gorkaviy@ilt.kharkov.ua

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

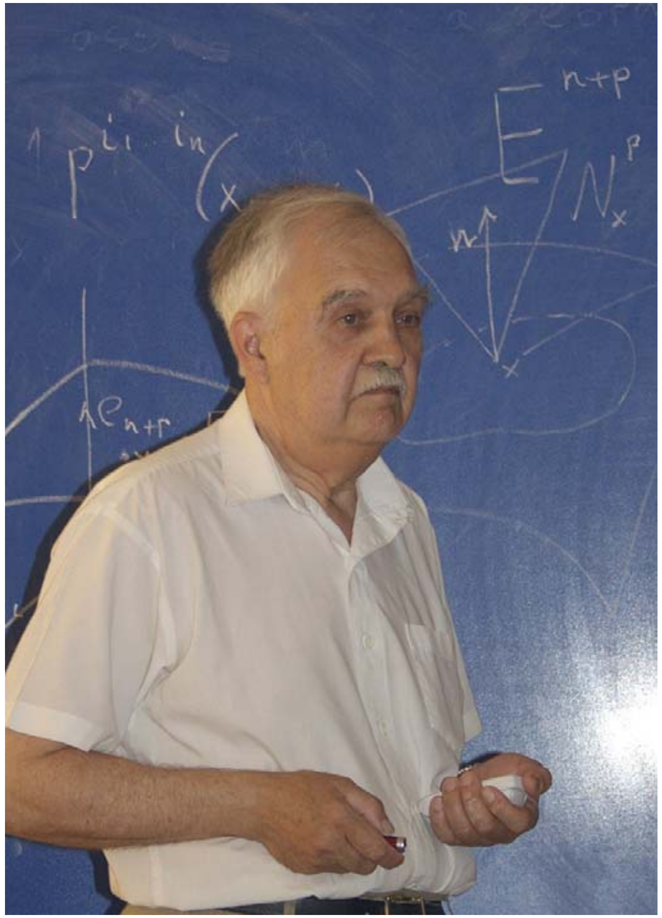
Теорія кривих і поверхонь в евклідовому просторі






***Рекомендована література*:**

1. А.В. Погорєлов *Лекции по дифференциальной геометрии*
2. О.А. Борисенко *Диференціальна геометрія*
3. Ю.А. Аминов *Дифференциальная геометрия и топология кривих*



Історична перспектива

Елементарна геометрія	Синтетична геометрія евклідових "Начал" / "Στοιχεία" / "Elementa"
Аналітична геометрія	Алгебра, метод координат Декарта
Диференціальна геометрія	Математичний аналіз

Класична диференціальна геометрія вивчає загальні криві та поверхні методами математичного аналізу.

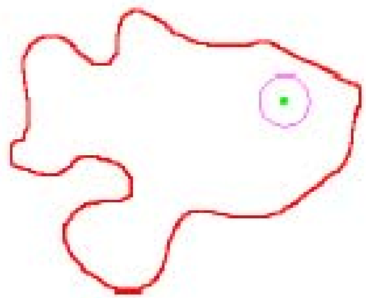
Зміст: теорія кривих і теорія поверхонь.

Лекція 1. Криві в $\mathbb{R}^n$ - способи задавання. Регулярні криві.

Розглядається простір $\mathbb{R}^n$ з координатами $(x^1, \ldots, x^n)$.

Відстань між точками $d(P, Q) = \sqrt{(x_P^1 - x_Q^1)^2 + \cdots + (x_P^n - x_Q^n)^2}$

Топологічна структура. Підмножина в $\mathbb{R}^n$ є *відкритою*, якщо разом з кожною своєю точкою вона містить і якийсь відкритий шар (інтервал при $n=1$, круг при $n=2$) з центром в цій точці.



Векторна структура. Кожній точці A в $\mathbb{R}^n$ ставиться у відповідність вектор, початок якого збігається з початком координат, а кінець – з точкою A. Цей вектор називається *радіус-вектором* точки A, його координати чисельно рівні координатам точки A.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Зазвичай будемо розглядати двомірну площину $\mathbb{R}^2$ або тримірний простір $\mathbb{R}^3$.

Що ж таке "*крива*" в $\mathbb{R}^n$? Який зміст має це поняття?

