

1. неявно задані криві в площині \mathbb{R}^2

Задача 1.1. Побудуйте неявно задану криву в \mathbb{R}^2 , перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність:

$$1) x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

$$2) y - \sin x = 0$$

$$3) x^2 + y^2 = 0$$

$$3^*) x^2 + y^2 - C = 0, C \neq 0$$

$$4) x^2 - y^2 = 0$$

$$4^*) x^2 - y^2 - C = 0, C \neq 0$$

$$5) xy = 0$$

$$5^*) xy - C = 0, C \neq 0$$

$$6) (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$6^*) (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) - C = 0, C \neq 0$$

$$7) x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 + y^4 = 0$$

$$8) x^2y - y^3 = 0$$

Приклад 1. Розглянемо криву, неявно задану рівнянням

$$x^2 - y^2 = 0$$

Запишемо відповідну функцію $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = x^2 - y^2$$

Ця функція є гладкою. Обчислимо її перші похідні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y$$

Запишемо систему для знаходження особливих точок

$$\Phi = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Якщо ця система не має розв'язків, то крива є регулярною.

Якщо ж система має розв'язки, то крива не є регулярною і містить особливі (сингулярні) точки.

Маємо

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 0, \\ 2x &= 0, \\ -2y &= 0.\end{aligned}$$

Ця система має єдиний розв'язок $x=0$, $y=0$.

Значить, задана крива не є регулярною і має одну особливу точку $P(0,0)$.

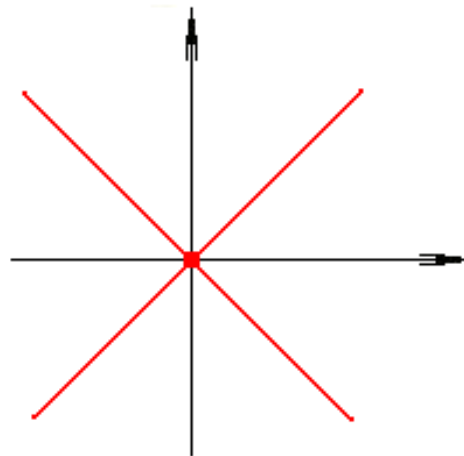
Щоб зобразити криву, зауважимо, що

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

тому крива задається неявно рівнянням

$$(x-y)(x+y) = 0,$$

тобто, або $x=y$, або $x=-y$.



Приклад 2. Розглянемо криву, неявно задану рівнянням

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

Запишемо відповідну функцію $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

Ця функція є гладкою. Обчислимо її перші похідні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

Запишемо систему для знаходження особливих точок

$$\Phi = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Якщо ця система не має розв'язків, то крива є регулярною.

Якщо ж система має розв'язки, то крива не є регулярною і містить особливі (сингулярні) точки.

