1. Неявно задані криві в площині $\mathbb{R}^2$

Задача 1.1. Побудуйте неявно задану криву в $\mathbb{R}^2$, перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність:

1) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
2) $y - \sin x = 0$
3) $x^2 + y^2 = 0$
3*) $x^2 + y^2 - C = 0$, $C \neq 0$
4) $x^2 - y^2 = 0$
4*) $x^2 - y^2 - C = 0$, $C \neq 0$
5) $xy = 0$
5*) $xy - C = 0$, $C \neq 0$
6) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$
6*) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) - C = 0$, $C \neq 0$
7) $x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 + y^4 = 0$
8) $x^2 y - y^3 = 0$

Зауваження про регулярність неявно заданих кривих.

Якщо крива є регулярною (не має сингулярних точок), перевірте на малюнку, що з топологічної точки зору крива є простою (локально елементарною).

Якщо крива не є регулярною, тобто, має сингулярні точки, перевірте на малюнку, чи з топологічної точки зору крива є простою (локально елементарною). Що відбувається в особливій точці, чи порушується там простота (локальна елементарність) кривої?

Задача 1.2. Розглянемо неявно задану криву γ в площині $\mathbb{R}^2$

$$\Phi(x,y) = 0,$$

де $\Phi(x,y)$ – двічі неперервно диференційована функція. Нехай $P(x_0,y_0)$ – точка на кривій γ. Запишіть розкладення Тейлора функції $\Phi(x,y)$ в точці $P(x_0,y_0)$ з точністю до членів другого порядку. Проаналізуйте, як виглядає розкладення Тейлора у випадках, коли точка $P(x_0,y_0)$ є регулярною або сингулярною – чим відрізняється сингулярний випадок від регулярного в термінах розкладання Тейлора?

Зауваження про наближення неявно заданих кривих.

Якщо крива γ є регулярною (не має сингулярних точок), проаналізуйте якою кривою наближається (апроксимується) крива в малому околі своєї довільної точки. Інакше кажучи, як виглядає крива γ в околі своєї довільної точки, якщо розглядати її під дуже сильним мікроскопом.

Що зміниться, якщо крива γ не є регулярною і містить особливу точку? Як виглядає крива γ в околі своєї особливої (сингулярної) точки, якщо розглядати її під дуже сильним мікроскопом.

Для апроксимації використовуйте криву γ^*, задану неявно першими членами розкладення Тейлора функції $\Phi(x,y)$.

2. Параметрично задані криві в площині $\mathbb{R}^2$

Задача 2.1. Побудуйте параметрично задану криву в $\mathbb{R}^2$, перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність. Проаналізуйте, як точка рухається по заданій кривій з плином часу *t*.

1) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

2) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^3 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

3) $\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^3 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

4) $\begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^4 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

5) $\begin{cases} x^1 = t^3 \\ x^2 = t^5 \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

6) $\begin{cases} x^1 = a + A\cos t \\ x^2 = b + B\sin t \end{cases}, \quad t \in (\alpha, \beta)$

7) $\begin{cases} x^1 = A\cosh t \\ x^2 = A\sinh t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

8) $\begin{cases} x^1 = \cos Mt \\ x^2 = \sin Nt \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

9) $\begin{cases} x^1 = 1/\cosh t \\ x^2 = t - \tanh t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

10) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$

Зауваження.

1. Умова регулярності має аналітичний характер.

Малюнок – це лише ілюстрація, яка може інтуїтивно підказати, чи є крива регулярною або, навпаки, чи містить вона особливі точки. А перевіряти потрібно все рівно за допомогою похідної радіус-вектора кривої.

2. Якщо параметрично задана крива γ не є регулярною, тобто, містить особливу (сингулярну) точку, проаналізуйте малюнок і спробуйте висловити гіпотезу стосовно геометричної характеризації особливих точок (без застосування похідних, лише за допомогою малюнку).

