

спряжені до $\gamma(a) \Rightarrow$ її індексна форма > 0 за непер. P_ϵ ,
 тобто $\int_0^t (g(\nabla_{\gamma_t} Z, \nabla_{\gamma_t} Z) - g(R(Z, \gamma' | \gamma', Z))) dt > 0$ ($i > 0$ при $Z_t \neq 0$),
 де $\{Z_t\}_{t \in [a, b]}$ - крива нехв. $Z_t \in \mathcal{H}_0(\gamma|_{[a, t]}) \forall t$, маємо $Z_t(u) = Z_t(t) = 0$, $Z_t \rightarrow Z$ при $t \rightarrow b$,
 за неперервності, при $t \rightarrow b$ отримуюємо $I(Z, Z) > 0$.

І обов'язково, якщо γ гнучка $\Leftrightarrow \forall t \in [a, b)$ $d_{\gamma'(t)} \exp_{\gamma(t)}$ небуває
~~небуває~~

def. Індексом геодезичної γ у M зведемо
 $\text{ind } \gamma := \sup \{ \dim V \mid V \subset \mathcal{H}_0(\gamma) - \text{векторний підпростір: } I_{V \times V} \leq 0 \}$
 (виглядає базисом)

Cor. $\text{ind } \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma: [a, b] \rightarrow M$ не містить внутрішніх точок $\gamma(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$,
 що спряжені до $\gamma(a)$.

Теорема порівняння індексів та Раяка

Знову (M, g) - риманова метрика $l \geq 4$, $\dim M = n \geq 2$, з рیم. зв. ∇ і
 метр. кр. R , ма $\forall$ геоф. γ об'ємом $|\gamma| \equiv \text{const}$. Аналогічні по-
 значення $\forall$ іншого риманового $(\tilde{M}, \tilde{g})$: рим. зв. $\tilde{\nabla}$, метр. кр. $\tilde{R}$ etc.
 (менш об'ємом ніж γ - н. зв'язності ≥ 2).

Rem. Нехай $(M, g) \subset (\tilde{M}, \tilde{g})$ - риманові, а $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ і
 $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ - l -м. параметризовані геодезичні.

Нехай $\varphi: T_{\gamma(0)} M \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(0)} \tilde{M}$ - аке-підружжє лінійне відображ., що
 зберігає скал. добутки: $\tilde{g}_{\tilde{\gamma}(0)}(\varphi(v), \varphi(w)) = g_{\gamma(0)}(v, w) \quad \forall v, w \in T_{\gamma(0)} M$.
 Зокрема, якщо $v \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(v) \neq 0$, тоді φ - ізм. (ізометричне
 вклядення). Тому для існування такої φ необхідно $\dim M \leq$
 $\leq \dim \tilde{M}$. Тепер $\forall t \in [0, a]$ позначимо через $P_t: T_{\gamma(0)} M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$
 лін. ~~векторне~~ відображення паралельного перенесення з $\gamma(0)$ у $\gamma(t)$
 уздовж γ , а через $P_{-t}: T_{\gamma(t)} M \rightarrow T_{\gamma(0)} M$ обернене відображ. пар. перенес.
 з $\gamma(t)$ у $\gamma(0)$ уздовж γ . Зокрема, це ізометрич. відб. $g_{\gamma(0)}, g_{\gamma(t)}$ за
 власт. ∇ . Якщо $\{E_i\}_{i=1}^n$ - ортогонал. базис паралельних полів уздовж γ
 (їх можна побудувати, продовживши якийсь ортогонал. базис
 $T_{\gamma(0)} M$), тоді $g_{\gamma(t)}(E_i(t), E_j(t)) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}, t \in [0, a]$ то
 $P_t(v^i E_i(0)) = v^i E_i(t)$, бо $t \mapsto v^i E_i(t)$ - парал. поле, що
 продовжує $v^i E_i(0)$; $\therefore P_{-t}(v^i E_i(t)) = v^i E_i(0)$. Аналогічно
 позначимо парал. перенесення $\tilde{P}_t: T_{\tilde{\gamma}(0)} \tilde{M} \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M}$ і обернене
 $\tilde{P}_{-t}: T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M} \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(0)} \tilde{M}$ уздовж $\tilde{\gamma}$. Побудуємо $\Phi: \mathcal{X}(\gamma) \rightarrow \mathcal{X}(\tilde{\gamma})$:

$$\Phi(Y)(t) := (\tilde{P}_t \circ \Phi \circ P_{-t})(Y(t)) \quad \forall t \in [0, a].$$

Оскільки $\forall t \quad \tilde{P}_t \circ \Phi \circ P_{-t} : T_{\gamma(t)} M \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M} \in \text{lin. ізометризм}$

як композиція лін. ізом. (можливо ізометричним вважати)
 Φ лінійне, і $\forall t \quad |\Phi(Y)(t)|_{\tilde{\gamma}(t)} = |Y(t)|_{\gamma(t)}$ за побудовою, для ортонорм.

базиса $\{E_i\}_{i=1}^n$ як вище $\{\tilde{E}_i := \Phi(E_i)\}_{i=1}^n \in \text{ортонорм. системи}$
 (можна $\tilde{g}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{E}_i(t), \tilde{E}_j(t)) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}, t \in [0, a]$) парал. перенесення
 $\tilde{\gamma}$, бо $\forall i = \overline{1, n} \quad \tilde{E}_i$ - парал. поле, що продовжує $\tilde{E}_i(0) = \Phi(E_i(0))$.

Якщо $Y = Y^i E_i$ (для певного l -н. $Y^i : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$), то
 за побудовою $\Phi(Y) = Y^i \tilde{E}_i$. Зокрема, $Y \in \mathcal{X}_0(\gamma) \Rightarrow Y^i(0) = Y^i(a) \quad \forall i \Rightarrow \Phi(Y) \in \mathcal{X}_0(\tilde{\gamma})$, тобто $\Phi : \mathcal{X}_0(\gamma) \rightarrow \mathcal{X}_0(\tilde{\gamma})$. Далі вважатимемо

таким, що $\Phi(\gamma'(0)) = \tilde{\gamma}'(0)$ (таке Φ існує, бо $|\gamma'| = |\tilde{\gamma}'| = 1$).

Якщо тепер вважати, що E_1 продовжує $\gamma'(0)$, то $E_1 = \gamma'$, бо

γ -розр., а $\tilde{E}_1$ продовжує $\tilde{\gamma}'(0)$, тобто $\tilde{E}_1 = \tilde{\gamma}'$. Якщо $Y \in \mathcal{X}^\perp(\gamma)$, то

тепер $Y^1 = 0 \Rightarrow \Phi(Y) = \sum_{i=2}^n Y^i \tilde{E}_i \in \mathcal{X}^\perp(\tilde{\gamma})$, тобто $\Phi : \mathcal{X}^\perp(\gamma) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(\tilde{\gamma})$.