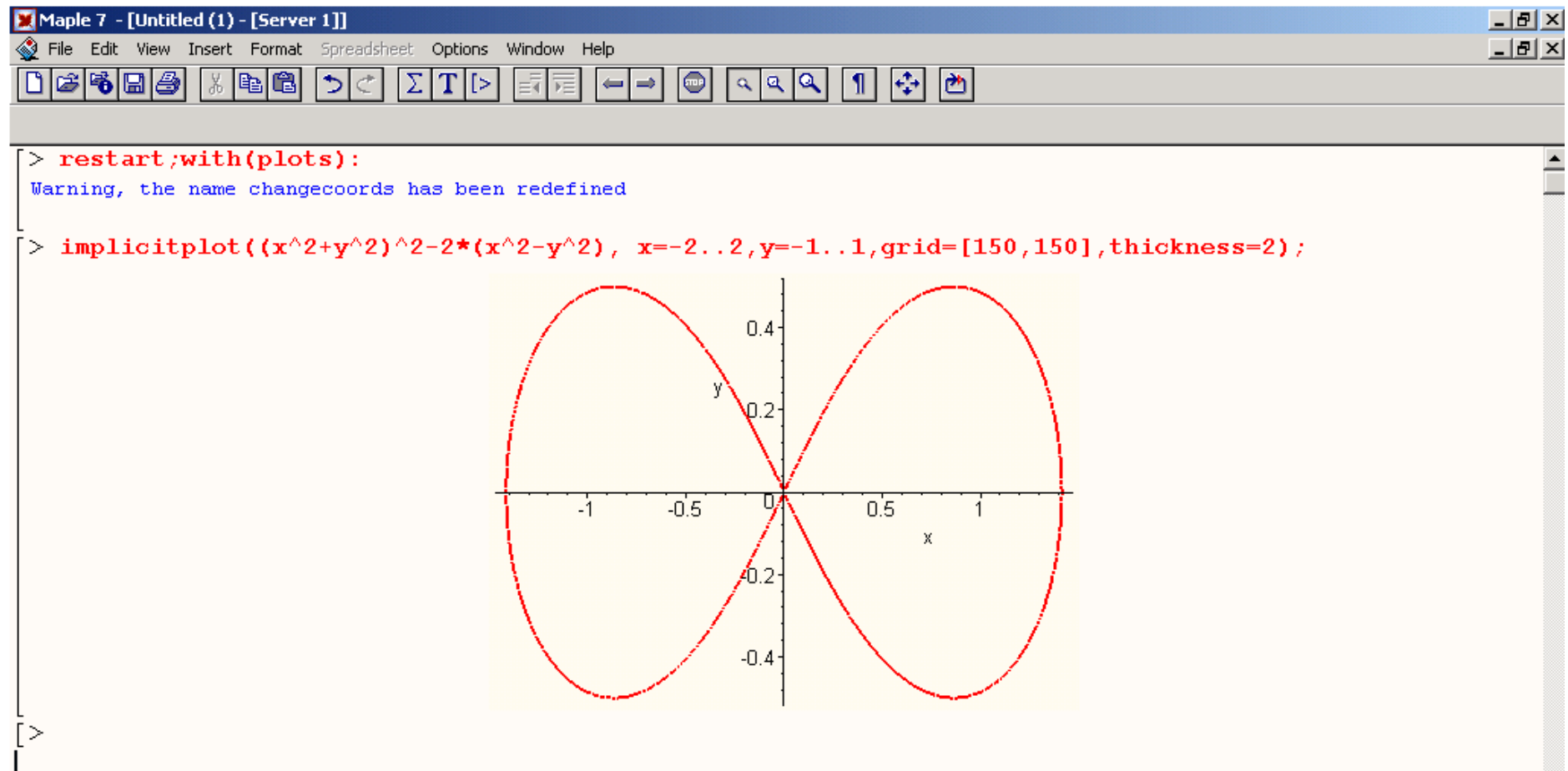
Маємо

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) &= 0, \\ 4x(x^2 + y^2 - 1) &= 0, \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Ця система має розв'язок $x=0$, $y=0$.

Значить, задана крива не є регулярною і має особливу точку $P(0,0)$.

(Доведіть, що інших розв'язків /інших особливих точок немає.)



Задача 1.2. Розглянемо неявно задану криву γ в площині \mathbb{R}^2

$$\Phi(x,y) = 0,$$

де $\Phi(x,y)$ – двічі неперервно диференційована функція. Нехай $P(x_0,y_0)$ – точка на кривій γ . Запишіть розкладення Тейлора функції $\Phi(x,y)$ в точці $P(x_0,y_0)$ з точністю до членів другого порядку. Проаналізуйте, як виглядає розкладення Тейлора у випадках, коли точка $P(x_0,y_0)$ є регулярною або сингулярною – чим відрізняється сингулярний випадок від регулярного в термінах розкладання Тейлора?

2. Параметрично задані криві в площині \mathbb{R}^2

Задача 2.1. Побудуйте параметрично задану криву в \mathbb{R}^2 , перевірте її регулярність, знайдіть її особливі точки або доведіть їх відсутність. Проаналізуйте, як точка рухається по заданій кривій з плином часу t .

$$1) \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^2 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$2) \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^3 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$3) \begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^3 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$4) \begin{cases} x^1 = t^2 \\ x^2 = t^4 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$5) \begin{cases} x^1 = t^3 \\ x^2 = t^5 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$6) \begin{cases} x^1 = a + A \cos t \\ x^2 = b + B \sin t \end{cases}, t \in (\alpha, \beta)$$

$$7) \begin{cases} x^1 = A \cosh t \\ x^2 = A \sinh t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$8) \begin{cases} x^1 = \cos Mt \\ x^2 = \sin Nt \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$9) \begin{cases} x^1 = 1 / \cosh t \\ x^2 = t - \tanh t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

