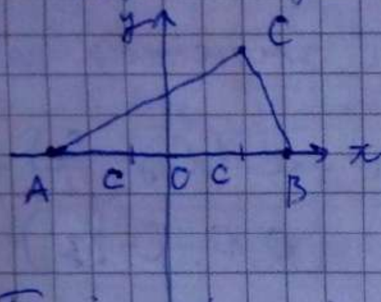
291 У площині: т. A, B: $AB = 2c > 0$. Знайти геометричне місце точок (ГМТ) C таких, що $CA^2 + CB^2 = 2a^2$, де $a > c$.

Побудуємо декартову систему координат зручним для нас чином:



O – середина AB, Ox збігається з AB.
(тоді $AO = OB = c$)

Тоді $A(-c, 0)$, $B(c, 0)$. Нехай $C(x, y)$. Умова:

$$CA^2 = (x-(-c))^2 + (y-0)^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$CB^2 = (x-c)^2 + (y-0)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$2a^2 = CA^2 + CB^2 = (x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = x^2 + \cancel{2xc} + c^2 + y^2 +$$

$$+ x^2 - \cancel{2xc} + c^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$$

$\boxed{\text{(бо перетворення рівносильні)}}$

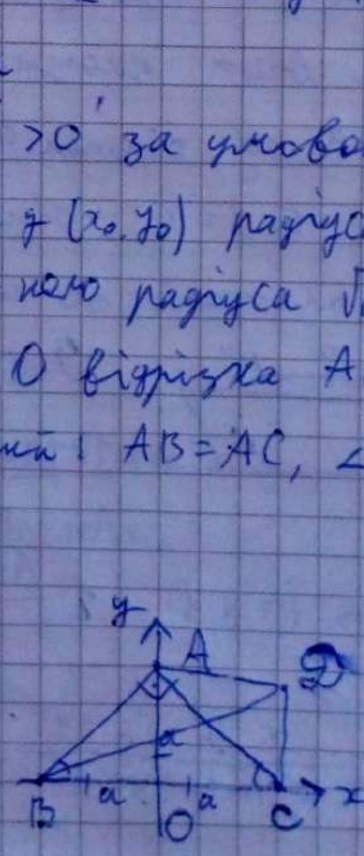
Отже, C належить до потрібного ГМТ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 = a^2$, тобто ГМТ задається рівнянням

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \quad (>0 \text{ за умовою})$$

Згадаємо, що рівняння кола з центром у (x_0, y_0) радіуса R – це $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Тому наше ГМТ – коло радіуса $\sqrt{a^2-c^2}$ з центром у $(0,0)$, тобто у середині O відрізка AB.

293 $\triangle ABC$ – рівнобедрений прямокутний: $AB = AC$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$.
Знайти ГМТ D таких, що

$$DB^2 + DC^2 = 2DA^2.$$



Знову будуємо декартову с.к.:
O – середина BC, Ox збігається з BC. Тоді A лежить на Oy, і

$OA = OB = OC = a > 0$ (бо кут A прямий). Отже, $A(0,a)$, $B(-a,0)$, $C(a,0)$. Нехай $D(x,y)$:

$DA^2 = x^2 + (y-a)^2$, $DB^2 = (x+a)^2 + y^2$, $DC^2 = (x-a)^2 + y^2$. Умова:

$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 2\left(x^2 + (y-a)^2\right)$$

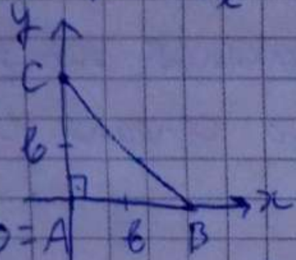
$$2\left(x^2 + a^2 + y^2\right) = 2\left(x^2 + y^2 - 2ay + a^2\right)$$

$$-4ay = 0$$

$$y = 0 \quad \text{(перетворення рівносильні)}$$

Тобто це Ox — пряма BC, що містить гіпотенузу тр-ка.