Нагадування з топології

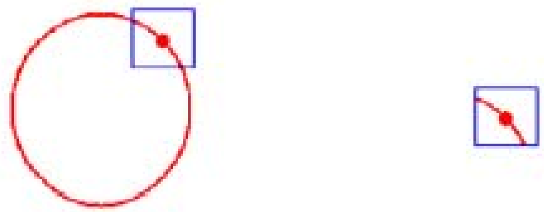
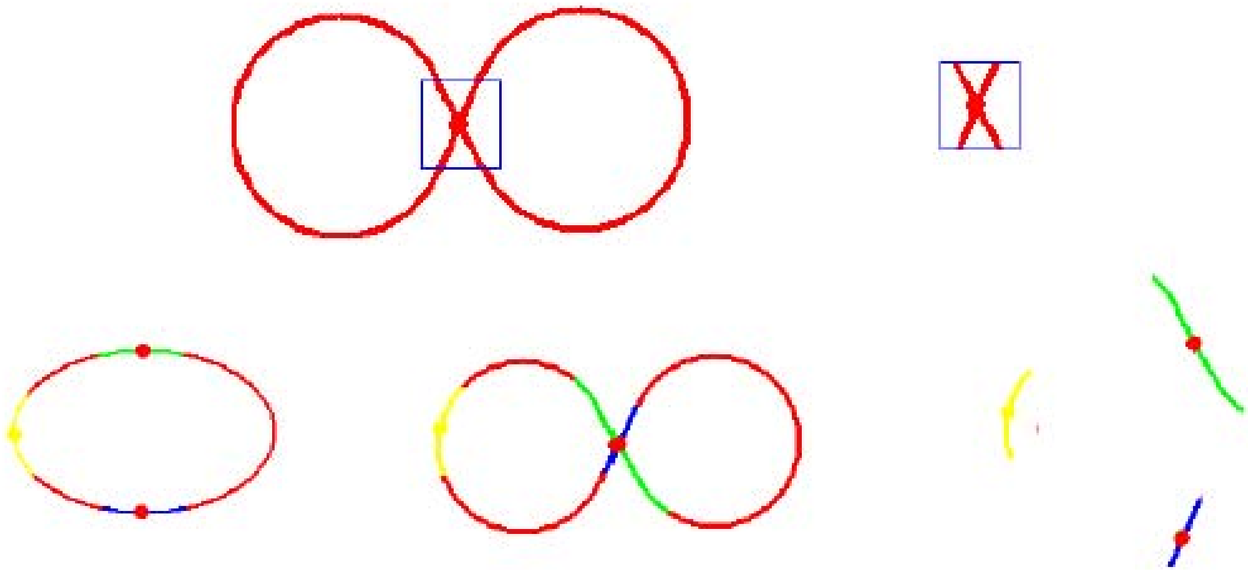
Визначення. *Неперервна крива* в $\mathbb{R}^n$ задається неперервним відображенням $f\colon I\to\mathbb{R}^n$ інтервалу I числової прямої $\mathbb{R}$ в простір $\mathbb{R}^n$.

Визначення. *Елементарна крива* в $\mathbb{R}^n$ – це неперервна крива, що є гомеоморфною (топологічно еквівалентною) інтервалу I числової прямої $\mathbb{R}$.

Визначення. *Проста крива* в $\mathbb{R}^n$ - це зв'язна підмножина в $\mathbb{R}^n$, кожна точка якої має окіл (в індукованій топології), гомеоморфний інтервалу числової прямої.

Визначення. *Загальна крива* в $\mathbb{R}^n$ - це образ простої кривої при її неперервному відображенні, що є локальним гомеоморфізмом.

Ілюстрації-приклади (випадок $\mathbb{R}^2$):

Елементарні криві	
Прості криві	
Загальні криві	

Як задати криву в просторі в $\mathbb{R}^n$?

Способи задавання:

1) явний

2) неявний

3) параметричний

1. Явно задані криві в площині $\mathbb{R}^2$

Розглядаємо в $\mathbb{R}^2$ координати (x^1, x^2) або (x, y).

Визначення. *Явно заданою кривою* в $\mathbb{R}^2$ називається графік функції

$$y = f(x), \qquad x \in I,$$

або

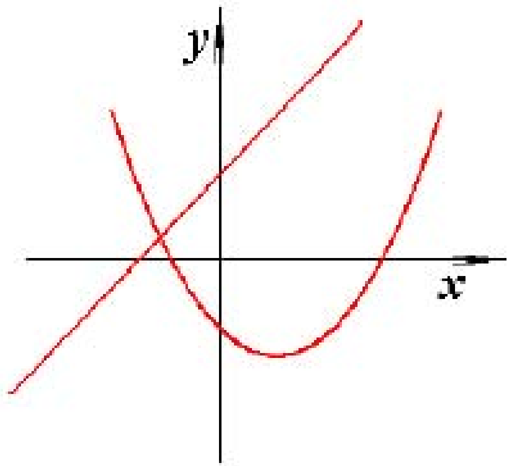
$$x = f(y), \qquad y \in J.$$

Приклади.

1. Пряма $y=ax+b$
2. Парабола $y=ax^2+bx+c$

...

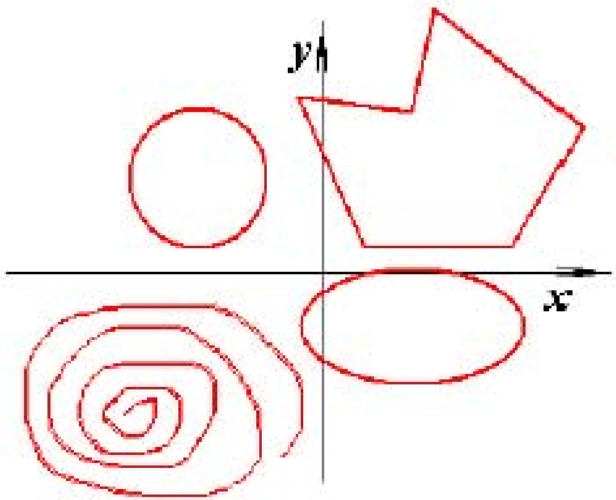
Графіки тригонометричних функцій, гіперболічних тригонометричних функцій, поліномів, раціональних функцій і т.д. ...