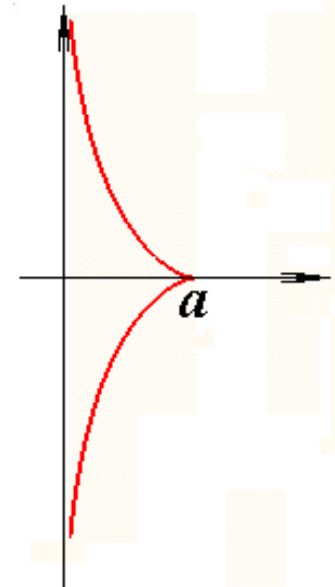
$$10) \begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

Приклад 1. Розглянемо криву γ , задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = a / \cosh t \\ x^2 = a(t - \tanh t) \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

Крива γ називається *трактрисою*.

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, відповідна точка рухається по трактрисі знизу вгору, в момент $t=0$ точка опиняється на «вістрі» трактриси.



Проаналізуємо регулярність кривої γ . Запишемо радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a / \cosh t \\ a(t - \tanh t) \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор є C^∞ -гладкою вектор-функцією.

Обчислимо похідну радіус-вектора :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -a \sinh t / \cosh^2 t \\ a(1 - 1 / \cosh^2 t) \end{pmatrix}.$$

Прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} -a \sinh t / \cosh^2 t \\ a(1 - 1/\cosh^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо систему для знаходження сингулярних точок:

$$\begin{cases} -a \sinh t / \cosh^2 t = 0 \\ a(1 - 1/\cosh^2 t) = 0 \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок $t=0$. Цей розв'язок відповідає сингулярній точці P на трактрисі γ . Радіус-вектор цієї точки дорівнює:

$$\vec{x}_P = \vec{f}(0) = \begin{pmatrix} a / \cosh 0 \\ a(0 - \tanh 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

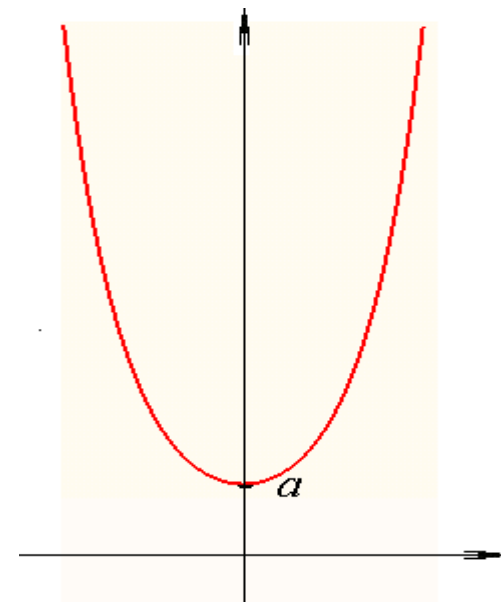
Отже трактриса γ має єдину сингулярну точку $P(a,0)$. Це якраз «вістря» трактриси.

Приклад 2. Розглянемо криву, задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = a \cosh t \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$$

Крива називається *ланцюговою лінією*

Коли параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, відповідна точка рухається по криві зліва направо, в момент $t=0$ точка опиняється в найнижчому положенні на кривій.



Перевіримо, що ця крива є регулярною. Запишемо радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} at \\ a \cosh t \end{pmatrix}.$$

Радіус-вектор є C^∞ -гладкою вектор-функцією.

Обчислимо похідну радіус-вектора :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ a \sinh t \end{pmatrix}.$$

Прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ a \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо систему для знаходження сингулярних точок:

$$\begin{cases} a = 0 \\ \sinh t = 0 \end{cases}$$

Ця система не має розв'язків, тобто, похідна $\frac{d\vec{f}}{dt}$ не обертається в нуль.

Значить, крива γ не містить сингулярних точок.

Таким чином, крива γ є регулярною параметрично заданою кривою.

