Лекція 2. Регулярні криві. Дотична пряма. Довжина кривої.

1. *Параметрично* задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ представляється вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in (a,b)$$

Регулярність параметрично заданої кривої:

1) $\vec{f}(t) \in C^m, \quad m \geq 1$

2) $\dfrac{d\vec{f}}{dt} \neq \vec{0}$.

2. *Неявно* задана крива γ в $\mathbb{R}^2$ представляється рівнянням

$$\Phi(x^1, x^2) = 0 \quad .$$

Регулярність неявно заданої кривої:

1) $\Phi \in C^m, \quad m \geq 1$

2) $\nabla \Phi \neq 0$

3. *Явно* задана крива γ в $\mathbb{R}^2$ є графіком функції

$$x^2 = h(x^1)$$

Гладкість явно заданої кривої:

1) $h \in C^m, \quad m \geq 1$

Умова регулярності є достатньою умовою для того, щоб крива була «гарною» з точки зору топології:

1) якщо параметрично задана крива є регулярною, то вона є загальною (локально[1] елементарною) кривою;

2) якщо неявно задана крива є регулярною, то вона є простою (локально[2] елементарною) кривою.

[1] З точки зору інтервалу I, на якому визначена крива
[2] З точки зору обхопної площини $\mathbb{R}^2$

2.0. Параметрично задана крива: заміна параметру

Нехай γ –параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \ \ t \in I.$$

Розглянемо неперервну функцію

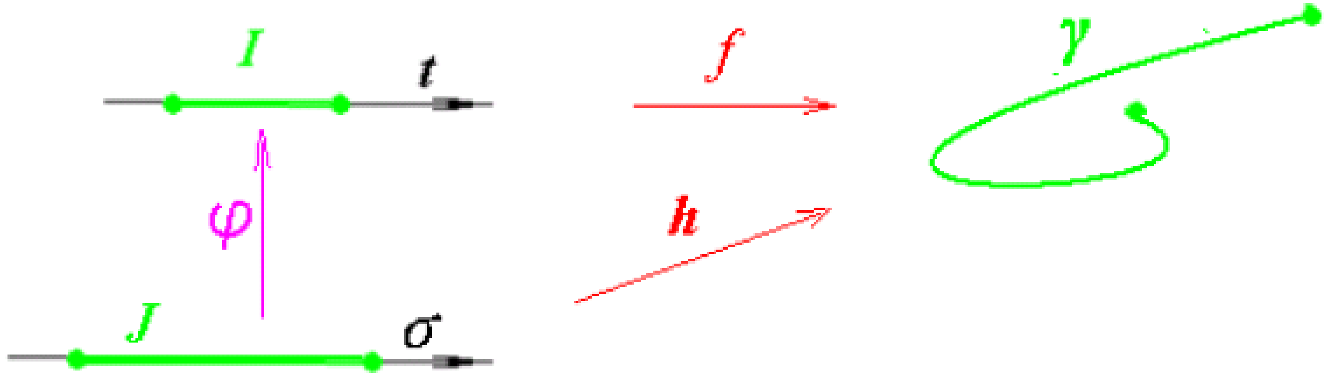
$$t = \varphi\,(\sigma), \quad \sigma \in J,$$

множиною значень якої є інтервал I.

Тоді складна вектор-функція

$$\vec{x} = \vec{f}\big(\varphi(\sigma)\big) = \vec{h}(\sigma), \ \ \sigma \in J\,,$$

буде задавати ту саму криву γ в $\mathbb{R}^n$.



Таким чином, для кривої γ маємо дві різні параметризації.

Функція $t = \varphi(\sigma)$, що описує перехід від параметра t до параметра σ, називається функцією *заміни параметру* на кривій γ.

Припустимо тепер, що крива γ є регулярною класу C^m, тобто

$$1)\ \vec{f}(t) \in C^m, \qquad 2)\ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0$$

Чи зберігається ця властивість *регулярності* при заміні параметру?

1) Припустимо, що функція заміни $t=\varphi(\sigma)$ є гладкою класу C^m. Тоді вектор-функція $\vec{h}(\sigma) = \vec{f}\big(\varphi(\sigma)\big)$ теж буде гладкою класу C^m, як і вектор-функція $\vec{f}(t)$.

2) Обчислимо похідну вектор-функції $\vec{h}(\sigma)$ як складної вектор-функції:

$$\frac{d\vec{h}}{d\sigma} = \frac{d\vec{f}}{dt}\frac{d\varphi}{d\sigma}.$$

Як наслідок, $\frac{d\vec{h}}{d\sigma} \neq 0$ тоді, і тільки тоді, коли $\frac{d\varphi}{d\sigma} \neq 0$.

Таким чином, заміна параметру $t=\varphi(\sigma)$ зберігає регулярність кривої γ, якщо функція $t=\varphi(\sigma)$ є

1) гладкою відповідного класу C^m,

2) строго монотонною.