Явно задана крива $y=f(x)$ називається *гладкою* класу C^m, $m \geq 1$, якщо функція $f(x)$ належить C^m.

Переваги. З топологічної точки зору, кожна гладка явно задана крива в $\mathbb{R}^2$ є *елементарною*, тобто вона є гомеоморфною (топологічно еквівалентною) відрізку прямої $\mathbb{R}$.

Недоліки. Багатокутники (замкнуті ламані), кола, еліпси і багато інших добре відомих геометричних фігур в площині $\mathbb{R}^2$, які ми сприймаємо як "криві" , не можливо описати (представити, визначити) як явно задані криві.



2. Неявно задані криві в площині $\mathbb{R}^2$

Визначення. *Неявно заданою кривою* γ в $\mathbb{R}^2$ називається множина точок в $\mathbb{R}^2$, координати яких задовольняють рівнянню

$$\Phi(x,y) = 0,$$

де $\Phi(x,y)$ - деяка функція.

Приклади.

1. Пряма: $ax+by+c = 0$
2. Коло: $(x-a)^2 +(y-b)^2 - r^2 =0$
3. Крива другого порядку: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f =0$
4. Алгебраїчні (поліноміальні) криві довільного порядку
5. Неалгебраїчні криві...

Зауваження. Явно задані криві в $\mathbb{R}^2$ *є частковим випадком* неявно заданих кривих в $\mathbb{R}^2$.

Пояснення. Якщо маємо криву , задану явно

$$y=f(x),$$

то її можна представити як криву, задану неявно

$$y-f(x)=0,$$

тобто, $\Phi(x,y)=0$, де $\Phi(x,y) = y-f(x)$.

В той же час, не завжди умову $\Phi(x,y)=0$ можна записати як $y-f(x)=0$, тобто, розв'язати відносно змінної y.

Тому не завжди неявно задану криву можна представити як явно задану криву.

Недолік. Навіть у випадку доволі простих "гарних" функцій $\Phi(x,y)$ відповідні криві γ, неявно задані рівнянням $\Phi(x,y)=0$, можуть не відповідати нашій інтуїтивній уяві про те, що таке "крива".

Приклади.

1. Якщо $\Phi(x,y)\equiv 0$, то крива γ, неявно задана рівнянням $\Phi(x,y)=0$, тобто $0=0$ – це вся площина $\mathbb{R}^2$.

2. Якщо $\Phi(x,y)\equiv C\neq 0$, $C=const$, то крива γ, неявно задана рівнянням $\Phi(x,y) = 0$, тобто $C=0$ – це пуста множина.

3. Якщо $\Phi(x,y)=x^2+y^2$, то крива γ, неявно задана рівнянням $\Phi(x,y)=0$, тобто $x^2+y^2=0$ – це лише одна точка O(0,0) в $\mathbb{R}^2$.

Питання. Яким умовам повинна задовольняти функція $\Phi(x,y)$, щоб відповідна крива в $\mathbb{R}^2$, неявно задана $\Phi(x,y) = 0$, відповідала інтуїтивній уяві про те, що таке "крива"?

Визначення. Крива γ в $\mathbb{R}^2$, неявно задана рівнянням $\Phi(x,y)=0$, називається *регулярною* класу C^m, $m \geq 1$, якщо виконано умови:

1) функція $\Phi(x,y)$ є гладкою класу C^m, $m \geq 1$;

2) градієнт $\nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y})$ не обертається в нуль в точках кривої γ.

Приклад 1. Розглянемо коло γ радіусу $r>0$, задане рівнянням

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0.$$

1) Функція $\Phi(x,y) = (x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ належить класу гладкості C^∞.

2) Градієнт дорівнює $\nabla\Phi = (2(x-a), 2(y-b))$. Він обертається в нуль лише при $x=a, y=b$. Але точка з координатами $x=a, y=b$ не належить колу γ, оскільки $\Phi(a,b) = -r^2 \neq 0$. Тому маємо, що $\nabla\Phi$ не обертається в нуль в точках кривої γ.

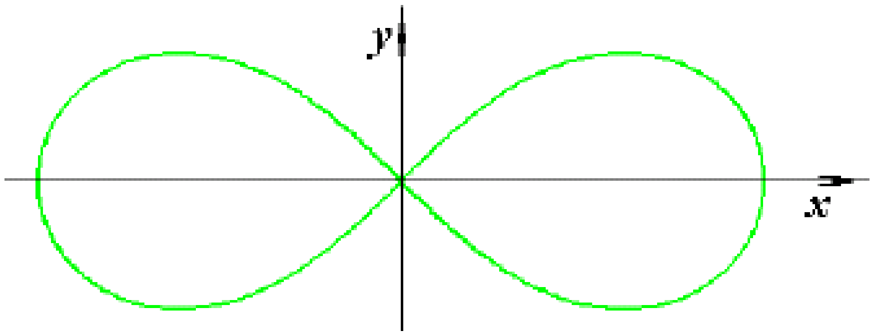
Таким чином, коло γ є регулярною неявно заданою кривою.

Приклад 2. Довільна *явно задана* крива, що є гладкою класу C^m , представляє собою регулярну неявно задану криву класу гладкості C^m.

Довести самостійно. (Перепишіть явне задавання у вигляді неявного задавання і перевірте виконання умов регулярності).

