. Тоді

$$\tilde{v}^i \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = [(*)] = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = \left[\begin{matrix}\text{розписуємо}\\ \text{позначення}\end{matrix}\right] =$$

$$= v^j \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \left[\begin{matrix}\text{диф.}\\ \text{композиції}\end{matrix}\right] =$$

$$= v^j \frac{\partial (f \circ \cancel{\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \quad \triangle$$

Rem. Зокрема, $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \delta^j_i \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

Rem. $\forall v \in T_pM$ визначає відображення $C^k(M) \to \mathbb{R}$: $f \mapsto v(f)$, що має наступні властивості:

1. Лінійність: $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$;
2. Правило Лейбніца: $v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$;

$\forall f, g \in C^k(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Це випливає з def. і власт. частк. похідних.

Можна показати, що між простором таких відображень і T_pM ця відповідність встановлює природній ізоморфізм (тому ще говорять, що дотичний вектор — це диференціювання).

Ex. Якщо $M = \mathbb{R}^n$ або $M = U$ - відкрита підмножина $\mathbb{R}^n$, то $\forall p \in M$ у околі p існують глобальні координати $(x^1, \ldots, x^n)$ простору і відп. базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ T_pM. Тоді ототожнимо T_pM з $\mathbb{R}^n$: $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \leftrightarrow (v^1, \ldots, v^n)$.

def. Нехай $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – гладка крива в M, $t_0 \in (a,b)$: $\gamma(t_0) = p$. Тоді дотичним вектором γ в t_0 зветься

$$\gamma'(t_0) := (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M,$$

де $(x^1, \dots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U, φ), $p \in U$, $(\gamma^1, \dots, \gamma^n) := \varphi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ – лок. задання γ

якщо $\gamma'(t_0) \neq 0$, γ наз. регулярною в t_0 (і регулярною, якщо вона рег. $\forall t_0$)

Рч. Це озн. коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde U, \tilde\varphi)$ – інша карта в околі p з лок. коорд. $(\tilde x^1, \dots, \tilde x^n)$, і $(\tilde\gamma^1, \dots, \tilde\gamma^n) := \tilde\varphi \circ \gamma = \tilde\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$. Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$(\tilde\gamma^i)'(t_0) = \frac{\partial (\tilde\varphi \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j} (\varphi(\underbrace{\gamma(t_0)}_{p})) ((\varphi \circ \gamma)^j)'(t_0) = \frac{\partial \tilde x^i}{\partial x^j}(p) (\gamma^j)'(t_0)$$

тобто $\gamma'(t_0) : (U, \varphi) \mapsto ((\gamma^1)'(t_0), \dots, (\gamma^n)'(t_0))$ задовольняє $(*)$ і визначає елемент $T_p M$ з розкладенням по $\frac{\partial}{\partial x^i}$ з def. ◁

Rem. Для $f \in C^k(M)$ (і довільних лок. коорд. в околі $\gamma(t_0)=p$):

$$\gamma'(t_0)(f) = (\gamma^i)'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t_0)) = [\text{похідна композиції}] =$$

$$= \left((f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma)\right)'(t_0) = (f\circ\gamma)'(t_0) \quad (\text{тут } f\circ\gamma : (a,b)\to\mathbb{R}).$$

Pr. $T_pM = \{\gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M) : \gamma(t_0) = p\}$.

Rem. Пор. з описом $T_p(M,\psi)$ вище: вектору $\gamma'(t_0)\in T_pM$ відповідає $(\psi\circ\gamma)'(t_0) \in T_p(M,\psi)$.

▷ Тобто треба довести, що $\forall\, v \in T_pM$ має такий вигляд. Дійсно, нехай (U,φ) - карта в околі p з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ і $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Покладемо

$$\gamma(t) := \varphi^{-1}(x_0^1 + v^1 t, \dots, x_0^n + v^n t), \quad \boxed{\gamma \in C^k(\mathbb{R}, M)}$$

де $(x_0^1,\dots,x_0^n) = \varphi(p)$. Тоді $\gamma(0) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p$, і $\gamma'(0) = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} = v$ за означенням ($\gamma^i(t) = x_0^i + v^i t$). ◁

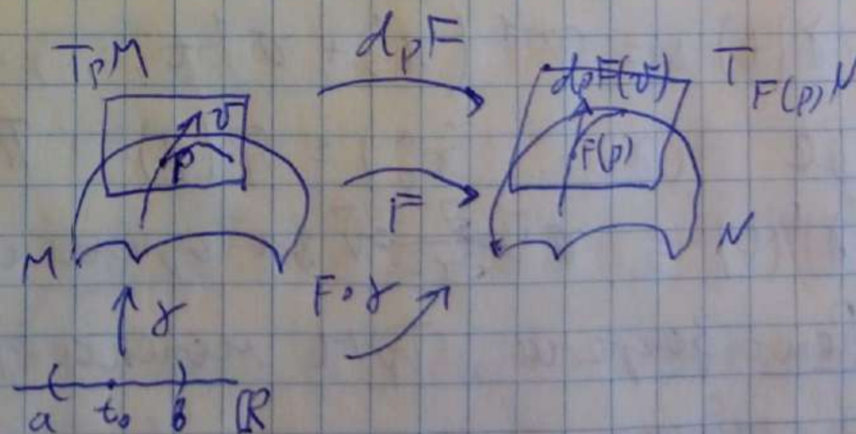
Rem. Зокрема, T_pM можна природнім чином ототожнити з множиною класів еквівалентності гладких

кривах, що проходять через p: ми вважаємо $\gamma \sim \mu$, якщо $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$ і $\forall f \in C^k(M)$
$(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$.