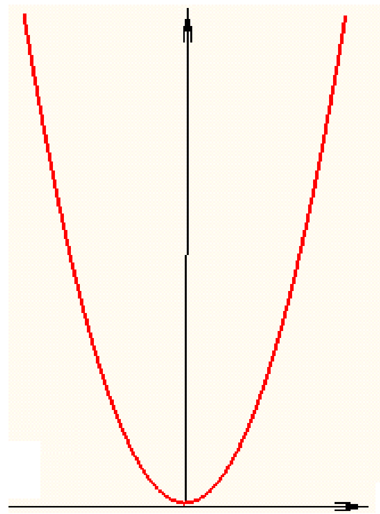
Описаний перехід від параметра t до параметра σ , що зберігає регулярність параметрично заданої кривої γ, називається *регулярною заміною параметра* на кривій γ.

Наслідок. Кожна регулярна параметрично задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ допускає безліч різноманітних регулярних параметризацій.

Приклад 1.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

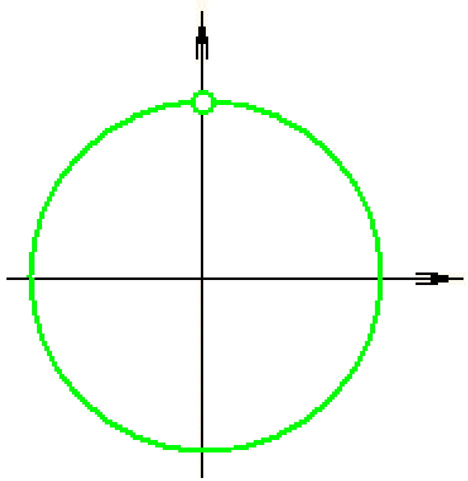
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \sigma^3 \\ \sigma^6 \end{pmatrix}, \quad \sigma \in (-\infty, \infty)$$



Приклад 2.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\sigma}{\sigma^2 + 1} \\ \dfrac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad \sigma \in (-\infty, \infty)$$



2.1. Дотична пряма

Нехай γ –параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \quad t \in I.$$

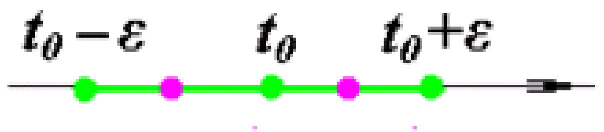
Візьмемо довільну точку P на кривій γ, що відповідає значенню параметра $t=t_0$.

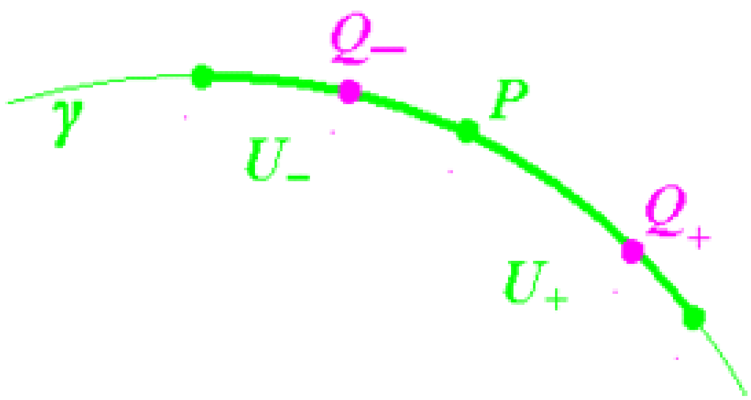
Визначимо лівий U_- і правий U_+ півоколи точки P на кривій γ наступним чином:

$$U_- = \{ f(t) \subset \gamma \mid t_0 - \varepsilon < t \le t_0 \}, U_+ = \{ f(t) \subset \gamma \mid t_0 \le t < t_0 + \varepsilon \}.$$

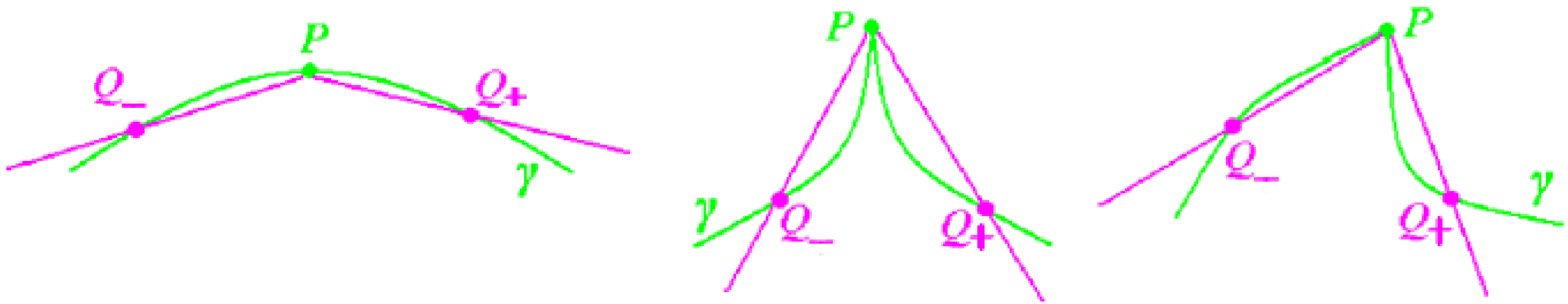
Позначимо Q_- точку з U_- , що відповідає значенню t з $(t_0 - \varepsilon, t_0)$.