Або:



$O = A$, Ox і Oy збіг. з AB і AC відп.
Тр-к рівнобедрений $\Rightarrow AB = AC = b > 0$.
Тоді $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(0,b)$. Нехай $D(x,y)$:

$DA^2 = x^2 + y^2$, $DB^2 = (x-b)^2 + y^2$, $DC^2 = x^2 + (y-b)^2$. Умова:

$$(x-b)^2 + y^2 + x^2 + (y-b)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$2\left(x^2 + y^2 + b^2 - xb - yb\right) = 2(x^2 + y^2)$$

$$b^2 - xb - yb = 0$$

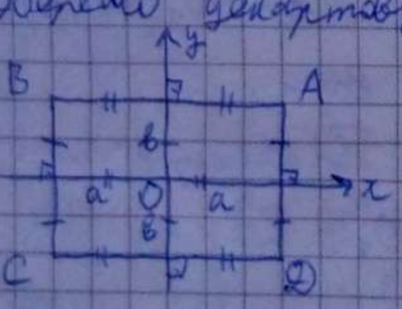
$b \neq 0$: $\quad x + y - b = 0$ (перетв. рівн.)

Це пряма BC знову ж.

197 $ABCD$ — прямокутник. Знайти ГМТ E таких, що

$$EA + EC = EB + ED$$

Оберемо декартову с.к.:



O — центр $ABCD$, Ox і Oy — його середні лінії. Нехай $A(a,b)$, $a, b > 0$. Тоді $B(-a,b)$, $C(-a,-b)$, $D(a,-b)$.

Нехай $E(x,y)$. Умова:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} = EA + EC = EB + ED = \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}$$

Піднесемо до квадрата:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (x+a)^2 + (y+b)^2 + 2\sqrt{\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)\left((x+a)^2 + (y+b)^2\right)} = (x+a)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + (y+b)^2 +$$

$+ 2\sqrt{((x+a)^2+(y-b)^2)((x-a)^2+(y+b)^2)}$.

Ще раз до квадрата:

$$(x^2+y^2+a^2+b^2-2ax-2by)(x^2+y^2+a^2+b^2+2ax+2by)=(x^2+y^2+a^2+b^2+2ax-2by)(x^2+y^2+a^2+b^2-2ax+2by)$$

$$(x^2+y^2+a^2+b^2)^2-(2ax+2by)^2=(x^2+y^2+a^2+b^2)^2-(2ax-2by)^2$$

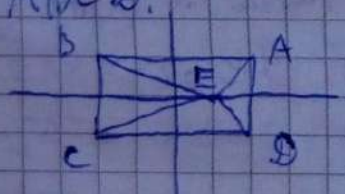
$$(ax+by)^2=(ax-by)^2.$$

$$(ax+by+ax-by)(ax+by-(ax-by))=0$$

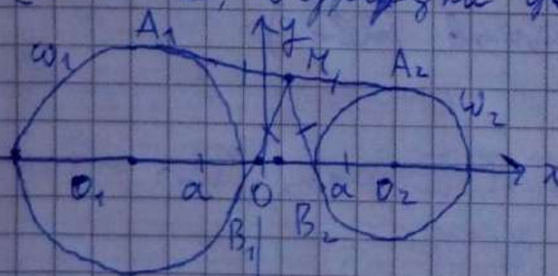
$$2ax\cdot 2by=0$$

$$xy=0.$$

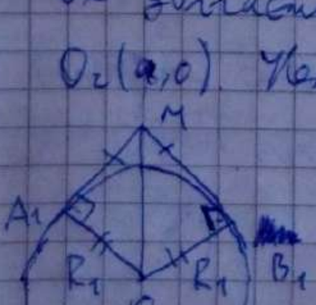
(усі перетв. рівносильні, бо до квадратів підносилися невід'ємні вирази). Це пара прямих Ox, Oy, тобто середні лінії $ABCD$.



300 ω_1, ω_2 - кола. Знайти ГМТ M таких, що дотичні (точніше, відрізки дотичних) з M до ω_1, ω_2 рівні.