3. Аналітичні властивості вектор функцій

Розглянемо вектор-функцію

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b).$$

Визначення. $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0$ означає наступне:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{f}(t) - \vec{f}_0| < \varepsilon$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta \Rightarrow \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \dots + (f^n(t) - f_0^n)^2} < \varepsilon$$

Твердження. $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t_0} f^1(t) = f_0^1 \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f^n(t) = f_0^n \end{array}$$

Твердження. $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t_0} f^1(t) = f_0^1 \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f^n(t) = f_0^n \end{array}$$

Доведення.

$$\Rightarrow) \text{ Маємо } |f^j(t) - f_0^j| < \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \dots + (f^n(t) - f_0^n)^2} \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Тому з

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta \Rightarrow \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \dots + (f^n(t) - f_0^n)^2} < \varepsilon$$

випливає

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f^j(t) - f_0^j| < \varepsilon \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Тобто, з

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0$$

випливає

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f^j(t) = f_0^j \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow) \text{ Маємо } \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \dots + (f^n(t) - f_0^n)^2} \leq \sqrt{n} \max_j |f^j(t) - f_0^j|$$

Нехай

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f^j(t) = f_0^j \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

Це означає, що для кожного $1 \leq j \leq n$ виконано

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_j > 0: |t - t_0| < \delta_j \Rightarrow |f^j(t) - f_0^j| < \varepsilon$$

Візьмемо $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Тоді для кожного $1 \leq j \leq n$ виконано

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f^j(t) - f_0^j| < \varepsilon$$

Звідси витікає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta \Rightarrow \sqrt{(f^1(t) - f_0^1)^2 + \dots + (f^n(t) - f_0^n)^2} < \varepsilon$$

А це і означає, що

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}_0$$

Похідна вектор-функції

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f^1(t) - f^1(t_0)}{t - t_0} \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f^n(t) - f^n(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df^n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2 \vec{f}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f^1}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 f^n}{dt^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{d^3 \vec{f}}{dt^3} = \begin{pmatrix} \frac{d^3 f^1}{dt^3} \\ \vdots \\ \frac{d^3 f^n}{dt^3} \end{pmatrix}, \dots$$

Задача 3.1. Доведіть наступні властивості похідної вектор-функції:

$$1) \frac{d}{dt}(\vec{f} + \vec{h}) = \frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{d\vec{h}}{dt}$$

$$2) \frac{d}{dt}(\lambda\vec{f}) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{f} + \lambda\frac{d\vec{f}}{dt}$$

$$3) \frac{d\vec{f}}{dt} \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \vec{f} \equiv \vec{c}$$

$$4.1) \frac{d}{dt} \langle \vec{f}, \vec{h} \rangle = \langle \frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \rangle$$

$$4.2) \frac{d}{dt} [\vec{f}, \vec{h}] = \left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{h} \right] + \left[\vec{f}, \frac{d\vec{h}}{dt} \right]$$

$$4.3) \frac{d}{dt} (\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) = \left(\frac{d\vec{f}}{dt}, \vec{g}, \vec{h} \right) + \left(\vec{f}, \frac{d\vec{g}}{dt}, \vec{h} \right) + \left(\vec{f}, \vec{g}, \frac{d\vec{h}}{dt} \right)$$

Підказка. Застосувати координатну запис.

Приклад. Доведемо $\frac{d}{dt}(\vec{f} + \vec{h}) = \frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{d\vec{h}}{dt}$

Маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{f} + \vec{h}) &= \frac{d}{dt} \left(\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} \right) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f^1 + h^1 \\ \vdots \\ f^n + h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(f^1 + h^1) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}(f^n + h^n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt} + \frac{dh^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df^n}{dt} + \frac{dh^n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df^n}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dh^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dh^n}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{d\vec{h}}{dt} \end{aligned}$$

Задача 3.2.

1) Обчислити $\frac{d}{dt} |\vec{f}|$

2) Обчислити $\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{f}}{|\vec{f}|} \right)$

3) Довести (або спростувати), що $|\vec{f}| \equiv const \Leftrightarrow \left\langle \vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \right\rangle \equiv 0$

4) Довести (або спростувати), що $\left[\vec{f}, \frac{d\vec{f}}{dt} \right] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існує сталий вектор \vec{C}

такий, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C}$.