Тобто є 3 способи означення дотичного вектору: через лок. координати, через диференціювання і через криві.

<u>def.</u> Нехай M, N – k-гладкі, $F \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$. Для $p \in M$ диференціал F у p $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ визначається наступним чином:

$\forall v \in T_pM$ нехай $v = \gamma'(t_0)$, де $\gamma \in C^k((a,b), M)$ з $\gamma(t_0) = p$.



Тоді

$$d_pF(v) := (F \circ \gamma)'(t_0)$$

<u>Rem.</u> γ існує в силу попер. <u>Рч.</u>

Rem. Нехай (U, φ) і (V, ψ) – карти з $p \in U$, $F(p) \in V$ (загалом, $p \in U \cap F^{-1}(V) \neq \varnothing$) з лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^m)$ і $(y^1, \ldots, y^n)$ відповідно, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = (F^1, \ldots, F^n)$ – лок. задання F. Нехай $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. За умовою тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$ $v^i = (\gamma^i)'(t_0)$, де $(\gamma^1, \ldots, \gamma^m) = \varphi \circ \gamma$ – лок. задання γ. Тоді лок. задання $F \circ \gamma$: $\psi \circ F \circ \gamma = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$, тому

$$d_pF(v) = (F \circ \gamma)'(t_0) = ((F \circ \gamma)^a)'(t_0) \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) \cdot (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial y^a} =$$

$$= \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\, v^i \frac{\partial}{\partial y^a},$$ де

$$\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^a}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$ і змінюється від 1 до m, а a – від 1 до n. Помітно, що цей вираз не залежить від γ, а оригінальне def. – від координат. ~~Тому~~ Крім того, він лінійний по v^i. Тому:

Сл. $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ коректно визначене, лінійне і у базисах $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ і $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ цих просторів має матрицю $\left(\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\right)_{\substack{a=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}}$ (м-ця Якобі лок. задання F).

Rem. Пор. з означенням диференціала відобр. між множинами $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ (при цьому для відкритої $U \subset \mathbb{R}^m$ $T_pU \leftrightarrow \mathbb{R}^m$).

Пч. (правило диференціювання композиції, ланцюгове правило)
Для $F \in C^k(M,N)$, $G \in C^k(L,M)$, $\forall p \in L$

$$d_p(F\circ G) = d_{G(p)}F \circ d_pG.$$

▷ $\forall v \in T_pL$: $v = \gamma'(t_0)$, $\gamma \in C^k((a,b),L)$, $\gamma(t_0)=p$.

$$(d_p(F\circ G))(v) = ((F\circ G)\circ\gamma)'(t_0) = (F\circ(G\circ\gamma))'(t_0) =$$
$$= (d_{(G\circ\gamma)(t_0)}F)((G\circ\gamma)'(t_0)) = (d_{G(p)}F)(d_pG(v))$$ △

Впр. Як виглядає d_pF у термінах диференціювань? Тобто для $v \in T_pM$: $f \in C^k(N)$ $d_pF(v)(f) = ?$

Ex. 1. Для кривої $\gamma \in C^k((a,b), M)$ і $t_0 \in (a,b)$:

$$d_{t_0}\gamma : \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}}}{T_{t_0}(a,b)} \to T_{\gamma(t_0)} M$$

Перший з цих просторів ототожнюємо з $\mathbb{R}$ як вище:

$v \leftrightarrow v\frac{\partial}{\partial t} = \mu'(0)$, де $\mu(t) = t_0 + vt$, $\mu(0) = t_0$.

Тоді $d_{t_0}\gamma(v) = (\gamma \circ \mu)'(0) = v \cdot \gamma'(t_0)$.

2. Для ф-цій $f \in C^k(M)$, $p \in M$:

$$d_p f : T_p M \to \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}}}{T_{f(p)}\mathbb{R}}$$

Тепер другий простір ототожнюємо з $\mathbb{R}$. В силу лінійності тоді $d_p f \in T_pM^*$ - лін. функціонал на T_pM.

Локально для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ тоді $d_p f(v) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = v(f)$

3. Для к-ць $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$, $p \in M$ знову ототожнюємо:

$$d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^N \leftrightarrow \mathbb{R}^N$$

Для лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ в околі P тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$d_P\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}(P)\,\frac{\partial}{\partial x^a} = \varphi_{u^i}(P) \quad \text{(при ототожненні)}$$

у позначеннях, що ми вводили вище. Тут вже необов'язково $N \geq n$ і необов'язково виконується умова регулярності, але в будь-якому разі

$$d_P\varphi(T_PM) = \operatorname{span}\{\varphi_{u^i}(P)\}_{i=1}^{n}.$$

Якщо ж умова регулярності виконується, то справа буде $T_P(M,\varphi)$ і $d_P\varphi : T_PM \to T_P(M,\varphi)$ – лін. ізоморфізм, що встановлює описану вище відповідність. Зокрема, згідно з означенням, $\forall\, \gamma \in C^k((a,b), M)$ з $P = \gamma(t_0)$

$$d_P\varphi(\gamma'(t_0)) = (\varphi\circ\gamma)'(t_0).$$

Отже, всі $T_P(M,\varphi)$ для занурень $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+q}$ – це ізоморфні образи "абстрактного" дотичного простору T_PM.