$X^\pm_\circ(x) \rightarrow X^\pm_\circ(\tilde{x})$ Оскільки E_i паралельні, $\nabla_{\tilde{x}} Y = (Y^i)' E_i +$
 $+ Y^i \nabla_{\tilde{x}} E_i = (Y^i)' E_i$, ан-но $\nabla_{\tilde{x}} \Phi(Y) = (Y^i)' E_i$. Тому

$$|\nabla_{\tilde{x}} Y(t)|^2 = \sum_{i=1}^n ((Y^i)'(t))^2 = |\nabla_{\tilde{x}} \Phi(Y)(t)|^2_{\tilde{g}(t)} \quad \forall t \in [0, a]. \text{ Ан-но,}$$

$$\nabla_{\tilde{x}} \nabla_{\tilde{x}} Y = (Y^i)'' E_i + \tilde{\nabla}_{\tilde{x}} \tilde{\nabla}_{\tilde{x}} \Phi(Y) = (Y^i)'' E_i. \text{ Крім того, } \Phi(x') = \tilde{x}'.$$

Далі для $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, можна $\sigma \subset T_p M$, $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ позначити

через $K(\sigma)$, $\tilde{K}(\tilde{\sigma})$ секції кривих (M, g) , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ у $p, \tilde{p}$ у напрямках

$\sigma, \tilde{\sigma}$ відповідно. Введемо поняття наступних позначення:

def. Для параметризованої парам. крив. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$, $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$

будемо говорити, що крива (M, g) уздовж γ не перевищує криву

$(\tilde{M}, \tilde{g})$ уздовж $\tilde{\gamma}$, ~~якщо~~ і виконують $K(\gamma) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma})$, якщо $\forall t \in [0, a]$

$\sigma \in T_{\gamma(t)} M$, $\tilde{\sigma} \in T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{M}$ такі, що $\{\gamma'(t), \sigma\} \subset \{\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\sigma}\}$ лінійно незалежні.

$K(\sigma) \leq \tilde{K}(\tilde{\sigma})$, де $\sigma := \text{span} \{\gamma'(t), \sigma\}$ і $\tilde{\sigma} := \text{span} \{\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\sigma}\}$.

lem. Якщо $(M, g) \subset (\tilde{M}, \tilde{g})$ - підмногозина, $\dim M \leq \dim \tilde{M}$,

$\gamma: [0, a] \rightarrow M \subset \tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ - парам. крив. і $K(\gamma) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma})$

Тоді $\Phi: X(\gamma) \rightarrow X(\tilde{\gamma})$ підпорядковане за деякими ізом. вкл.

$\Phi: T_{x(0)} M \rightarrow T_{\tilde{x}(0)} \tilde{M}$ як бажало. Також для індексних форм I ма $\tilde{I}$ розг. γ ма $\tilde{\gamma}$ баж. $\forall Y \in \mathcal{X}(\gamma)$

$$I(Y, Y) \geq \tilde{I}(\Phi(Y), \Phi(Y)).$$

$$\Rightarrow I(Y, Y) = \int_0^a (g(\nabla_{\gamma} Y, \nabla_{\gamma} Y) - g(R(Y, \gamma') \gamma', Y)) dt \quad \text{---}$$

$$\forall t \quad g_{\gamma(t)}(R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t)) \gamma'(t), Y(t)) = K(\sigma(t)) \cdot (g(Y(t), Y(t)) - \underbrace{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}_{=1} - g_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t))^2),$$

де $\sigma(t) := \text{span}\{\gamma'(t), Y(t)\}$,
 якщо $\gamma'(t) \in Y(t)$ лін. незал., $\in 0$ у прот. випадку. То-

значимо $K(\sigma(t)) := 0$ для лін. зал. $\in K(\sigma)$. $t \mapsto K(\sigma(t))$:

$$\text{---} \int_0^a (g(\nabla_{\gamma} Y, \nabla_{\gamma} Y) - K(\sigma) \cdot (g(Y, Y) - g(Y, \gamma')^2)) dt = \left[\begin{array}{l} \text{власн. } \Phi \\ \text{несл. } \text{Rem.} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^a (\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \Phi(Y), \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \Phi(Y)) - K(\sigma) \cdot (\tilde{g}(\Phi(Y), \Phi(Y)) - \tilde{g}(\Phi(Y), \tilde{\gamma}')^2)) dt \geq$$

$$\geq \left[\forall t \quad \tilde{\sigma}(t) := \text{span}\{\tilde{\gamma}'(t), \Phi(Y(t))\}, K(\gamma) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma}) \right] \geq \int_0^a (\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \Phi(Y), \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \Phi(Y)) - \tilde{K}(\tilde{\sigma})(\tilde{g}(\Phi(Y), \Phi(Y)) - \tilde{g}(\Phi(Y), \tilde{\gamma}')^2)) dt = \left[\begin{array}{l} \text{ан-но} \\ \text{до } I \end{array} \right] = \tilde{I}(\Phi(Y), \Phi(Y)). \quad \triangle$$

Th. (власна позитивна індексів). Нехай (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ - риманові,
 $\dim M \leq \dim \tilde{M}$, $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ і $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ - лан. нар. розг. криві і

носія $\{Y_i : t \mapsto \sin(\frac{\pi t}{a}) E_i(t)\}_{i=2}^n$ наведених до $X_0^\perp(t)$ і
 для них $I(Y_i, Y_i) < 0 \quad \forall i$ (це не - групи варіації ^{гоме.} визначені вкр.)

Оскільки вона лн. незад., з доб. індекса і Th. неперервності
 маємо $\text{ind } \tilde{\gamma} \geq \text{ind } \gamma \geq n-1 > 0$ для конк. нам. парам. розг.
 $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ з $\tilde{\ell}(\tilde{\gamma}) = a > \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ і $\tilde{\kappa}(\tilde{\gamma}) \geq k$. Зокрема, $\tilde{\gamma}$ маванна
 містими ^{сп-л. гома. $\tilde{\gamma}$} внутрішньої спрясеної точки $\tilde{\gamma}(t_0)$, $t_0 \in (0, a)$, до
 $\tilde{\gamma}(0)$. Ізотопічно це спостереження. За останнім Соч. нелр. розг.

Соч. Месам (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ - ріманові, $\dim M \leq \dim \tilde{M}$, $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ і
 $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ - нам. пар. розг.и, і $\kappa(\gamma) \leq \tilde{\kappa}(\tilde{\gamma})$. Тоді перша
 спрясена до $\gamma(0)$ точка γ зустрічається не раніше ніж перша
 спрясена до $\tilde{\gamma}(0)$ точка $\tilde{\gamma}$. І якщо $t_0, \tilde{t}_0 \in [0, a]$ такі, що
 $\forall t \in (0, t_0), t \in (0, \tilde{t}_0)$ $\gamma(t)$ не спрясена з $\gamma(0)$, $\tilde{\gamma}(t)$ не спр.
 з $\tilde{\gamma}(0)$, ~~але~~ але $\gamma(t_0)$ спрясена з $\gamma(0)$, то $t_0 \geq \tilde{t}_0$.

З урахуванням і останнього Соч. нелр. розг., $\text{ind } \tilde{\gamma}|_{[0, \tilde{t}_0]} = 0$,
 тоді з Th. нелр. індексів $\text{ind } \gamma|_{[0, t_0]} = 0$, і за нам.

не Соч. $\forall t \in (0, \tilde{t}_0)$ $\gamma(t)$ не сов. з $\gamma(0)$. Тогда $t_0 > \tilde{t}_0$. $\triangle$

Рем. $\tilde{t}_0$ может быть и $+\infty$.

Ес. 2. Для $(\tilde{M}, \tilde{g}) = M_0^n = \mathbb{E}^n$ $\leftarrow n = \dim M$ - модельного пространства ПСК 0 можно з попер. Соч., что для люб. пар. геодр. γ з (M, g) з $K(\gamma) \leq 0$, закрепа для вынуды $K \leq 0$, γ не має спряженых точек з $\gamma(0)$ $\leftarrow$ (можно з γ тойжой γ), до на геодезических E^n (прямых) спряж. точек $\nexists$. Тогда, закрепа, $d_{t\gamma(0)} \exp_{\gamma(0)}$ невырождения $\forall t$ (якщо визначений, закрепа для любого (M, g)). Т.ч., уже раз отримали допоміжне Рн. до Тн. Кармана - Адамара.