Приклад 3. Розглянемо лемніскату Бернулі, неявно задану рівнянням

$$(x^2+y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$



Довести самостійно, що лемніската Бернулі не є регулярною неявно заданою кривою. Знайти точки на лемніскаті Беернулі, в яких порушується хоча б одна з умов регулярності.

Термінологія. Точки на неявно заданій кривій, в яких порушуються умови регулярності, називаються *особливими* або *сингулярними* точками кривої.

Питання. Навіщо потрібно серед неявно заданих кривих виділяти саме *регулярні* неявно задані криві?

Теорема. *Нехай* γ *в* $\mathbb{R}^2$ *– регулярна неявно задана крива класу* C^m. *Тоді для будь-якої точки* P *кривої* γ *існує окіл* U *в* $\mathbb{R}^2$ *такий, що* $\gamma \cap U$ *є явно заданою кривою класу* C^m.

Ідея доведення. Крива γ задається неявно рівнянням $\Phi(x,y)=0$, при цьому функція $\Phi(x,y)$ задовольняє умовам регулярності.

Позначимо (x_0,y_0) координати точки P *в* $\mathbb{R}^2$.

В точці P градієнт $\nabla\Phi$ не дорівнює 0. Тому хоча б одна з похідних $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ є ненульовою в точці $P(x_0,y_0)$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді ми можемо застосувати **теорему про неявну функцію** з курсу математичного аналізу, що дозволяє в досить малому околі U точки P в $\mathbb{R}^2$ розв'язати рівняння $\Phi(x,y)=0$ у вигляді $y=f(x)$.

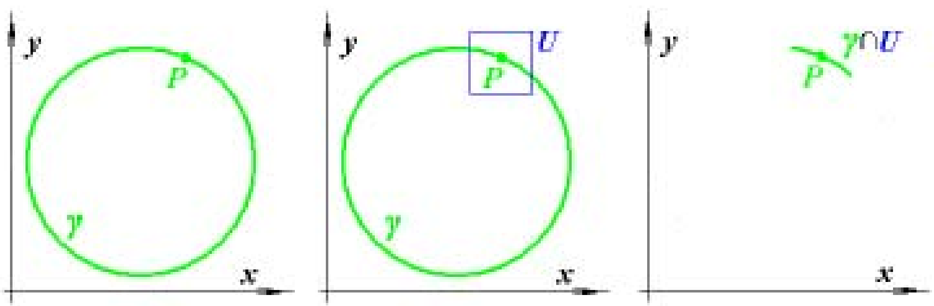
Це і означатиме, що $\gamma \cap U$ є явно заданою кривою.

Висновок. Якщо неявно задана крива в $\mathbb{R}^2$ є регулярною, то в досить малому околі будь-якої її точки цю криву можна задати явно.

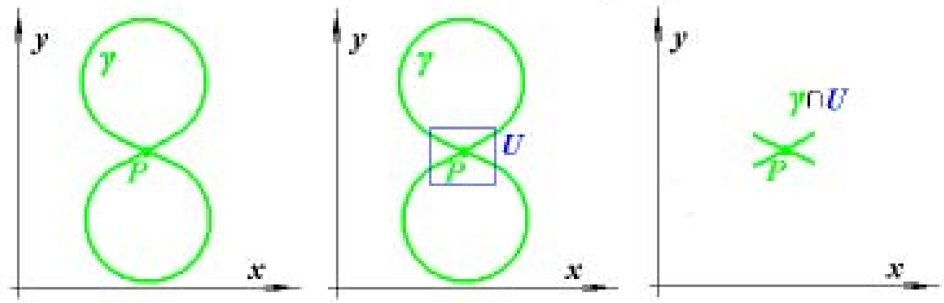
Топологічний наслідок. *Нехай γ в $\mathbb{R}^2$ – регулярна неявно задана крива класу C^1. Для будь-якої точки P кривої γ існує окіл U в $\mathbb{R}^2$ такий, що $\gamma \cap U$ є елементарною кривою. Інакше кажучи, регулярна неявно задана крива γ є простою.*

Приклади-ілюстрації.

Коло



Лемніската Бернулі



Таким чином, *регулярні* неявно задані криві – це гарні криві (з точки зору топології і інтуїтивної уяви взагалі).

3. Параметрично задані криві в просторі $\mathbb{R}^n$

Вектор-функцією, визначеною на проміжку I числової прямої $\mathbb{R}$, називається відображення

$$f: I \to \mathbb{R}^n .$$

В координатах $(x^1, ..., x^n)$ в просторі $\mathbb{R}^n$ вектор-функція записується у вигляді

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(t), \\ &..., \\ x^n &= f^n(t), \end{aligned} \qquad \text{або} \qquad \vec{x} = \vec{f}(t)$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{pmatrix}$$

Скалярні функції $f^1(t), ..., f^n(t)$ називаються *координатними функціями* вектор-функції $\vec{f}(t)$.

Результати і методи математичного аналізу для звичайних скалярних функцій частково переносяться на випадок вектор-функцій.

Для границі вектор-функції має місце формула:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} f^1(t) \\ \vdots \\ \lim\limits_{t\to t_0} f^n(t) \end{pmatrix}$$

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є *неперервною* тоді і тільки тоді, коли неперервні її координатні функції $f^1(t), \ldots, f^n(t)$.