Позначимо Q_+ точку з U_+ , що відповідає значенню t з $(t_0 , t_0 + \varepsilon)$.





Лівою (правою) січною кривої γ в точці P називається промінь PQ_- (відповідно PQ_+), проведений через точку $Q_- \in U_-$ (відповідно, через точку $Q_+ \in U_+$).



Якщо існує границя

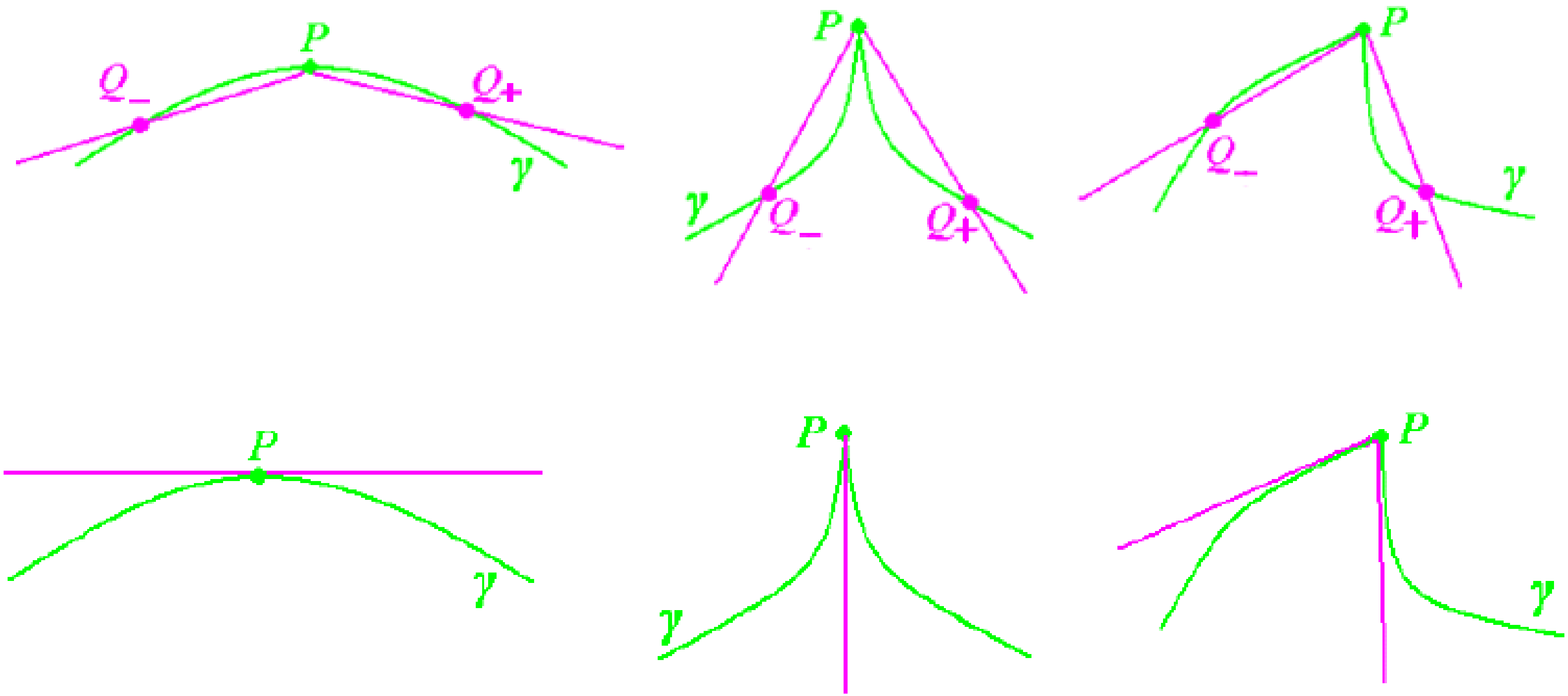
$$\Lambda_- = \lim PQ_-$$

при $t \to t_0 - 0$, то граничний промінь Λ_- називається *лівою півдотичною* кривої γ в точці P.

Аналогічно, якщо існує границя

$$\Lambda_+ = \lim PQ_+$$

при $t \to t_0 + 0$, то граничний промінь Λ_+ називається *правою півдотичною* кривої γ в точці P.