Ес. 3. Для $(\tilde{M}, \tilde{g}) = M_k^n = S_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^n$ при $k > 0$ (где $n = \dim M$) и люб. пар. геодр. γ з (M, g) з $K(\gamma) \leq k$, закрепа для $K \leq k$, γ має свою першу спряжену до $\gamma(0)$ точку не раньше и не позже люб. пар. геодр. (для большого k) $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow S_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^n$, тогда и $t_0 \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Уже означает, что для любого (M, g) з $K \leq k$ и $\forall p \in M$ $\exp_p \in \text{лок. диффеоморфизм}$ (можно и и

диференціальна невід'ємність) прикладні на $B_{\frac{r}{\sqrt{k}}}(0)$ (де k - фік.
 g_p). (Числені) твердження Бс 1-3 складають Тн. порівняння Мерса-Мендєєва.

Тн. (порівняння Даркса). Нехай (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ - ріманові, $\dim M \leq \dim \tilde{M}$,
 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ і $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$ - лат. пар. геодезичні, $K(\gamma) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma})$
і γ і $\tilde{\gamma}$ ∇ спряшені точки до $\tilde{\gamma}(0)$. Нехай $Y, \tilde{Y}$ - (н.) нормальні
поля вздовж $\gamma, \tilde{\gamma}$ відповідно такі, що $Y(0) = \tilde{Y}(0) = 0$ і
 $|\nabla_{\gamma} Y(0)|_{\gamma(0)} \geq |\nabla_{\tilde{\gamma}} \tilde{Y}(0)|_{\tilde{\gamma}(0)}$. Тоді $\forall t \in [0, a]$
 $|Y(t)|_{\gamma(t)} \geq |\tilde{Y}(t)|_{\tilde{\gamma}(t)}$.

Рем. Ця теорема вимагає неіснуюча лише внутрішніх
спр. точок γ і $\tilde{\gamma}$, як і виможна умова $K(\gamma) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma})$ лише для
 $t \in [0, a)$. Дійсно, тоді можна застосувати Тн. до обмежень
 $\gamma, \tilde{\gamma}, Y$ і $\tilde{Y}$ на $[0, t]$ $\forall t \in [0, a)$ і отримати нерівність
 $|Y| \geq |\tilde{Y}|$ також і при $t=a$ за неперервністю.

Рем. Цю теорему можна сформулювати за невід'ємності й
для полів X з ненульовою дотичною компонентою:

Впр. або гв. Чеeger - Ebin.

Лем. 3 Th. Дайся максимална багата нору. Сол. Дісно, в
нові умови $\uparrow t_0 < \tilde{t}_0$. $\gamma(0) \perp \gamma(t_0)$ співдені $\Rightarrow \exists$ н. л. $\tilde{\gamma} \neq 0$
на γ : $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(t_0) = 0$. Зокрема, $\nabla_{\gamma} \tilde{\gamma}(0) \neq 0$, бо $\tilde{\gamma} \neq 0$, і $\tilde{\gamma}$ нормальне
($\tilde{\gamma} \perp \gamma'$) $\Rightarrow \nabla_{\gamma} \tilde{\gamma} \perp \gamma'$. Оберемо якийсь $\tilde{w} \in T_{\gamma(0)} \tilde{M}$: $\tilde{w} \perp \tilde{\gamma}'(0)$ і
 $|\tilde{w}|_{\gamma(0)} = |\nabla_{\gamma} \tilde{\gamma}(0)|_{\gamma(0)}$. Покладемо $\tilde{\tilde{\gamma}} := \tilde{\gamma}_{0, \tilde{w}}$. Це н. л. уздовж
 $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}(0) = 0 = \tilde{\gamma}(0)$, і $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{\tilde{\gamma}}(0) = \tilde{w}$. Оскільки $\tilde{w} \neq 0$, $\tilde{\tilde{\gamma}} \neq 0$ і
оскільки $\tilde{w} \perp \tilde{\gamma}'(0)$, $\tilde{\tilde{\gamma}} \perp \tilde{\gamma}'$ - нормальне; $|\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{\tilde{\gamma}}(0)|_{\tilde{\gamma}(0)} = |\tilde{w}|_{\tilde{\gamma}(0)} = |\tilde{\nabla}_{\gamma} \tilde{\gamma}(0)|_{\gamma(0)}$,
тобто $\tilde{\tilde{\gamma}}$ і $\tilde{\gamma}$ задов. умови Th. Дайся. Оскільки, $|\tilde{\gamma}| \geq |\tilde{\tilde{\gamma}}|$,
зокрема, $|\tilde{\tilde{\gamma}}(t_0)| \leq |\tilde{\gamma}(t_0)| = 0$. Тобто, $\tilde{\tilde{\gamma}} \neq 0$ - н. л., $\tilde{\tilde{\gamma}}(0) = \tilde{\tilde{\gamma}}(t_0) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \tilde{\tilde{\gamma}}(0) \perp \tilde{\tilde{\gamma}}(t_0)$ співдені для $t_0 < \tilde{t}_0$. ∇ (суперечить умові Сол.).
Тим $\tilde{\tilde{\gamma}} = 0$ очевидно. Зали вивагаємо $\tilde{\tilde{\gamma}} \neq 0$. Тоді:
 $\Rightarrow$ Ф-ція $t \mapsto \frac{|\tilde{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}}{|\tilde{\tilde{\gamma}}(t)|_{\tilde{\gamma}(t)}}^2$ визначена на $(0, a]$ (бо на $\tilde{\gamma} \neq$ мочок,
що співдені до $\tilde{\gamma}(0) \Rightarrow \tilde{\tilde{\gamma}}(t) = 0$ лише при $t = 0$) і $(l-1)$ -и. За
правилом Лопітала (застос. звичи), її границя є 0:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(Y, Y) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0}{\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2g(\nabla_{\tilde{Y}} Y, Y) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0}{2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}, \tilde{Y}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\nabla_{\tilde{Y}} \nabla_{\tilde{Y}} Y, Y) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 + g(\nabla_{\tilde{Y}} Y, \nabla_{\tilde{Y}} Y)}{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}, \tilde{Y}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y})} =$$

$$= \frac{g_{\tilde{Y}(0)}(\nabla_{\tilde{Y}} Y(0), \nabla_{\tilde{Y}} Y(0))}{g_{\tilde{Y}(0)}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}(0), \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}(0))} \geq 1 \text{ за умовою.}$$

Тому остаточно показати, що ця ф-ція не зростає на $[0, a]$ (при $t=0$ вже маємо рівність).

$$0 \leq \frac{d}{dt} \frac{g(Y, Y)}{\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y})} = \frac{2g(\nabla_{\tilde{Y}} Y, Y) \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y}) - g(Y, Y) \cdot 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}, \tilde{Y})}{\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y})^2}$$

можливо що

$$\frac{g(\nabla_{\tilde{Y}} Y, Y)}{g(Y, Y)}(t_0) \geq \frac{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}, \tilde{Y})}{\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y})}(t_0) \text{ для яких } t_0 \in (0, a], Y(t_0) \neq 0.$$

Для кожного такого t_0

$$\frac{g(\nabla_{\tilde{Y}} Y, Y)}{g(Y, Y)}(t_0) = g_{\tilde{Y}(t_0)} \left(\underbrace{\frac{\nabla_{\tilde{Y}} Y(t_0)}{|Y(t_0)|_{\tilde{Y}(t_0)}}}_{\text{норм.}}, \underbrace{\frac{Y(t_0)}{|Y(t_0)|_{\tilde{Y}(t_0)}}}_{\text{норм.}} \right) = g(\nabla_{\tilde{Y}} Z_{t_0}, Z_{t_0})(t_0),$$

де $Z_{t_0} := \frac{Y}{|Y(t_0)|_{\tilde{Y}(t_0)}}$ - менс н. г. узгодовс $\tilde{Y}$, $|Z_{t_0}(t_0)|_{\tilde{Y}(t_0)} = 1$.