Вектор-функція $\vec{f}(t)$ є *диференційованою*, якщо координатні функції $f^1(t), \ldots, f^n(t)$ є диференційованими.

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{df^1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{df^n}{dt} \end{pmatrix}$$

Якщо координатні функції $f^1(t), \ldots, f^n(t)$ належать класу гладкості C^m або C^∞, то вектор-функція $\vec{f}(t)$ є гладкою класу C^m або C^∞, відповідно.

Нехай задано $f\colon I \to \mathbb{R}^n$.

Визначення. Образ $\gamma = f(I)$ називається *параметрично заданою кривою* в $\mathbb{R}^n$, а f називається *параметризацією* кривої γ.

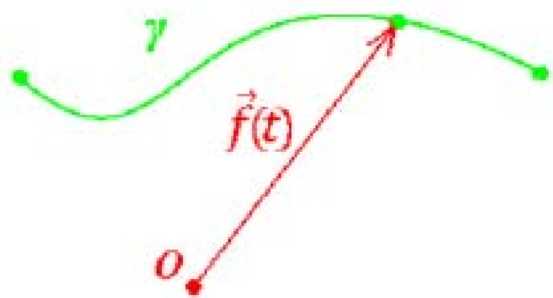
Відносно координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$ параметрично задана крива γ задається набором функцій

$$x^1 = f^1(t),$$
$$\ldots,$$
$$x^n = f^n(t),$$

або відповідною вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(t),$$

визначеною на проміжку I.



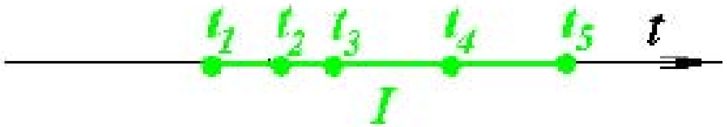
Термінологія. Вектор-функція $\vec{x} = \vec{f}(t)$ називається *радіус-вектором* параметрично заданої кривої γ в $\mathbb{R}^n$.

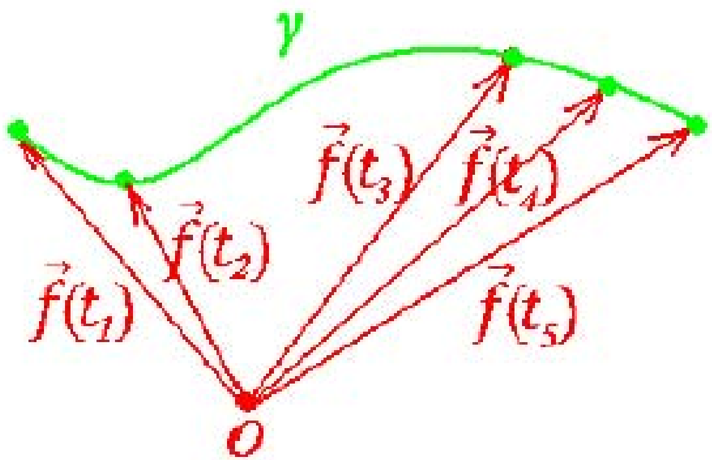
Фізична інтерпретація.

Параметрично задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ – це *шлях* (*траєкторія*) точки, що рухається в просторі $\mathbb{R}^n$ з плином часу t.

А радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(t)$ кривої γ описує яким саме *чином* рухається точка вздовж обраного шляху.

В кожний момент часу t положення точки на кривій γ представляється відповідним радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$.





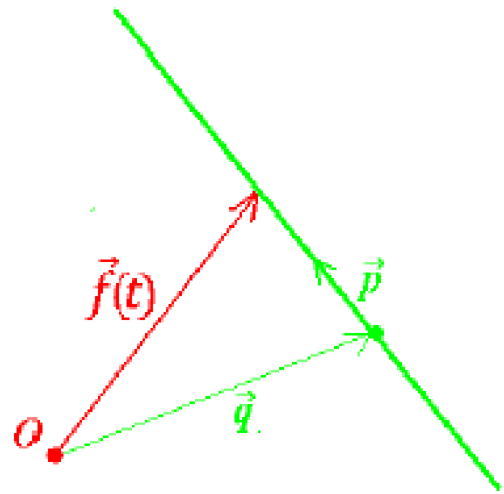
Приклади.

1) Пряма γ на площині $\mathbb{R}^2$:

$$x^1 = p^1\,t + q^1,$$
$$x^2 = p^2\,t + q^2,$$

тобто,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p^1 t + q^1 \\ p^2 t + q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = \vec{p}t + \vec{q}$$



2) Пряма γ в просторі $\mathbb{R}^3$:

$$x^1 = p^1\,t + q^1,$$
$$x^2 = p^2\,t + q^2,$$
$$x^3 = p^3\,t + q^3,$$

тобто,

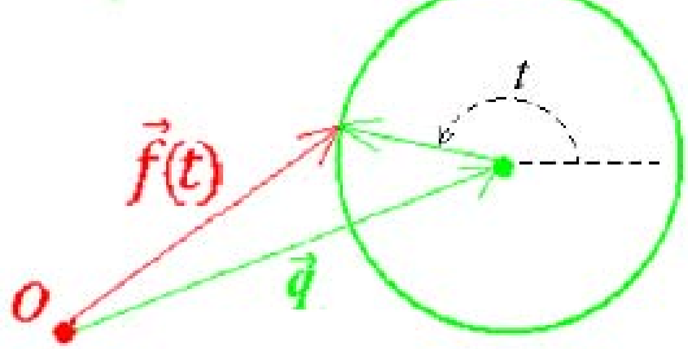
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p^1 t + q^1 \\ p^2 t + q^2 \\ p^3 t + q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \vec{p}t + \vec{q}$$