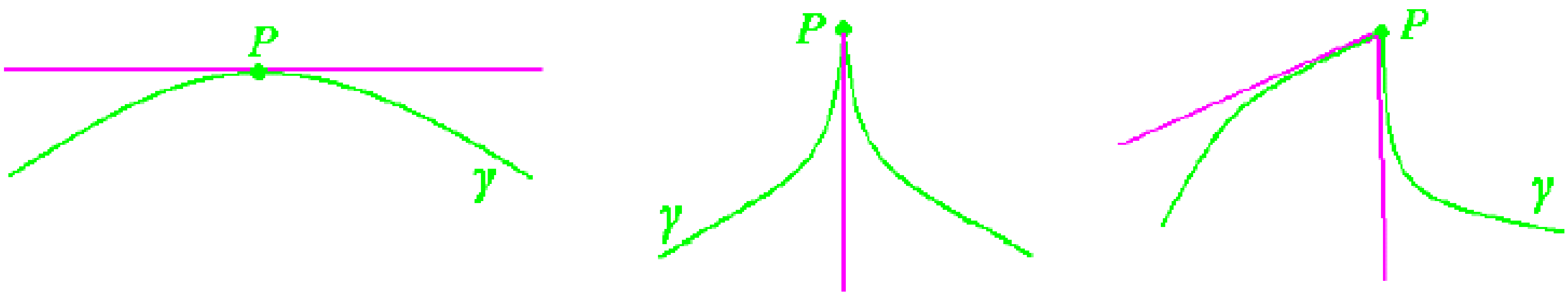
P
Q_
Q+
γ
P
γ
Q_
Q+
P
Q_
γ
Q+
P
γ
P
γ
P
γ

Визначення.

1. Якщо об'єднання променів Λ_- та Λ_+ утворює пряму, то ця пряма Λ називається *дотичною прямою* кривої γ в точці P.

2. Якщо $\Lambda_- = \Lambda_+$, то точка P називається *точкою повернення* на кривій γ, а відповідний промінь $\Lambda = \Lambda_- = \Lambda_+$ називається *півдотичною* кривої γ в точці P.

3. В інших випадках точка P називається *кутовою точкою* кривої γ.



Твердження. *Нехай параметрично задана крива* γ *в* $\mathbb{R}^n$ *з радіус-вектором* $\vec{x} = \vec{f}(t)$, $t \in I$, *є регулярною класу гладкості* C^1.

Тоді в будь-якій точці $P(t=t_0)$ *кривої* γ *існує і є єдиною дотична пряма. Ця пряма проходить через точку* P, *а її напрямним вектором є* $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Доведення. Будемо використовувати визначення дотичної прямої, описане вище.

Точкам Q_- лівого півоколу U_- відповідають значення параметра t виду

$$t = t_0 + \Delta t_-, \quad \Delta t_- < 0,$$

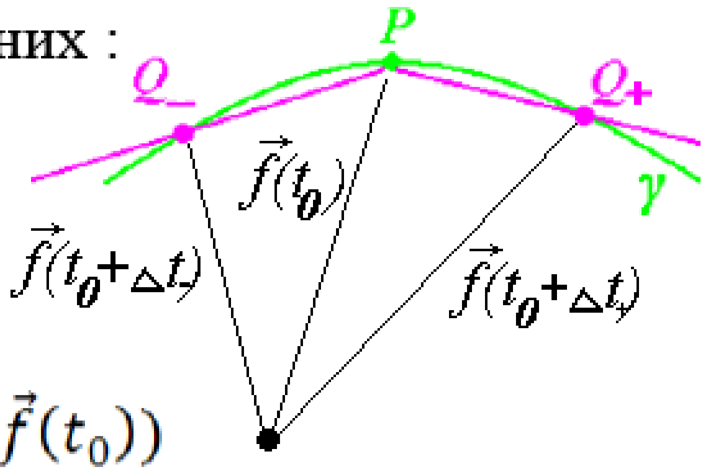
а точкам Q_+ правого півоколу U_+ значення параметра t виду

$$t = t_0 + \Delta t_+, \quad \Delta t_+ > 0.$$

Розглянемо напрямні вектори лівої та правої січних :

$$\overrightarrow{PQ_-} = \vec{f}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{f}(t_0) \ ,$$

$$\overrightarrow{PQ_+} = \vec{f}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{f}(t_0) \ .$$



Вектори

$$\overrightarrow{PQ_-} = \vec{f}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{f}(t_0) \text{ та } \frac{1}{\Delta t_-} \cdot (\vec{f}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{f}(t_0))$$

колінеарні і протилежно направлені, оскільки $\Delta t_- < 0$.

Вектори

$$\overrightarrow{PQ_+} = \vec{f}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{f}(t_0) \text{ та } \frac{1}{\Delta t_+} \cdot (\vec{f}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{f}(t_0))$$

колінеарні і однаково направлені, оскільки $\Delta t_+ > 0$.