Ан-но, $\tilde{Z}_{t_0} := \frac{\tilde{Y}}{|\tilde{Y}(t_0)|_{\tilde{Y}(t_0)}}$ - н. г. узгодовс $\tilde{Y}$, $|\tilde{Z}_{t_0}(t_0)|_{\tilde{Y}(t_0)} = 1$, і

$$\frac{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Y}, \tilde{Y})}{\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Y})}(t_0) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Z}_{t_0}, \tilde{Z}_{t_0})(t_0). \text{ З чимось дорівнює,}$$

$$g(\nabla_{\gamma'} Z_{t_0}, Z_{t_0})(t_0) = [Z_{t_0}(0) = 0] = \int_0^{t_0} g(\nabla_{\gamma'} Z_{t_0}, Z_{t_0})' dt =$$

$$= \int_0^{t_0} (g(\nabla_{\gamma'} Z_{t_0}, \nabla_{\gamma'} Z_{t_0}) + g(\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Z_{t_0}, Z_{t_0})) dt = [Z_{t_0} - \text{n. g.}] = \int_0^{t_0} (g(\nabla_{\gamma'} Z_{t_0}, \nabla_{\gamma'} Z_{t_0}) -$$

$$- g(R(Z_{t_0}, \gamma') \gamma', Z_{t_0})) dt = I_{t_0}(Z_{t_0}, Z_{t_0}),$$

і як-то $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}'} \tilde{Z}_{t_0}, \tilde{Z}_{t_0})(t_0) = \tilde{I}_{t_0}(\tilde{Z}_{t_0}, \tilde{Z}_{t_0})$, де I_{t_0} та $\tilde{I}_{t_0}$ — інтегралні форми $\gamma|_{[0, t_0]}$ і $\tilde{\gamma}|_{[0, t_0]}$ відповідно. Подругуємо ізом. відл. $\varphi: T_{\gamma(0)} M \rightarrow T_{\tilde{\gamma}(0)} \tilde{M}$ так, що $\varphi(\gamma'(0)) = \tilde{\gamma}'(0)$ (як і раніше) і $\phi(Z_{t_0}(t_0)) = \tilde{Z}_{t_0}(t_0)$ для подругування за чим φ як функція $\phi: \mathcal{H}(\gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{\gamma})$. Це можна зробити, бо $Z_{t_0}(t_0)$ і $\tilde{Z}_{t_0}(t_0)$ — ортогональні до $\gamma'(t_0)$ і $\tilde{\gamma}'(t_0)$ відповідно. Перенесемо їх паралельно у $T_{\gamma(0)} M$ і $T_{\tilde{\gamma}(0)} \tilde{M}$ відповідно. Отже, маємо $w \in T_{\gamma(0)} M$ і $\tilde{w} \in T_{\tilde{\gamma}(0)} \tilde{M}$ такі, що $\varphi(w) = \tilde{w}$. Поді $\phi(Z_{t_0})$ — н. г. $\tilde{Z}_{t_0}$ задов. умові Р₄ про екстремальність полів γ і $\tilde{\gamma}$ (як і $\gamma|_{[0, t_0]}$ та $\tilde{\gamma}|_{[0, t_0]}$), бо мають однакові значення при $t=0$ і $t=t_0$, а $\tilde{\gamma}|_{[0, t_0]}$ не має точок, що опрацьовані до $\tilde{\gamma}(0)$, за умовою. Отже,

$$\frac{g(\nabla_{\tilde{\gamma}}, \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})}{g(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma})}(t_0) = g(\nabla_{\tilde{\gamma}}, \tilde{z}_{t_0}, \tilde{z}_{t_0})(t_0) = I_{t_0}(\tilde{z}_{t_0}, \tilde{z}_{t_0}) \geq [\text{lem.}] \geq \tilde{I}_{t_0}(\phi(\tilde{z}_{t_0}), \phi(\tilde{z}_{t_0})) \geq [\text{екстр. н. криві}] \geq \tilde{I}_{t_0}(\tilde{\tilde{z}}_{t_0}, \tilde{\tilde{z}}_{t_0}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}, \tilde{\tilde{z}}_{t_0}, \tilde{\tilde{z}}_{t_0})(t_0) = \frac{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}, \tilde{\tilde{\gamma}}, \tilde{\tilde{\gamma}})}{\tilde{g}(\tilde{\tilde{\gamma}}, \tilde{\tilde{\gamma}})}(t_0),$$

що і потрібно. $\triangle$

Застосування теореми Даркса: порівняння трикутників

Ці позначення - як у наочному розділі. Крім того, для ріманових мн. (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ будемо позначати $K \leq \tilde{K}$ (секційні кривини (M, g) не перевищують секц. кривини $(\tilde{M}, \tilde{g})$), якщо $\forall p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$, площин $\sigma \subset T_p M, \tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ $K(\sigma) \leq \tilde{K}(\tilde{\sigma})$.

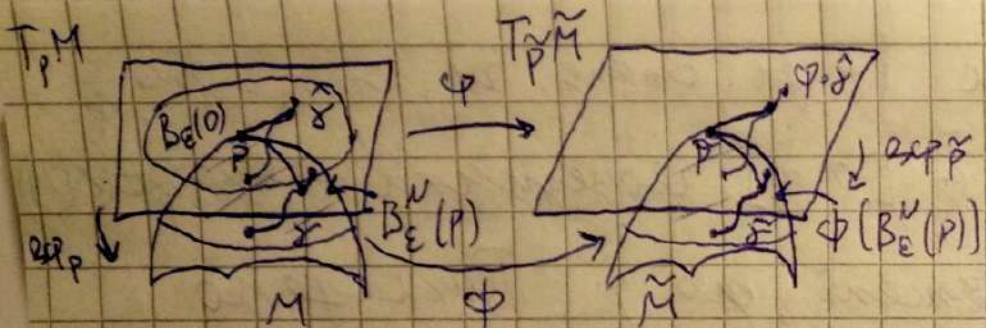
Зокрема, для (M, g) (вигн., $(\tilde{M}, \tilde{g})$) ПСК $k \in \mathbb{R}$ це умови $k \leq \tilde{K}$ (вигн., $K \leq k$). Звідси випливає, що $K(\gamma) \leq \tilde{K}(\tilde{\gamma}) \quad \forall$ пат. пар. геоф. $\gamma: [0, a] \rightarrow M, \tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$. Аж-но розуміємо $K \leq \tilde{K}$, $K \geq \tilde{K}$, $K > \tilde{K}$. Маємо наступний геометричний наслідок Тн. Даркса:

Рн. Нехай (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ - ріманові, $\dim M \leq \dim \tilde{M}$ і $K \leq \tilde{K}$, $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$, $\varphi: T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ - ізометричне вкладення;