3) Коло на площині $\mathbb{R}^2$:

$$x^1 = r\cos t + q^1,$$
$$x^2 = r\sin t + q^2,$$

тобто,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos t + q^1 \\ r\sin t + q^2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



4) Еліпс на площині $\mathbb{R}^2$:

$$x^1 = a\cos t + q^1,$$
$$x^2 = b\sin t + q^2,$$

тобто,

Зобразіть самостійно

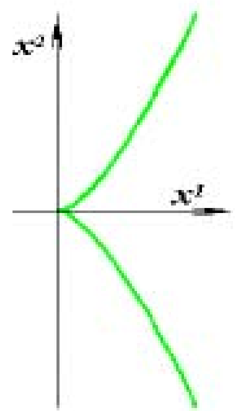
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a\cos t + q^1 \\ b\sin t + q^2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

5) Напівкубічна парабола в площині $\mathbb{R}^2$:

$$x^1 = t^2,$$
$$x^2 = t^3,$$

тобто,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

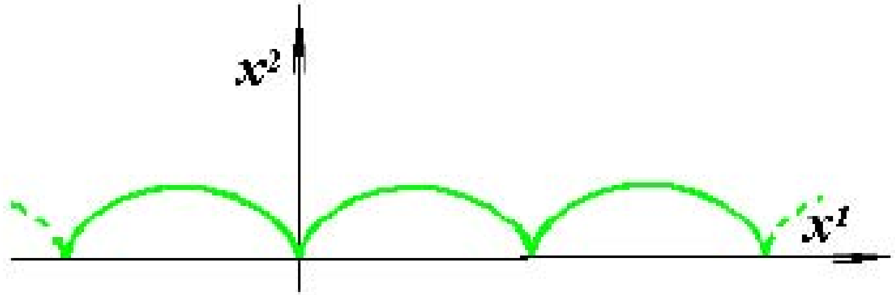


6.1) Циклоїда в площині $\mathbb{R}^2$:

$$x^1 = r\,t - r\sin t,$$
$$x^2 = r - r\cos t\,,$$

тобто,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\,t - r\sin t \\ r - r\cos t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

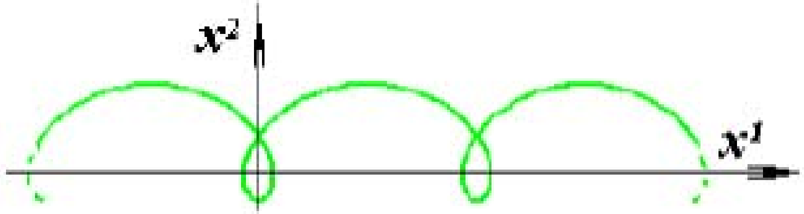


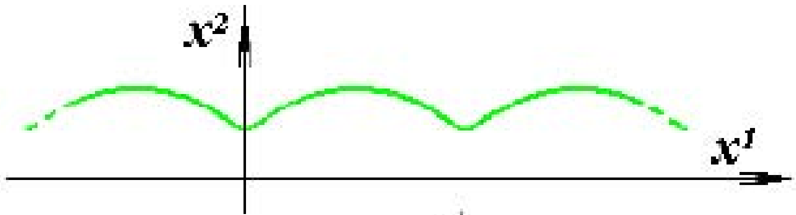
6.2) Подовжена $(l>r)$ та вкорочена $(l<r)$ циклоїди в площині $\mathbb{R}^2$:

$$x^1 = r\,t - l\sin t,$$
$$x^2 = r - l\cos t\,,$$

тобто,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\,t - l\sin t \\ r - l\cos t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

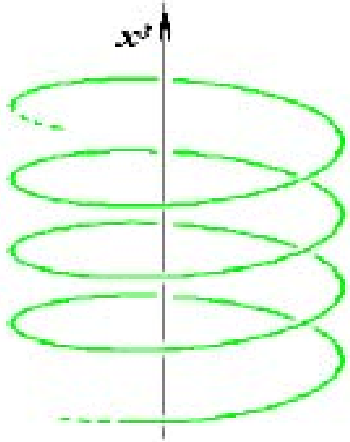




7) Гвинтова лінія в просторі $\mathbb{R}^3$:

$$x^1 = r\cos t,$$
$$x^2 = r\sin t\,,$$
$$x^3 = h\,t\,,$$

тобто, $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$



Зауваження. Явно задані криві в $\mathbb{R}^2$ є *частковим випадком* параметрично заданих кривих в $\mathbb{R}^2$.