Задача 3.1. Доведіть наступні властивості похідної вектор-функції:

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{h})=\dfrac{d\vec{f}}{dt}+\dfrac{d\vec{h}}{dt}$

2) $\dfrac{d}{dt}(\lambda\vec{f})=\dfrac{d\lambda}{dt}\vec{f}+\lambda\dfrac{d\vec{f}}{dt}$

3) $\dfrac{d\vec{f}}{dt}\equiv\vec{0}\Leftrightarrow\vec{f}\equiv\vec{c}$

4.1) $\dfrac{d}{dt}<\vec{f},\vec{h}> \; = \; <\dfrac{d\vec{f}}{dt},\vec{h}>+<\vec{f},\dfrac{d\vec{h}}{dt}>$

4.2) $\dfrac{d}{dt}[\vec{f},\vec{h}\,] \; = \; [\dfrac{d\vec{f}}{dt},\vec{h}\,]+[\vec{f},\dfrac{d\vec{h}}{dt}\,]$

4.3) $\dfrac{d}{dt}(\vec{f},\vec{g},\vec{h}\,)=(\dfrac{d\vec{f}}{dt},\vec{g},\vec{h}\,)+(\vec{f},\dfrac{d\vec{g}}{dt},\vec{h}\,)+(\vec{f},\vec{g},\dfrac{d\vec{h}}{dt}\,)$

Підказка. Застосувати координатну запис.

Додаткова задача 4.1.

1) Обчислити $\frac{d}{dt}|\vec{f}\,|$

2) Обчислити $\frac{d}{dt}(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}\,|})$

3) Довести (або спростувати), що $|\vec{f}\,| \equiv const \iff <\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}> \equiv 0$

4) Довести (або спростувати), що $[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt}] \equiv \vec{0} \iff$ існує сталий вектор $\vec{C}$ такий, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$.

5) Довести (або спростувати), що $[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}] \equiv \vec{0} \iff$ існують сталі вектори $\vec{C}$, $\vec{C}_0$ такі, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{C}_0$.

Додаткова задача 4.2. Розглянемо в трımірному просторі $\mathbb{R}^3$ гвинтове обертання, що утворюється обертанням на кут ωt навколо осі x^3 і одночасним зсувом вздовж осі x^3 на відстань ht, константи ω і h є ненульовими.

Запишіть параметричне завдання (радіус-вектор) кривої γ, що є траєкторією початкової точки $P(a,0,0)$ відносно вказаного гвинтового обертання.

Побудована крива γ називається *гвинтовою лінією* в $\mathbb{R}^3$.

Перевірте регулярність гвинтової лінії γ.

Проаналізуйте, що буде образом кривої γ при ортогональній проекції на координатну площину x^1x^2.

Проаналізуйте , що відбуватиметься з кривою γ, якщо ми будемо збільшувати або зменшувати параметр h. Як буде виглядати крива γ в граничному випадку $h=0$?

Підказка. Обертання в $I\!R^3$ навколо осі x^3 на кут ωt описується множенням на матрицю $\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а зсув в $I\!R^3$ вздовж осі x^3 на відстань ht описується додаванням вектора $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$. Значить, гвинтове обертання в $I\!R^3$ навколо осі x^3 описується у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$$

Якщо до початкової точки $P(a,0,0)$ застосувати вказане гвинтове обертання,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$$

то отримаємо, що траєкторія точки P буде задаватись у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$$

Отже, шукана гвинтова лінія γ задається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ a\sin\omega t \\ ht \end{pmatrix} ,$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = a\cos\omega t \\ x^2 = a\sin\omega t \\ x^3 = ht \end{cases} .$$

Додаткова задача 4.3. Розглянемо в чотиримірному просторі $I\!R^4$ «гвинтове» обертання, що утворюється обертанням на кут αt навколо початку координат O в координатній площині x^1x^2 і одночасним обертанням на кут βt навколо початку координат O в координатній площині x^3x^4 .

Запишіть параметричне завдання (радіус-вектор) кривої γ в $I\!R^4$, що є траєкторією початкової точки $P(a,0,b,0)$ відносно вказаного «гвинтового» обертання.

Перевірте регулярність гвинтової лінії γ.

Проаналізуйте, що буде образом кривої γ при ортогональній проекції на координатну площину x^1x^2 і що буде образом кривої γ при ортогональній проекції на координатну площину x^3x^4.

Проаналізуйте періодичність кривої γ.