$\hat{\gamma}: [0, a] \rightarrow T_p M$ - кусково м. шлях (вигн. спанд. м. стр. на $T_p M \cong \mathbb{R}^n$). Нехай крім того $\forall \tau \in [0, a]$ геодезична $t \mapsto \exp_p t \hat{\gamma}(\tau)$ м. має на $t \in (0, 1]$ точок, що спрямлені до $\tilde{p}$. Покладемо $\gamma := \exp_p \circ \hat{\gamma}$, $\tilde{\gamma} := \exp_{\tilde{p}} \circ \varphi \circ \hat{\gamma}$, вивчаючи, що експоненціальні відображ. $\exp_p$ і $\exp_{\tilde{p}}$ мн. (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ вигн. визначені у точках $\hat{\gamma}([0, a])$ і $\varphi(\tilde{\gamma}([0, a]))$ відповідно. Тоді

$$\ell(\gamma) > \tilde{\ell}(\tilde{\gamma}).$$

Рем. Зокрема, умови Р виконані для $\hat{\gamma}: [0, a] \rightarrow B_\varepsilon(0)$ (евкл. куля м. мн. g_p), де $\varepsilon > 0$ таке, що $B_\varepsilon^M(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ - куляовий норм. окіл p (тобто $\exp_p: B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon^M(p)$ - дифеоморфізм), а $\exp_{\tilde{p}}$ має невідокремлені диференціальні (є лок. дифео-змом) на $\varphi(B_\varepsilon(0)) \subset T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ - евкл. n -вим. кулі $\tilde{g}_{\tilde{p}}$ (або на $\mathbb{R}^n$ $\dim \tilde{M}$ -вим. кулі $T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ радіуса ε). Тоді $\exp_p$ і $\exp_{\tilde{p}}$ визначені, а $t \mapsto \exp_{\tilde{p}} t \varphi(\hat{\gamma}(\tau))$ не має стр. до $\tilde{p}$ точок за доведенням у поперед. курсі, бо $\exp_{\tilde{p}}$ не має сит. точок. У цьому



Випадку визначене маже
 $\phi: \text{B}_E(0) \rightarrow \text{B}_E^N(p) = \exp_p \circ \phi \circ (\exp_p|_{\text{B}_E(0)})^{-1}:$
 $\text{B}_E^N(p) \rightarrow \exp_p(\phi(\text{B}_E(0)))$, і для

нового $\tilde{Y} = \phi \circ Y$ за побудовою. Рн. тоді стверджує, що $\tilde{L}(\tilde{Y}) \leq L(Y)$, тобто ϕ не збільшує довжини кривих. Зокрема, звідси випливає Лн. Римана про многовиди ПСК:

Сол. Нехай (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ - рим. мн. однакової ПСК $k \in \mathbb{R}$, $\dim M = \dim \tilde{M}$. Тоді вони локально ізометричні у наступному сенсі:

$\forall p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M} \exists$ відкр. $U \ni p, \tilde{U} \ni \tilde{p}$ та ізометрія $\phi: (U, g|_U) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{g}|_{\tilde{U}})$.

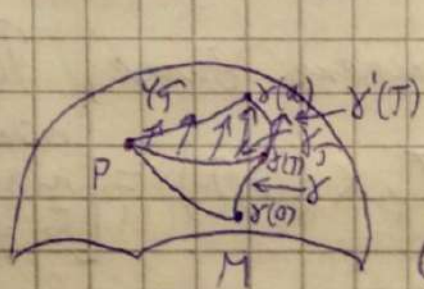
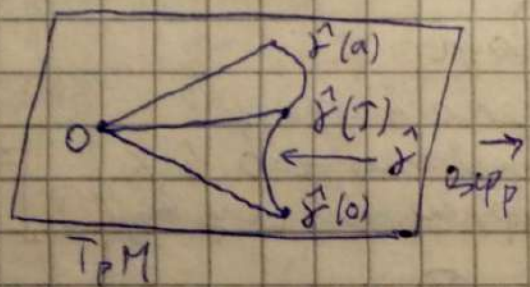
► Нехай $\varepsilon > 0: U := \text{B}_\varepsilon^N(p), \tilde{U} := \text{B}_\varepsilon^N(\tilde{p})$ - кульові нормалі (зокрема, на $\text{B}_\varepsilon(0)$ у $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ $\exp_{\tilde{p}}$ має неперервні диф-ли, бо це дифео-зм).

Нехай ϕ - якість лін. ізометрія $T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$, що $\exists$, бо це евкл. пр-ли однакової вкїрності. Зокрема, тоді ϕ на-

водить $\text{B}_\varepsilon(0)$ у $\text{B}_\varepsilon(0)$ (евкл. кулі $\mathbb{R}^n$ і $\tilde{\mathbb{R}}^n$ відкр.), і визначений дифеомерфізм $\phi := \exp_{\tilde{p}} \circ \phi \circ (\exp_p|_{\text{B}_\varepsilon(0)})^{-1}: U \rightarrow \tilde{U}$.

Оскільки M і $\tilde{M}$ мають рівну ПСК, P_M можна застосувати як до пари $M, \tilde{M}$, так і до $\tilde{M}, M$. ^(і вимірність) Тому $\forall$ куск. н. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$
 $\tilde{\ell}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\ell}(\Phi \circ \gamma) = \ell(\gamma)$, тобто $\Phi: M \rightarrow \tilde{M}$ дійсно є ізометрією $\Delta(\text{loc})$.

⇒ (Рн.) Побудуємо варіацію, проводячи відрізки прямих з 0 до точок



носія $\hat{\gamma}$ у $T_p M$ і переводячи їх у геодезичні M експ. відображенням:
 $\mathcal{B}: [0, 1] \times [0, a] \rightarrow M: (t, T) \mapsto \exp_p t \hat{\gamma}(T)$

(знову маємо як відобр. н.пос. з метрикою; можна вважати, що $0 \notin \hat{\gamma}([0, a])$, якщо це не так, можна "повернути" $\hat{\gamma}$ так, що це змінить $\ell(\gamma), \tilde{\ell}(\tilde{\gamma})$ стільки згідно лемо-Рн.). Отже, $\forall T \in [0, a]$ відр. н.пос. варіації

$\gamma_T: [0, 1] \rightarrow M: t \mapsto \exp_p t \hat{\gamma}(T)$ - геодезична, тобто $\mathcal{B}$ - гео. варіація

Потім $Y_T: t \mapsto d_{(t, T)} \cdot \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)$ - поле дробів уздовж γ_T . А саме,

$$\forall t \quad Y_T(t) = d_{t \hat{\gamma}(T)} \exp_p (t \hat{\gamma}'(T)) = t d_{t \hat{\gamma}(T)} \exp_p \hat{\gamma}'(T) \quad (\text{тут}$$

ототожнили $t \in T_{t \hat{\gamma}(T)}(T_p M)$ з $T_p M$, тому вважало $\hat{\gamma}'(T) \in T_p M = T_0(T_p M) = T_{t \hat{\gamma}(T)}(T_p M) = T_{\hat{\gamma}(T)}(T_p M)$). Зокрема, $Y_T(0) = 0$ (і дійсно, це варіація