Оскільки вектор-функція $f(t)$ є гладкою класу C^1, то

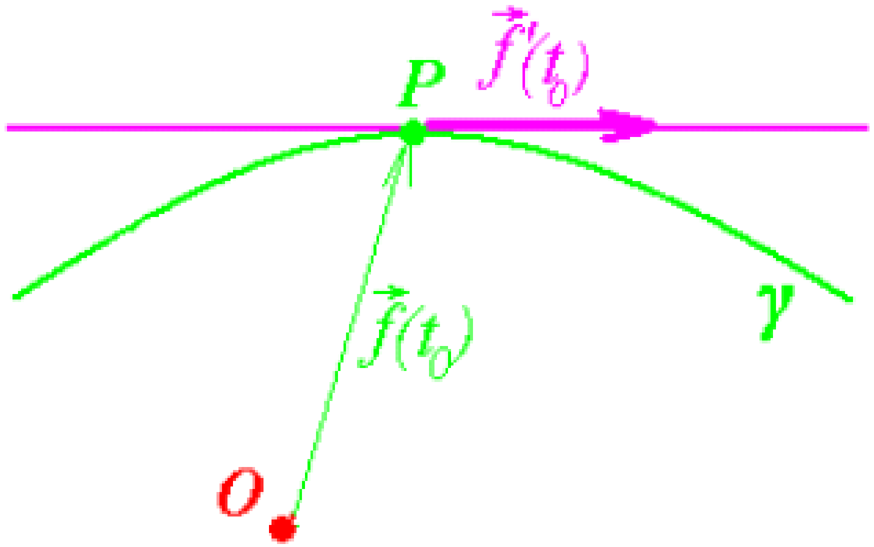
$$\lim_{\Delta t_- \to 0} \frac{1}{\Delta t_-} \cdot \left(\vec{f}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{f}(t_0) \right) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$$

$$\lim_{\Delta t_+ \to 0} \frac{1}{\Delta t_+} \cdot \left(\vec{f}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{f}(t_0) \right) = \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$$

Як наслідок, граничне положення променя PQ_- при $Q_- \to P$ є протилежно направленим з ненульовим вектором $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Аналогічно, граничне положення променя PQ_+ при $Q_+ \to P$ є співнаправленим з ненульовим вектором $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$.

Значить, вони доповнюють один одного до повної прямої, що і є, за визначенням, дотичною прямою кривої γ в точці P. Ця пряма проходить через точку P, а вектор $\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$ є її напрямним вектором.



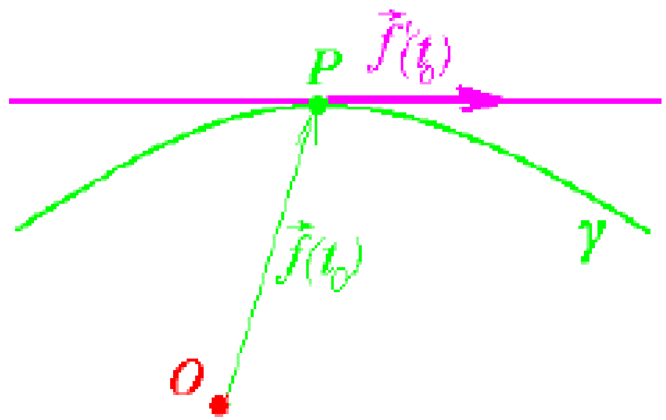
Наслідок. *Нехай γ – регулярна параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором $\vec{x}=\vec{f}(t)$, $t \in I$. Нехай P – точка на кривій γ, що відповідає значенню параметра $t=t_0$.*

Тоді векторне параметричне рівняння дотичної прямої до кривої γ в точці P має вигляд

$$\vec{x}=\vec{f}(t_0)+\lambda\cdot\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)\,, \qquad \lambda\in\mathbb{R};$$

канонічне рівняння дотичної прямої в точці P має вигляд

$$\frac{x^1-f^1(t_0)}{\dfrac{df^1}{dt}(t_0)}=\cdots=\frac{x^n-f^n(t_0)}{\dfrac{df^n}{dt}(t_0)}$$



Приклади.

n=2) Якщо регулярна крива γ в площині $\mathbb{R}^2$ задана параметрично у вигляді

$$x=f^1(t),$$
$$y=f^2(t),$$

то канонічне рівняння дотичної прямої до кривої γ в точці P має вигляд

$$\frac{x-f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)}=\frac{y-f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)}$$

n=3) Якщо регулярна крива γ в просторі $\mathbb{R}^3$ задана параметрично у вигляді

$$x=f^1(t),$$
$$y=f^2(t),$$
$$z=f^3(t),$$

то канонічне рівняння дотичної прямої до кривої γ в точці P має вигляд

$$\frac{x-f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)}=\frac{y-f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)}=\frac{z-f^3(t_0)}{\frac{df^3}{dt}(t_0)}$$

Зауваження 1. Дотична пряма – це "наближення першого порядку" для регулярної кривої.