Пояснення. Якщо маємо криву γ, задану явно $y=\varphi(x)$, то її можна представити як криву, задану параметрично:

$$\begin{aligned} x^1 &= t, \\ x^2 &= \varphi(t), \end{aligned} \qquad \text{тобто,} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

Узагальнення. Якщо параметрично задана крива γ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задається вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(t)$, в якої хоча б одна з координатних функцій $f^1(t), \ldots, f^n(t)$ дорівнює t, то таку криву γ ми будемо називати *явно заданою*. Наприклад,

$$\begin{aligned} x^1 &= t, \\ x^2 &= f^2(t), \\ &\ldots \\ x^n &= f^n(t), \end{aligned} \qquad \text{тобто,} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ f^2(t) \\ \ldots \\ f^n(t) \end{pmatrix}$$

Клас гладкості явно заданої кривої γ визначається класом гладкості вектор-функції $\vec{f}(t)$.

Недолік. Якщо брати *довільні* параметрично задані криві в $\mathbb{R}^n$, що представляються *довільними* вектор-функціями, то вони можуть виявитись дуже далекими від нашої уяви про те, що таке "крива".

Приклад 1. Якщо відображення $f: I \to \mathbb{R}^n$ є сталим, тобто представляє сталувектор-функцію $\vec{x} = \vec{f}(t) \equiv \vec{c}$, то відповідна параметрично задана крива γ буде складатися лише з *однієї* точки в $\mathbb{R}^n$.

Приклад 2. Існує таке неперервне відображення $f: I \to \mathbb{R}^2$, що образ $\gamma(I)$ буде заповнювати собою весь квадрат в $\mathbb{R}^2$. Відповідна крива називається *кривою Пеано*.

(Дивись Ю.А. Аминов, *Дифференциальная геометрия и топология кривых.)*

Питання. Яким умовам повинна задовольняти вектор-функція $f: I \to \mathbb{R}^n$, щоб відповідна параметрично задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ відповідала інтуїтивній уяві про те, що таке "крива"?

Визначення. Параметрично задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(t)$, $t \in I$, називається *регулярною (регулярно параметризованою) класу* C^m, $m \geq 1$, якщо

$$1)\ \vec{f}(t) \in C^m,$$

$$2)\ \frac{d\vec{f}}{dt} \neq 0 \text{ для усіх } t \in I.$$

Приклад 1. Розглянемо пряму γ в $\mathbb{R}^n$, задану параметрично лінійною вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{p}t + \vec{q},$$

де $\vec{p} \neq \vec{0}$ - напрямний вектор прямої.

Маємо:

1) $\vec{f}(t) = \vec{p}t + \vec{q} \in C^\infty$,

2) $\frac{d}{dt}(\vec{p}t + \vec{q}) = \vec{p} \neq \vec{0}$

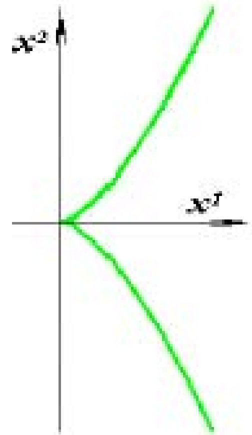
Отже, пряма γ в $\mathbb{R}^n$ є регулярною параметрично заданою кривою.

Приклад 2. Довільна гладка явно задана крива в $\mathbb{R}^n$ є регулярною параметрично заданою кривою.

Доведіть самостійно. (Перейдіть від явного задавання до параметричного задавання і перевірте виконання умов регулярності парамтерично заданої кривої.)

Приклад 3. Розглянемо напівкубічну параболу в $\mathbb{R}^2$, задану параметрично радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$



Доведіть самостійно, що напівкубічна парабола не є регулярною параметрично заданою кривою. Вкажіть точки напікубічної параболи, де порушується виконання умов регулярності параметрично заданої кривої.

Термінологія. Точки на параметрично заданій кривій, в яких порушуються умови регулярності, називаються *особливими* або *сингулярними* точками кривої.

Питання. Навіщо потрібно серед параметрично заданих кривих виділяти саме *регулярні* параметрично задані криві?

Теорема. *Нехай* γ *в* $\mathbb{R}^n$ *– регулярна параметрично задана крива класу* C^m *з радіус-вектором* $\vec{x} = \vec{f}(t)$, $t \in I$.

Тоді для будь-якого $t_0 \in I$ *існує окіл* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *в* I *такий, що підмножина кривої* γ *з радіус-вектором* $\vec{x} = \vec{f}(t)$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *є явно заданою кривою класу* C^m.

Ідея доведення.

Крива γ задається параметрично вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(t)$, $t \in I$.

За умовою регулярності , вектор-функція $\vec{f}(t)$ належить класу гладкості C^m і її похідна $\frac{d\vec{f}}{dt}$ не обертається в нуль в жодній точці t з інтервалу I, зокрема - в точці t_0.

Як наслідок, координатні функції $f^1(t), \ldots, f^n(t)$ належать класу гладкості C^m і хоча б одна з них має ненульову похідну в точці t_0, скажімо

$$\frac{df^1}{dt}(t_0) \neq 0$$

Тоді ми можемо застосувати відому **теорему про обернену функцію** з курсу математичного аналізу, що дозволяє в досить малому околі $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ точки t_0 в I обернути функцію $x^1=f^1(t)$ і записати $t = T(x^1)$, $x^1 \in J$, так, що зміна параметру x^1 в інтервалі J відповідає зміні параметра t в інтервалі $(t_0-\delta, t_0+\delta)$.