из записанных выше кинем.) $\hat{Y}_T(1) = d_{\hat{Y}(T)} \exp_p(\hat{Y}'(T)) =$
 $= (\exp_p \circ \hat{Y})'(T) = \hat{Y}'(T)$. Мы же знаем $\nabla_{\hat{Y}_T} Y_T(0)$, вычислено как
 в одном из Р. н. курсов. Полагая $Y(t, T) := d_{(t, T)} \phi(\frac{\partial}{\partial T})$
 (мыслим $Y_T = Y(\cdot, T)$) и $X(t, T) := d_{(t, T)} \phi(\frac{\partial}{\partial t}) = \hat{Y}'(t) = \phi(t, T)'_t =$
 $= d_{t \hat{Y}(T)} \exp_p(\hat{Y}(T))$ (з урах. отомонотонно вале). Тогда
 $\nabla_{\hat{Y}_T} Y_T(0) = \nabla_X Y(0, T) = \begin{bmatrix} \text{гов. } q\text{-ли} \\ \text{I вариации} \end{bmatrix} = \nabla_Y X(0, T) = \begin{bmatrix} \text{нормально signary} \\ \text{нормально } t=0 \text{ в } X \\ \text{до гиперинвариант } y \text{ на } T \end{bmatrix} =$
 $= \left(\underbrace{d_0 \exp_p(\hat{Y}(T))}_{id_{T, M}} \right)'_T = \hat{Y}'(T)$ (з урах. отомонотонно). Тем самым

$\hat{Y}'_T(0) = X(0, T) = \underbrace{d_0 \exp_p(\hat{Y}(T))}_{id_{T, M}} = \hat{Y}(T)$. За влост. н. л., получена
 компонента Y_T на $\hat{Y}$ вале $Y_T^T(t) = \hat{Y}(T)$ (а + б е) $\hat{Y}'_T(t)$,
 где $a=0$, до $Y_T(0)=0$, и $b = \frac{g_p(\nabla_{\hat{Y}_T} Y_T(0), \hat{Y}'_T(0))}{g_p(\hat{Y}'_T(0), \hat{Y}'_T(0))} = \frac{g_p(\hat{Y}'(T), \hat{Y}'(T))}{g_p(\hat{Y}(T), \hat{Y}(T))}$ $\forall t$

а нормальная — $Y_T^\perp = Y_T - Y_T^T$, и отсюда тем $\in$ н. л. Зокрема,
 за н. Тиражона, $|Y_T^\perp(t)|^2 = |Y_T(t)|^2 - \frac{g_p(\hat{Y}'(T), \hat{Y}'(T))^2}{|\hat{Y}(T)|_p^2} t^2 \forall t$ Так само
 $\nabla_{\hat{Y}_T} Y_T^\perp = \nabla_{\hat{Y}_T} Y_T - \nabla_{\hat{Y}_T} Y_T^T$, зокрема, $|\nabla_{\hat{Y}_T} Y_T^\perp(0)|_p^2 = |\nabla_{\hat{Y}_T} Y_T(0)|_p^2 -$

$|\nabla_{\hat{\gamma}} \dot{\gamma}_T^T(0)|_P^2 = |\hat{\gamma}'(T)|_P^2 - \frac{g_P(\hat{\gamma}'(T), \hat{\gamma}(T))^2}{|\hat{\gamma}(T)|_P^2}$ (можливо квантам,
 проекції $\hat{\gamma}'(T)$ на ортот: генерална до $\hat{\gamma}(T)$).

Аби-но будемо вивчаємо $\tilde{\gamma} : [0,1] \times [0,a] \rightarrow \tilde{M} : (t,T) \mapsto \exp_{\tilde{P}}(t \varphi(\hat{\gamma}(T)))$.
 Вона регулярна, тому $\tilde{\gamma}_T : t \mapsto d_{(t,T)} \tilde{\gamma}(\frac{\partial}{\partial t}) \in \text{n.л.}$ узгодне
 век. $\tilde{\gamma}_T = \tilde{\gamma}(\cdot, T) \forall T \in [0,a]$. Також само, $\tilde{\gamma}_T(t) = t d_{t(\varphi \circ \hat{\gamma})(T)}^{\exp_{\tilde{P}}(\varphi \circ \hat{\gamma})'(T)} =$

$= t d_{t(\varphi \circ \hat{\gamma})(T)}^{\exp_{\tilde{P}}(\varphi(\hat{\gamma}'(T)))} \stackrel{vt}{=} \delta_0 \varphi$ - лінійне. Зокрема, $\tilde{\gamma}_T(0) = 0$ і
 $\tilde{\gamma}_T(1) = (\exp_{\tilde{P}} \circ \varphi \circ \hat{\gamma})'(T) = \tilde{\gamma}'(T)$. Аби-но, гали маємо $\tilde{\gamma}_T^{\perp} \tilde{\gamma}_T(0) = (\varphi \circ \hat{\gamma})'(T)$.

$= \varphi(\hat{\gamma}'(T))$, і $\tilde{\gamma}_T^{\perp}$ - норм. н.л. узгодне $\tilde{\gamma}_T$ для якого $\forall t$
 $|\tilde{\gamma}_T^{\perp}(t)|_{\tilde{\gamma}_T(t)}^2 = |\tilde{\gamma}_T(t)|_{\tilde{\gamma}_T(t)}^2 - \frac{g_{\tilde{P}}(\varphi(\hat{\gamma}'(T)), \varphi(\hat{\gamma}(T)))^2}{|\varphi(\hat{\gamma}(T))|_{\tilde{P}}^2} = |\tilde{\gamma}_T(t)|_{\tilde{\gamma}_T(t)}^2 - \frac{g_P(\hat{\gamma}'(T), \hat{\gamma}(T))^2}{|\hat{\gamma}(T)|_P^2}$.

$\cdot t^2$, бо φ - ізометрія. Крім того, $|\tilde{\gamma}_T^{\perp} \tilde{\gamma}_T^{\perp}(0)|_{\tilde{P}}^2 = |\varphi(\hat{\gamma}'(T))|_{\tilde{P}}^2 - \frac{g_{\tilde{P}}(\varphi(\hat{\gamma}'(T)), \varphi(\hat{\gamma}(T)))^2}{|\varphi(\hat{\gamma}(T))|_{\tilde{P}}^2}$
 $\frac{\varphi(\hat{\gamma}(T))^2}{|\varphi(\hat{\gamma}(T))|_{\tilde{P}}^2} = [\varphi\text{-ізом.}] = |\hat{\gamma}'(T)|_P^2 - \frac{g_P(\hat{\gamma}'(T), \hat{\gamma}(T))^2}{|\hat{\gamma}(T)|_P^2} = |\nabla_{\hat{\gamma}} \dot{\gamma}_T^{\perp}(0)|_P^2$. Тому

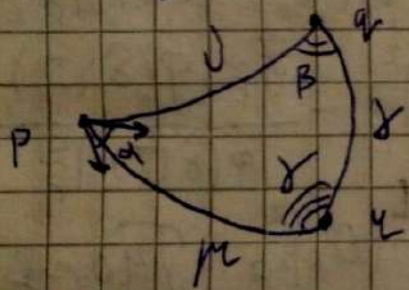
нормальні н.л. $\dot{\gamma}_T^{\perp}$ і $\tilde{\gamma}_T^{\perp}$ задов. умови T_H . Разом (зокрема,
 нескінченна $\tilde{\gamma}_T$ точок, що стянени до $\tilde{\gamma}_T(0) = \tilde{P} \in \text{в умови } P_H$).