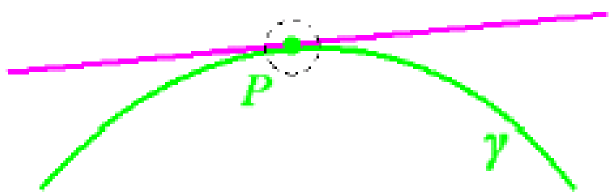
Якщо ми запишемо розклад в ряд Тейлора для радіус-вектора $\vec{x} = \vec{f}(t)$ параметрично заданої кривої γ в точці $P(t=t_0)$,

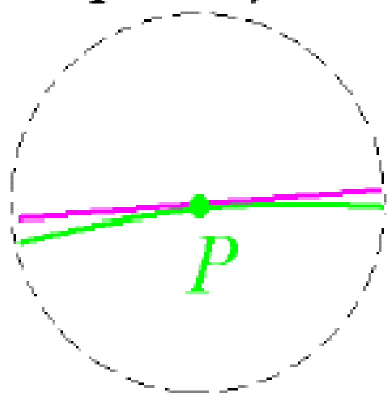
$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) + \ \dots ,$$

і залишимо лише лінійні члени,

$$\vec{x} = \vec{f}(t_0) + \frac{d\vec{f}}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0) ,$$

то отримаємо радіус-вектор дотичної прямої до кривої γ в точці $P(t=t_0)$





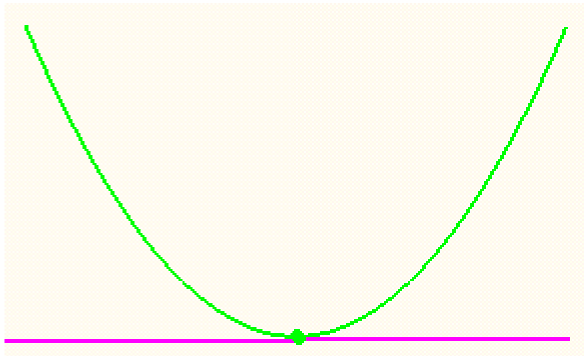
Зауваження 2. Якщо параметрично задана крива γ має ізольовану особливу точку P, то існування дотичної прямої кривої γ в точці P потребує додаткового аналізу.

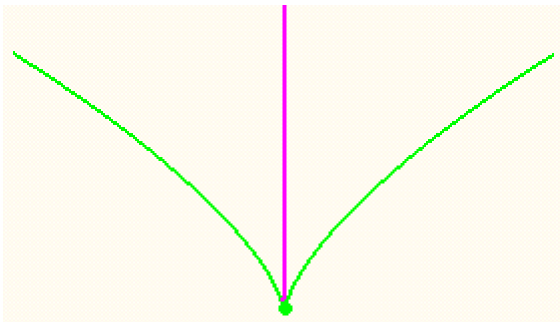
Приклади

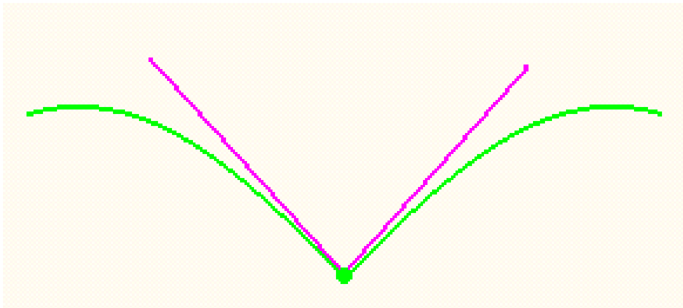
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ |\sin t| \end{pmatrix}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$







Зауваження 3. Проаналізуємо, як зміниться напрямний вектор дотичної прямої при регулярній заміні параметра на кривій γ.

Коли крива задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t) ,$$

то напрямним вектором дотичної прямої до кривої γ в точці $P(t=t_0)$ буде вектор

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t_0)$$

Коли ми зробимо заміну параметра

$$t = \varphi(\tilde{t}),$$

і запишемо радіус-вектор кривої в новій параметризації

$$\vec{x} = \vec{f}\left(\varphi(\tilde{t})\right) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t}) ,$$

то напрямним вектором дотичної прямої до кривої γ в точці $P(\tilde{t} = \tilde{t}_0)$ буде вектор

$$\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}_0)$$

Як зв'язані напрямні вектори в старій і новій параметрзації?

Для відповіді на це запитання, продиференціюємо

$$\vec{f}\left(\varphi(\tilde{t})\right) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t})$$

Маємо:

$$\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\tilde{t}}$$

Отже, при регулярній заміні параметра $t=\varphi(\tilde{t})$, $\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \neq 0$, на регулярній кривій γ напрямний вектор дотичної прямої або не змінює напрямку (якщо $\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} > 0$), або змінює напрямок на протилежний (якщо $\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} < 0$).