Оберемо дек. с.к.: O - середина O_1O_2, де O_1, O_2 - центри ω_1, ω_2 відп., тобто $OO_1=OO_2=a>0$, Ox збігається з лінією центрів O_1O_2. Тоді $O_1(-a,0)$, $O_2(a,0)$. Нехай R_1, R_2 - радіуси ω_1, ω_2 відп.



$MA_1 \perp A_1O_1$, тому за Th. Піфагора

$MA_1^2=MB_1^2=MO_1^2-O_1A_1^2=MO_1^2-R_1^2$.

Ан-но, $MA_2^2=MB_2^2=MO_2^2-R_2^2$.

Отже, умова: $MO_1^2-R_1^2=MO_2^2-R_2^2$.

Нехай $M(x,y)$:

$$(x+a)^2+y^2-R_1^2=(x-a)^2+y^2-R_2^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - R_1^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - R_2^2$$

$$4ax = R_1^2 - R_2^2$$

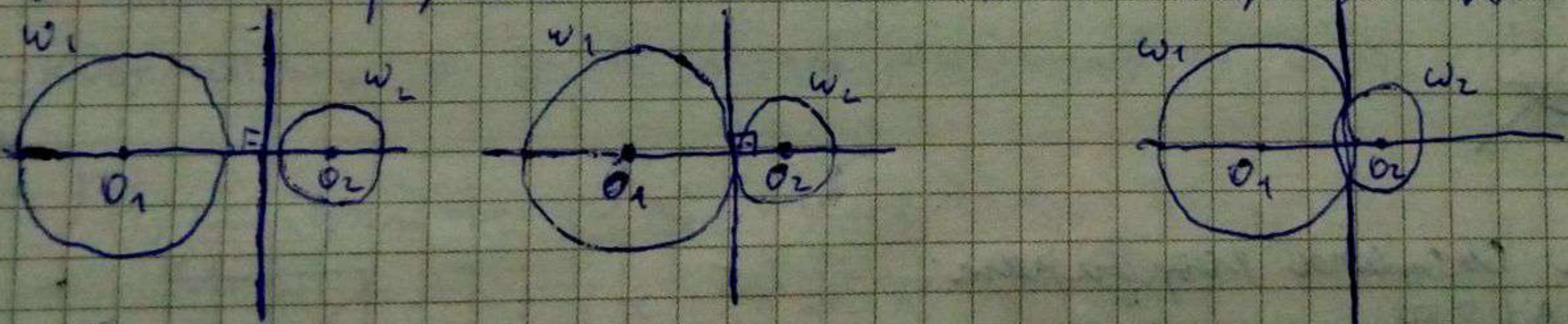
$$x = \frac{1}{4a}\left(R_1^2 - R_2^2\right)$$ (перетв. рівносильні)

Це пряма, що ортогональна лінії центрів $Ox = O_1O_2$.
(вона зветься фокальною віссю цих кіл)

Точки перетину кіл:

$$\begin{cases} (x+a)^2 + y^2 = R_1^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = R_2^2 \end{cases}$$

Віднімемо: $4ax = R_1^2 - R_2^2$. Тобто точки перетину належать фокальній осі. Варіанти розташування:



Кола не перет.

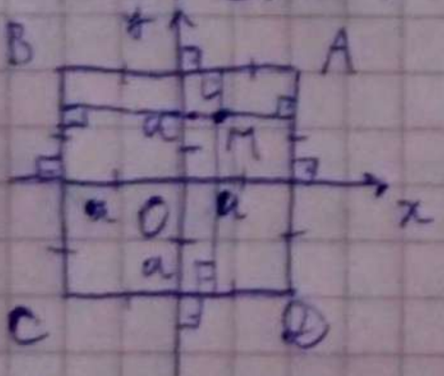
Кола дотикаються => спільна дотична

1. Кола перетинаються у 2 точках => пряма, що прох. через ці точки без точок, що лежать всередині кіл.

30[illegible]6 ABCD – квадрат. Знайти ГМТ M таких, що

$$d(M,AB)\cdot d(M,CD)=d(M,BC)\cdot d(M,AD).$$

Дек. с.к.:



Як у 197: O – центр квадрата, Ox і Oy – його середні лінії. Якщо $A(a,a)$, то $B(-a,a)$, $C(-a,-a)$, $D(a,-a)$. Тоді рівняння сторін (прямих, що їх містять):

AB: $y=a$, CD: $y=-a$, AD: $x=a$, BC: $x=-a$.