Отже, $|Y_T^\perp| \geq |\tilde{Y}_T^\perp|$. Зокрема, $\forall T \in [0, a]$ за гомеоморфізму

$$|\gamma'(T)|_{\gamma(T)}^2 = |Y_T(1)|_{\gamma(T)}^2 = |Y_T^\perp(1)|_{\gamma(T)}^2 + \frac{g_P(\hat{\gamma}'(T), \hat{\gamma}(T))^2}{|\hat{\gamma}(T)|_P^2} \geq |\tilde{Y}_T^\perp(1)|_{\tilde{\gamma}(T)}^2 + \frac{g_P(\hat{\gamma}'(T), \hat{\gamma}(T))^2}{|\hat{\gamma}(T)|_P^2} = |\tilde{\gamma}'(T)|_{\tilde{\gamma}(T)}^2, \text{ тобто}$$

$$l(\gamma) = \int_0^a |\gamma'(T)|_{\gamma(T)} dT \geq \int_0^a |\tilde{\gamma}'(T)|_{\tilde{\gamma}(T)} dT = \tilde{l}(\tilde{\gamma}). \triangle$$

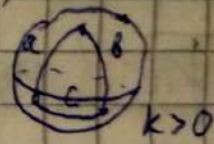
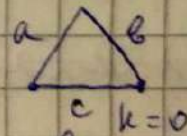
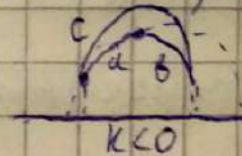
def. Трикутник у рімановану множині (M, g) будемо називати нормально різним, якщо з 3 точок $P, q, r \in M$ (вершин тр-ка) і 3 найкоротших внутрішньої метрики γ, μ, ν , що поєднують $q \rightarrow r, r \rightarrow P, P \rightarrow q$ відповідно.



Кутами (внутрішніми) тр-ка будемо називати кути між його сторонами при параметризації дані від вершини. Так, кут при вершині P —

це кут α між $\mu'(0)$ і $\nu'(0)$, де $\mu: [0, b] \rightarrow M, \nu: [0, c] \rightarrow M, \mu(0) = \nu(0) = P, \mu(b) = r, \nu(c) = q$, і як-то для q, r .

Рем. Сторони тр-ка найкоротші $\Rightarrow$ геодезичні шпальси, зокрема регулярні, тому куты визначені. Сторони можуть не визначатися вертикалями однозначно (не зважаючи про довжини). Але ~~се~~ так для постійної кривини:



Впр. Нехай $k \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ такі, що задов. трьом нерівностям трикутника: $a \leq b+c$, $b \leq c+a$, $c \leq a+b$. Якщо $k > 0$, то нехай крім того $a+b+c < \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$. Тоді у $M_k^2 \exists!$ з точністю до руху трикутник з сторонами a, b, c , що

(тодіо ці ізометрії $M_k^2 \rightarrow M_k^2$),

однозначно визначений своїми вершинами.

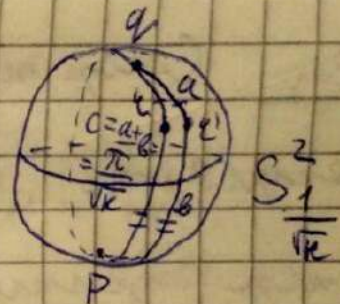
$$\begin{aligned} M_k^n &= S_{\frac{n}{\sqrt{k}}} \text{ при } k > 0, M_0^n = \mathbb{E}^n \\ M_k^n &= M_k^n - \text{на } n \text{ дод. кривизин } k < 0 \end{aligned}$$

Рем. "Однозначність" і "з точністю до руху" тут, звичайно, для простів геодезичних - сторін тр-ка, самі вони визначені однозначно з точністю до заміни параметра. Пів.

Впр. Вірно і для M_k^n $\forall n \geq 2$. У випадку $k > 0$ тр-к $\nexists$ при $a+b+c > \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ і може бути не єдиний при $a+b+c = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, якщо сума двох з довжин a, b, c дорівнює третій:

може дві його вершини - діам. протилежні (Втр.)

Якщо тр-ко однозначно визначений, то одно-
значно визн. її кути



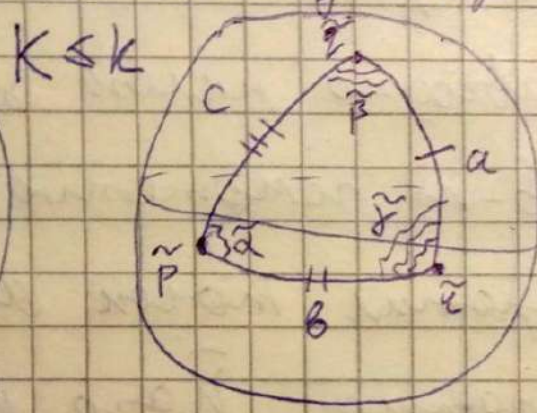
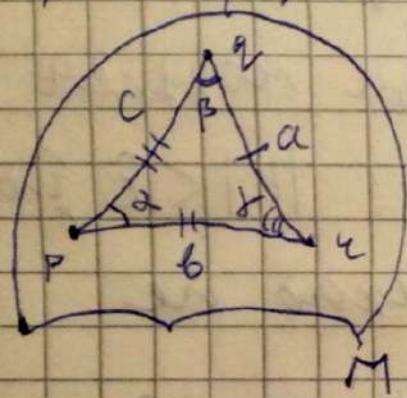
Лн. (порівняння трикутників для кривини, що обмежена зверху).

Нехай (M, g) - рім. мн. секв. кривини $K \leq k$, де $k \in \mathbb{R}$. Нехай
трикутник з вершинами p, q, r , довжинами сторін $d(p, q) = c$,
 $d(q, r) = a$, $d(r, p) = b$ і кутами α, β, γ при p, q, r sign ,
що $\forall$ дві точки на його сторонах (точніше, іс носіях) можна
поеднати єдиною (з точністю до заміни параметра) найкорот-
шого. Якщо $k > 0$, нехай, крім того, $a + b + c < \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$.

Тоді $\forall$ трикутника у M_k^2 з вершинами $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$,
таким же довжинами сторін $\tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{q}) = c$, $\tilde{d}(\tilde{q}, \tilde{r}) = a$, $\tilde{d}(\tilde{r}, \tilde{p}) = b$
і кутами $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ при $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ sign ,
 $\alpha \leq \tilde{\alpha}$, $\beta \leq \tilde{\beta}$, $\gamma \leq \tilde{\gamma}$.

Рем. Нехай d і $\tilde{d}$ - ріманові внутр. м-ли (M, g) і

M_k^2 fig. Th. Залимається фігурою і для M_k^m $\forall m \geq 2$, до
тр-к $\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ лекси у підмножині, що ізометричний M_k^2 .



M_k^2 умова $\exists!$ найкоротших, що
з'єднують точки на сторонах,
виконана, наприклад, для "достат-
ньо малих" трикутників: Ми

доводили, що $\forall p \in M \exists$ фігур. $U \ni p: \forall q, r \in U \exists \varepsilon > 0: U \subset B_\varepsilon^M(q)$ - кульовий пори. окіл q . Це означає, зокрема, що $\forall q, r \in U \exists!$ з точн. до зад. пар. найкоротших, що з'єднують q і r ,
тобто умова виконана $\forall$ тр-ка, що лекси в U . Також вона
виконана $\forall$ тр-ка, якщо (M, g) повний одностов'язний, а
 $k \leq 0$ в силу Th. Кармана-Адамара.

Без дані ~~умови~~ умови твердження теореми може бути
невірним. Див. поверхню з наступної ілюстрації!