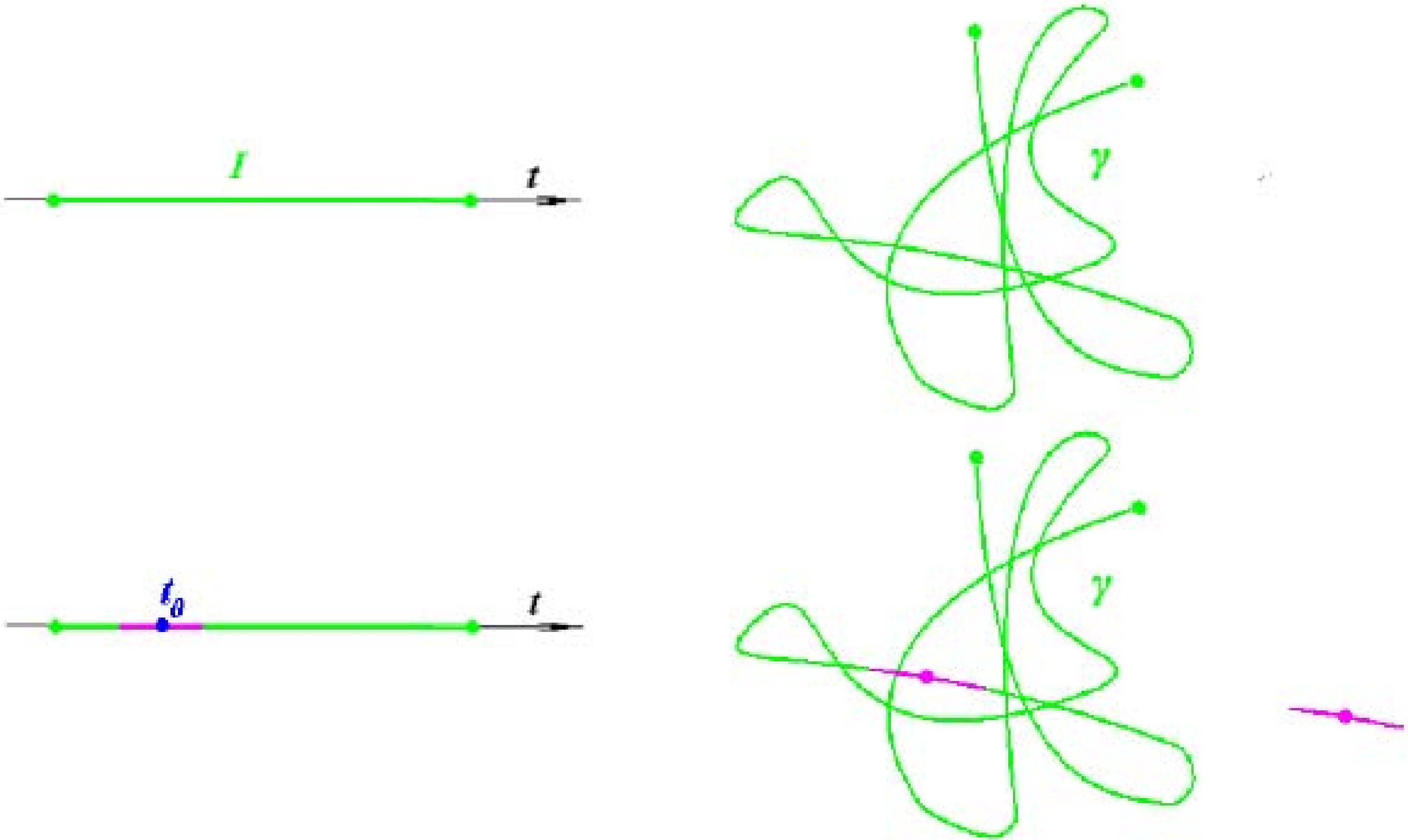
Підставляючи $t = T(x^1)$ в радіус-вектор $\vec{f}(t)$, отримаємо

$$\vec{x} = \vec{f}\big(T(x^1)\big) = \begin{pmatrix} f^1(T(x^1)) \\ f^2(T(x^1)) \\ \vdots \\ f^n(T(x^1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \hat{f}^2(x^1) \\ \vdots \\ \hat{f}^2(x^1) \end{pmatrix},$$

Це і означає, що відповідна підмножина кривої γ є явно заданою кривою.

Висновок. Якщо параметрично задана крива γ в $\mathbb{R}^n$ є регулярною, то локально (відносно параметра t) цю криву можна задати явно.

Топологічний наслідок. *Нехай γ в $\mathbb{R}^n$ – регулярна параметрично задана крива класу C^1. Тоді крива γ є загальною.*



Загальний висновок.

Для кривих в $\mathbb{R}^n$ є три різних способи задавання – *явний*, *неявний** і *параметричний*.

У випадку *регулярних* кривих ці три способи – *явний*, *неявний** і *параметричний* – є "еквівалентними" з локальної точки зору.

Надалі будемо розглядати в більшості випадків *параметричний* спосіб задавання кривих в $\mathbb{R}^n$.

* Ми розглянули неявно задані криві в $\mathbb{R}^2$, але можна розглядати їх і більш узагальнено в просторі $\mathbb{R}^n$ при довільному $n \geq 2$.