Геометрія многовидів

Гладкі многовиди і гладкі відображення

Література:

1. М.М. Постников. Гладкие многообразия (Лекции по геометрии, семестр III)
2. М. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс.
3. М. Хирш. Дифференциальная топология.
4. В.А. Рохлин, Д.Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы.

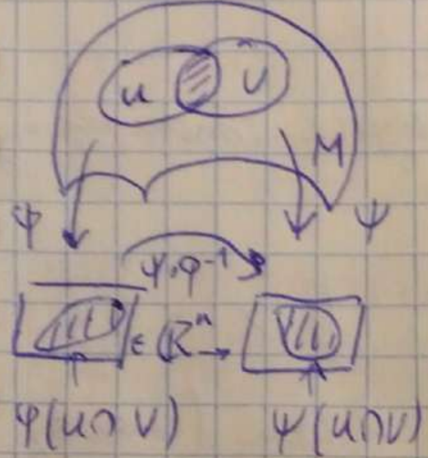
def n-вимірним ($n \in \mathbb{Z}_+$) многовидом (топологічним) будемо називати хаусдорфовий з ($\le$) зліченною

базою топологічний простір M такий, що $\forall p \in M$ $\exists$ відкрита $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$
(n наз. вимірністю M: $n = \dim M$)

Rem. $\mathbb{R}^n$ тут можна замінити на відкр. кулю $B^n \subset \mathbb{R}^n$ (або на будь-яку відкриту $V \subset \mathbb{R}^n$: V гомеоморфна $\mathbb{R}^n$), отримаємо екв. означення.

def. Пара (U, φ) з попереднього def. зветься картою M, U - носієм карти (координатним околом), φ - коорд. відображенням, якщо $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, $x^i : U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ звуться локальними координатами, що відповідають цій карті. Набір карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ зветься атласом M, якщо $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$

def. Нехай (U, φ), (V, ψ) - карти M. $U \cap V \neq \emptyset$. Відображення переходу (заміни координат) від першої карти до другої зветься $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$



def. Атлас $\mathcal{A}$ зветься k-гладким (де $k \in \mathbb{Z}_+$ або $k = \infty$), якщо $\forall\, (U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ таких, що $U \cap V \neq \emptyset$,

$$\psi \circ \varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U\cap V), \psi(U\cap V))$$

Rem Це буде k-дифеоморфізм відкр. підмножин $\mathbb{R}^n$.

def Два k-гл. атласи $\mathcal{A}$ і B многовиду M наз. еквівалентними, якщо $A \cup B$ – k-гл. атлас.

Впр. Це відношення еквівалентності.

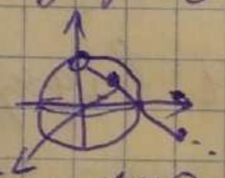
def k-гладкою структурою на многовиді M зветься клас еквівалентності k-гл. атласів M; пара $(M, [\mathcal{A}])$ де $[\mathcal{A}]$ – k-гл. структура на многовиді M, зветься k-гладким многовидом

Rem $\forall$ k-гл. стр. (атлас, многовид) є l-гладкою для $l \le k$, зокрема $\forall$ многовида $\exists$ (тривіальна) 0-гл. стр.

∀ атлас - 0-гл. і ∀ два еквівалентні.

<u>Ex. 1</u> $\mathbb{R}^n$ - n-вимірний ∞-гл., $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ задає стандартну гладку стр.

<u>2</u>. S^n - n-вимірний ∞-гл.: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, стандартна гл. стр. задається атласом з 2 карт (стереогр. проекції)



<u>3</u>. M, N - k-гладкі многовиди $\Rightarrow$ $M \times N$ - k-гл. многовид (<u>Впр.</u>) Наприклад, n-вимірний тор $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ - ∞-гладкий (і взагалі $\dim M \times N = \dim M + \dim N$),

<u>4</u>. M - n-вимірний k-гладкий, $U \subset M$ - відкрита $\Rightarrow$ U - n-вимірний k-гладкий многовид (<u>Впр.</u>)

<u>5</u>. $\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (n-вимірний дійсний проективний простір) - простір прямих, що проходять через 0

$\mathbb{R}P^n = \{(x^1 : \ldots : x^{n+1})\}$, де $(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = [(x^1, \ldots, x^{n+1})]$.