M



($y \in \mathbb{R}^3$). Вона гладка, повна і однозв'язна (цир-
на $\mathbb{R}^2$), знакозмінної кривини, яку можна
зробити скільки завгодно малою за модулем,
застосовуючи до пов-ні гомотетію: $|K| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

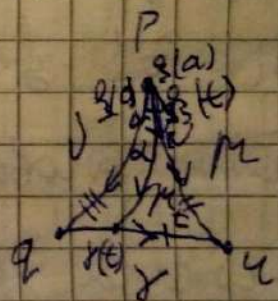
Тр-ка p, q, u - це коло, для сфам. протил. точок якого не
виконуються умови єдиності найкоротшої. Його кутти дор.
 π та більші за кутти відп. тр-ка y середі M_ε^2 .

► (Тн.) Нехай сторони даного тр-ка - пат. парам. геодезичні:

$$\gamma: [0, a] \rightarrow M, \gamma(0) = q, \gamma(a) = u, \ell(\gamma) = a = d(q, u)$$

$$\mu: [0, b] \rightarrow M, \mu(0) = p, \mu(b) = u, \ell(\mu) = b = d(p, u)$$

$$\nu: [0, c] \rightarrow M, \nu(0) = p, \nu(c) = q, \ell(\nu) = c = d(p, q)$$



З умови, $\forall t \in [0, a]$ $p \notin \gamma(t)$ можна з'єднати єдиною

найкоротшою - геодезичною μ_t , що повинна мати пат. парам.

параметризацію $\mu_t(T) = \exp_p T \mu'_t(0)$, $T \in [0, b(t)]$ для якогось
одичинного $\mu'_t(0) = \xi(t) \in T_p M$ (залежна, $\exp_p$ повинне бути

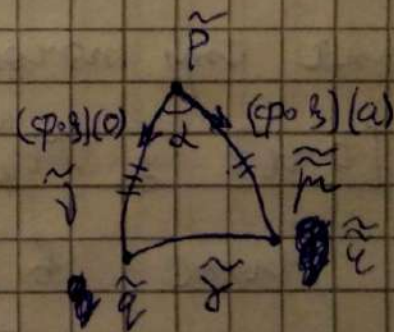
визначене для таких аргументів) де $\xi(0) = v'(0)$, $v(0) = c$,
 $\xi(a) = \mu'(0)$, $v(a) = v$, тобто $\mu_0 = v$, $\mu_a = \mu$. Отже, $\forall t \in [0, a]$
 $\gamma(t) = \exp_p v(t) \xi(t)$, де $\hat{\gamma} := v \xi : [0, a] \rightarrow T_p M$ - деяка гладка
 крива (шлях): $\gamma = \exp_p \circ \hat{\gamma}$

Оскільки усі тр-ки $\tilde{p} \tilde{\gamma} \tilde{c}$ з умови III ізометричні, дост.
 довести твердження для одного з них. Оберемо згусь $\tilde{p} \in M_k^n$
 (де $n = \dim M$) та лін. ізометрію $\varphi: T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} M_k^n$. Зокрема,
 $\varphi \circ \xi : [0, a] \rightarrow T_{\tilde{p}} M_k^n$ - тиск одностична вектор-функція, а кут
 $\min (\varphi \circ \xi)(0) \bar{c} (\varphi \circ \xi)(a)$ дор. куту між $\xi(0) = v'(0)$ і $\xi(a) = \mu'(0)$,
 тобто $\angle$. Покладемо:

$$\tilde{\gamma} := \exp_{\tilde{p}} \circ \varphi \circ \hat{\gamma} : [0, a] \rightarrow M_k^n$$

$$\tilde{\mu} : [0, b] \rightarrow M_k^n : t \mapsto \exp_{\tilde{p}} t (\varphi \circ \xi)(a)$$

$$\tilde{v} : [0, c] \rightarrow M_k^n : t \mapsto \exp_{\tilde{p}} t (\varphi \circ \xi)(0)$$



Тоді $\tilde{\mu}, \tilde{v}$ - лін. парал. геодезичні довжини b і c відп.,
 що у M_k^n є найкоротшими (суданнє з тем. до зм. пар)

мінімальні кінцями (бо для $k \leq 0$ це так $\forall$ геодр., а при $k > 0$ це випливає з умови, оск. $b, c < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ - це менші дуги великих кіл). Для $\tilde{\gamma}$ це $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ і $\tilde{\gamma}(1) = \exp_{\tilde{p}} \circ \varphi(\xi(0)) =$
 $= [\varphi \cdot \text{lin.}] = \exp_{\tilde{p}} \varphi(c\xi(0)) = (\exp_{\tilde{p}} \circ \varphi)(\hat{\gamma}(0)) = \tilde{\gamma}(0)$, а для $\tilde{\mu}$ - ана-по $\tilde{\mu}(0) = \tilde{p}$ і $\tilde{\mu}(b) = \tilde{\gamma}(a)$. Подібно отримали "тр-к"
 у M_k^n з вершинами $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$, сторонами $\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ (де $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ -
 найкоротші геодезичні, а $\tilde{\gamma}$ - взяті каноничні), кутами α
 при $\tilde{p}$ і довжинами двох сторін $b = \tilde{\ell}(\tilde{\mu}) = \tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{r})$ і $c = \tilde{\ell}(\tilde{\nu}) =$
 $= \tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{q})$. За побудовою, $\tilde{\gamma}$ і $\tilde{\gamma}$ мають заг. умови перех. Рн. (умови

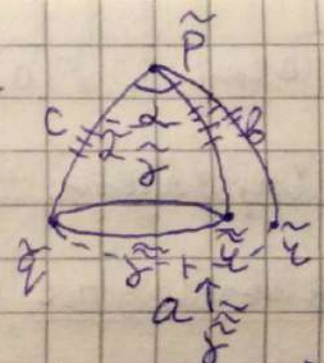
існування стр. торою на геодезичних $\tilde{\mu}_t : T \rightarrow \exp_{\tilde{p}} T \cdot (\varphi \circ \xi)(t)$
 для $t \in [0, a]$ у M_k^n випливає з того, що існує довільно міс-
 тяться мініс b і $c \sqrt{\frac{(R_{\max})}{k}}$ отже $< \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ при $k > 0$; при $k \leq 0$

це завжди так). Поділі за дов. внутр. к-ми і Рн.

$$\tilde{d}(\tilde{q}, \tilde{r}) \leq \tilde{\ell}(\tilde{\gamma}) \leq \ell(\gamma) = a = d(q, r)$$

Подібно довівана найкоротшої $\tilde{\gamma}$ між $\tilde{q}$ і $\tilde{r}$ не

перевинкує a . Якщо не її заміняти на найкоротшу
 $\approx$ довжину a ,
~~з~~ кінцем у $\tilde{c}$, повернувши сторону



довжини b , то кут при $\tilde{p}$ збільшиться
 до $\tilde{\alpha} \geq \alpha$. Тр-к з вершинами $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ і буде потрібним
 нам тр-ком порівняння. А н-по для кутів $\beta, \tilde{\beta}$ і $\gamma, \tilde{\gamma}$.
 Як зауважалося вище, такі тр-ки лежать у 2-вимірних
 (зімком геодезичних) підпросторах M_k^n , що ізометричні
 M_k^2 , тому можемо вважати їх тр-ками M_k^2 . $\triangle$

Рет. Три $k=0$ це доведена можна спростити, зводячи тр-к
 порівняння у евклідовому $T_p M$.

Доведення ап-ного результату для довільних кривих знову є
 несподівано складнішим та потребує додаткової техніки.

Локальні точки та теорема Бернсе

Усі позначення і конвенції - як у манускрі розділає.