Нехай $M(x,y)$. Відстань до AB: $y-a=0$:

$$d(M,AB)=\frac{|y-a|}{\sqrt{0^2+1^2}}=|y-a|.$$

Ан-но, $d(M,CD)=|y+a|$, $d(M,AD)=|x-a|$, $d(M,BC)=|x+a|$. Знову:

$$|y-a||y+a|=|x-a||x+a|$$

$$|y^2-a^2| = |x^2-a^2|$$

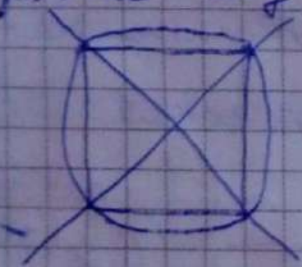
Підведемо до квадрата:

$$-(y^2-a^2)^2+(x^2-a^2)^2=0$$

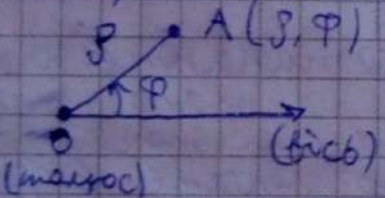
$$(x^2-a^2+y^2-a^2)(x^2-a^2-(y^2-a^2))=0$$

$$(x^2+y^2-2a^2)(x-y)(x+y)=0 \quad \text{(перетв. рівносильні)}$$

Це об'єднання кола $x^2+y^2=2a^2$ з центром у центрі квадрата $(0,0)$ радіуса $\sqrt{2}a$ – описаного кола квадрата, прямих $x-y=0$ і $x+y=0$ – діагоналей квадрата.



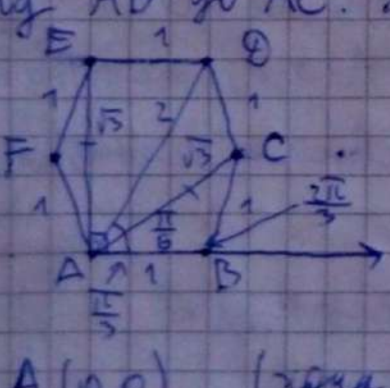
Полярна система координат:



$\rho \geq 0$

φ беруть зазвичай з $[0, 2\pi)$ або $(-\pi, \pi]$ (але не обов'язково).

114. ABCDEF – правильний шестикутник, AB = 1. Полярна с.к.: A – полюс, полярна вісь направлена уздовж $\overline{AB}$, орієнтація задається напрямом обертання від $\overline{AB}$ до $\overline{AC}$. Знайти коорд. A, B, C, D, E, F.



$A(0,0)$ (хоча взагалі кут невизначений)

$B(1,0)$

$C\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

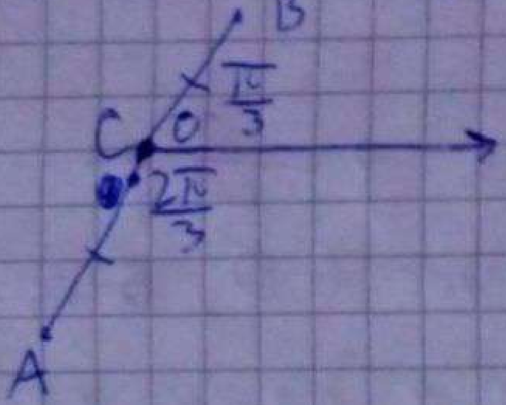
$D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

$E\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$F\left(1, \frac{2\pi}{3}\right).$

<u>116.</u> У деякій полярній с.к. $A\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$,

Знайти коорд. середини C відрізка AB.



$O \in AB$

C лежить на OA. $AB = 8 + 6 = 14$,

тому $AC = \frac{14}{2} = 7$, і $OC = OA - AC = 8 - 7 = 1$.

Т.ч. $C\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$.