Сама ж дотична пряма є інваріантною – вона не змінюється при регулярних замінах параметрів на кривій.

2.2. Рівняння дотичної прямої до явно заданої кривої в $\mathbb{R}^2$

Нехай γ – явно задана крива в $\mathbb{R}^2$, тобто, графік функції

$$x^2 = h(x^1)\ ,\ x^1 \in (a, b),$$

що є гладкою класу C^1 (неперервно диференційованою).

Зафіксуємо точку P, що відповідає значенню $x^1 = x_0^1$.

Перейдемо до параметричного завдання кривої γ:

$$x^1 = t$$

$$x^2 = h(t)$$

Запишемо рівняння дотичної прямої до вже тепер параметрично заданої кривої γ в точці P $(t=x_0^1)$:

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^1 - x_0^1}{1} = \frac{x^2 - h(x_0^1)}{\frac{dh}{dx^1}(x_0^1)}$$

Якщо далі спростити рівняння

$$\frac{x^1 - x_0^1}{1} = \frac{x^2 - h(x_0^1)}{\frac{dh}{dx^1}(x_0^1)},$$

отримаємо добре відоме рівняння дотичної прямої до графіка функції:

$$x^2 = \frac{dh}{dx^1}(x_0^1) \cdot (x^1 - x_0^1) + h(x_0^1)$$

тобто

$$y = \frac{dh}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) + h(x_0)$$

Таким чином, *явно* задані криві в $\mathbb{R}^2$ є частковим випадком регулярних *параметрично* заданих кривих в $\mathbb{R}^2$, а добре відоме рівняння дотичної прямої до явно заданої кривої (графіка функції) є частковим випадком рівняння дотичної прямої до параметрично заданої кривої в $\mathbb{R}^2$.

2.3. Рівняння дотичної прямої до регулярної неявно заданої кривої в $\mathbb{R}^2$

Нехай γ – неявно задана крива в $\mathbb{R}^2$, утворена точками, чиї координати задовольняють рівнянню

$$\Phi(x^1, x^2) = 0$$

Нехай крива γ є регулярною класу гладкості C^1 , тобто, функція $\Phi(x^1, x^2)$ є неперервно диференційованою і її градієнт $\nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2})$ не є нульовим в жодній точці кривої γ.

Зафіксуємо довільну точку P кривої γ. Координати (x_0^1, x_0^2) цієї точки задовольняють $\Phi(x_0^1, x_0^2) = 0$.

Оскільки крива γ є регулярною, в досить малому околі точки P її можна задати явно, а потім і перейти до параметричного завдання:

$$x^1 = f^1(t)$$
$$x^2 = f^2(t)$$

При цьому функції $f^1(t)$, $f^2(t)$ задовольняють

$$\Phi(f^1(t), f^2(t)) \equiv 0$$

Продиференціюємо цю тотожність

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \cdot \frac{df^1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{df^2}{dt} = 0$$

Як наслідок, в точці P матимемо:

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)}$$

Запишемо рівняння дотичної прямої до вже тепер параметрично заданої кривої γ в точці P $(t=t_0)$:

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1}{dt}(t_0)} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2}{dt}(t_0)} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)}$$

Якщо далі спростити рівняння

$$\frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)},$$

отримаємо лінійне рівняння

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) \cdot (x^1 - x_0^1) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \cdot (x^2 - x_0^2) = 0$$

Це рівняння задає дотичну пряму в точці $P(x_0^1, x_0^2)$ до регулярної неявно заданої кривої γ .

При цьому градієнт $\nabla \Phi = (\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2})$ в точці $P(x_0^1, x_0^2)$ є вектором *нормалі* дотичної прямої.

Зауважимо, що якщо записати розкладення в ряд Тейлора для функції $\Phi(x^1, x^2)$ в точці $P(x_0^1, x_0^2)$, обмежившись членами першого порядку, то отримаємо як раз лінійну функцію, присутню в лівій частині рівняння дотичної прямої.

2.4. Довжина кривої. Натуральна параметризація.

Будемо розглядати простір $\mathbb{R}^n$ як *евклідів* простір:

скалярний добуток векторів $\vec{X} = (X^1, \dots, X^n)$ та $\vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^n)$ визначається формулою

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = X^1 Y^1 + \dots + X^n Y^n \quad ;$$

довжина вектора визначається формулою

$$|\vec{X}| = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle} = \sqrt{(X^1)^2 + \dots + (X^n)^2} \ .$$

Нехай γ – регулярна параметрично задана крива в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(t), \qquad t \in (a,b).$$

Визначення. *Довжиною* кривої γ називається величина

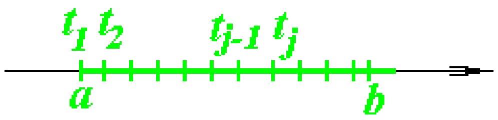
$$L = \int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt$$