5) Довести (або спростувати), що $\left[\frac{d\vec{f}}{dt}, \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} \right] \equiv \vec{0} \Leftrightarrow$ існують сталі вектори

\vec{C}, \vec{C}_0 такі, що $\vec{f}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{C} + \vec{C}_0$.

4. Додаткові задачі

Додаткова задача 1. Розглянемо в тримірному просторі \mathbb{R}^3 гвинтове обертання, що утворюється обертанням на кут ωt навколо осі x^3 і одночасним зсувом вздовж осі x^3 на відстань ht , константи ω і h є ненульовими.

Запишіть параметричне завдання (радіус-вектор) кривої γ , що є траєкторією початкової точки $P(a, 0, 0)$ відносно вказаного гвинтового обертання.

Побудована крива γ називається *гвинтовою лінією* в \mathbb{R}^3 .

Перевірте регулярність гвинтової лінії γ .

Проаналізуйте, що буде образом кривої γ при ортогональній проекції на координатну площину x^1x^2 .

Проаналізуйте, що відбуватиметься з кривою γ , якщо ми будемо збільшувати або зменшувати параметр h . Як буде виглядати крива γ в граничному випадку $h=0$?

Підказка. Обертання в \mathbb{R}^3 навколо осі x^3 на кут ωt описується множенням на

матрицю $\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а зсув в \mathbb{R}^3 вздовж осі x^3 на відстань ht опису-

ється додаванням вектора $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$. Значить, гвинтове обертання в \mathbb{R}^3 навколо осі

x^3 описується у вигляді $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$

Якщо до початкової точки $P(a, 0, 0)$ застосувати вказане гвинтове обертання,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$$

то отримаємо, що траєкторія точки P буде задаватись у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{pmatrix}$$

Отже, шукана гвинтова лінія γ задається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ ht \end{pmatrix},$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = a \cos \omega t \\ x^2 = a \sin \omega t \\ x^3 = ht \end{cases}.$$

Додаткова задача 2. Розглянемо в чотиримірному просторі \mathbb{R}^4 «гвинтове» обертання, що утворюється обертанням на кут αt навколо початку координат O в координатній площині $x^1 x^2$ і одночасним обертанням на кут βt навколо початку координат O в координатній площині $x^3 x^4$.

Запишіть параметричне завдання (радіус-вектор) кривої γ в \mathbb{R}^4 , що є траєкторією початкової точки $P(a, 0, b, 0)$ відносно вказаного «гвинтового» обертання.

Перевірте регулярність гвинтової лінії γ .

Проаналізуйте, що буде образом кривої γ при ортогональній проекції на координатну площину $x^1 x^2$ і що буде образом кривої γ при ортогональній проекції на координатну площину $x^3 x^4$.

Проаналізуйте періодичність кривої γ .

$$a). \quad u^2 = \langle u, u \rangle$$

$$(u^2)' = \langle u, u \rangle' = \langle u', u \rangle + \langle u, u' \rangle = 2\langle u, u' \rangle$$

$$(u = (x, y, z), \quad p = (r, \mu, \nu))$$

$$\langle u, p \rangle = x r + y \mu + z \nu$$

$$\langle u, p \rangle' = (x r)' + (y \mu)' + (z \nu)' = \underline{x' r} + \underline{x r'} + \underline{y' \mu} + \underline{y \mu'} + \underline{z' \nu} + \underline{z \nu'} = \underline{\langle u', p \rangle} + \underline{\langle u, p' \rangle}$$

$$2). \quad (u', u'', u''')' = (u'', u'', u''') + (u', u''', u''') + (u', u'', u'''') = (u', u'', u'''')$$

$$\begin{aligned} [a, b, c] &= \\ \langle [a, b], c \rangle &= \\ &= \langle a, [b, c] \rangle \\ [a, b, c] &= -[b, a, c] \\ (a, \underbrace{a}, c) &= 0 \end{aligned}$$

$$e). \quad |u^2|' = \sqrt{\langle u, u \rangle}' = \frac{2\langle u, u' \rangle}{2\sqrt{\langle u, u \rangle}} = \frac{\langle u, u' \rangle}{|u|}$$

1.4. $|u| \equiv \text{const} \Leftrightarrow u \perp u' \Rightarrow \langle u, u' \rangle = 0$

\uparrow
 $|u|' = 0$

\uparrow
 $\langle u, u' \rangle = 0$