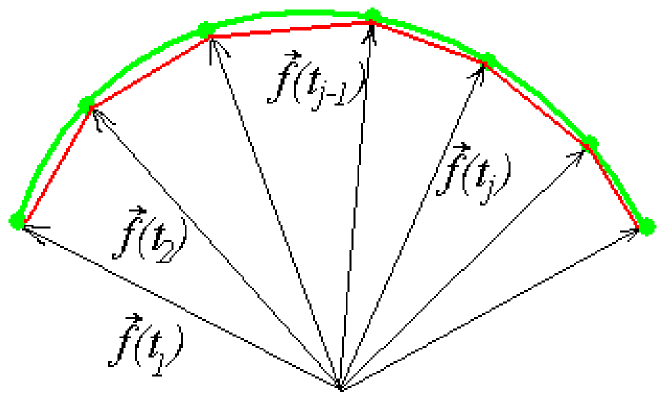
тобто,

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n}{dt}\right)^2}\, dt$$

Синтетичне визначення поняття довжини кривої за допомогою вписаних в криву ломаних та відповідного граничного переходу - дивись у підручнику *А.В. Погорелов, Лекции по дифференциальной геометрии.*

Ідея визначення довжини





$$\sum\left|\vec{f}(t_j)-\vec{f}(t_{j-1})\right| =$$

$$= \sum\sqrt{(f^1(t_j)-f^1(t_{j-1}))^2+\ldots+(f^n(t_j)-f^n(t_{j-1}))^2} =$$

$$= \sum\sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}(\hat{t}_j^1)\cdot\Delta t\right)^2+\ldots+\left(\frac{df^n}{dt}(\hat{t}_j^n)\cdot\Delta t\right)^2} =$$

$$= \sum\sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}(\hat{t}_j^1)\right)^2+\ldots+\left(\frac{df^n}{dt}(\hat{t}_j^n)\right)^2}\,\Delta t \;\rightarrow\; \int_a^b\sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}\right)^2+\ldots+\left(\frac{df^n}{dt}\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_a^b\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|dt$$

Твердження. *Визначення поняття довжини для регулярної параметрично заданої кривої є коректним: величина L не змінюється при регулярній заміні параметру на кривій.*

Доведення. Зробимо регулярну заміну параметру $t = \varphi(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, і запишемо радіус-вектор відносно нового параметру $\tilde{t}$:

$$\vec{x} = \vec{f}\left(\varphi(\tilde{t})\right) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{t})$$

Оскільки заміна параметру є регулярною, функція заміни $t = \varphi(\tilde{t})$ є або строго зростаючою ($\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} > 0$), або строго спадаючою ($\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} < 0$).

Якщо $t = \varphi(\tilde{t})$ зростає, маємо:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\vec{\tilde{f}}}{d\tilde{t}}\right| d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}\right| d\tilde{t} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| \cdot \frac{dt}{d\tilde{t}}\, d\tilde{t} = \int_{a}^{b} \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt$$

Якщо $t = \varphi(\sigma)$ спадає, маємо:

$$\int_{\tilde a}^{\tilde b} \left|\frac{d\vec{\tilde f}}{d\tilde t}\right| d\tilde t = \int_{\tilde a}^{\tilde b} \left|\frac{d\vec f}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tilde t}\right| d\tilde t = -\int_{\tilde a}^{\tilde b} \left|\frac{d\vec f}{dt}\right|\cdot\frac{dt}{d\tilde t}\, d\tilde t = -\int_{b}^{a} \left|\frac{d\vec f}{dt}\right| dt = \int_{a}^{b} \left|\frac{d\vec f}{dt}\right| dt$$

Отже, довжина кривої дійсно не змінюється при регулярній заміні параметра на кривій.

Приклад 1. Розглянемо параметрично задану криву γ в $I\!R^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = (1-t)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1).$$

Крива γ представляє собою відрізок прямої, що сполучає точки $A(a^1,a^2)$ і $B(b^1,b^2)$

Обчислимо довжину кривої γ. Маємо:

$$\vec{f}(t) = (1-t)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = -\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left| \frac{d\vec{f}}{dt} \right| dt = \int_0^1 \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}\, dt = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2} \Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}$$

Відповідь: $L(\gamma) = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2}$, це звичайна довжина відрізка прямої між двома точками

Приклад. Розглянемо параметрично задано криву γ в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t + c^1 \\ r \cdot \sin t + c^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in (a,b).$$

Крива γ – це дуга кола радіуса r з центром в точці $C(c^1,c^2)$.
Обчислюємо похідну заданої вектор-функції:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t + c^1 \\ r \cdot \sin t + c^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

Обчислюємо довжину похідної вектор-функції:

$$\left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = r$$

Обчислюємо довжину кривої:

$$L = \int_a^b \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| dt = \int_a^b r\, dt = r(b-a)$$