

План Якобі та спряжені точки

(M, g) - l-м. п-вим. рімановий многовид, $l \geq 4$, $n \geq 2$, ∇ - ізоморф.

Зб. l-многов. пр. Теорема вважася, що всі геодезичні в ньому

У напрямку з позитивного довільного дов. вектора (туту $\nabla_{\gamma} \gamma = 0$),
def. Варіація $\delta \in C^1([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ зветься геодезичною, якщо $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\gamma_\tau = \delta(\cdot, \tau)$ - геодезична.

Пр. 1. Якщо поле Y уздовж γ задає геодез. варіацію δ (тобто $Y(t) = d_{(t, 0)} \delta(\frac{\partial}{\partial \tau}) \forall t$), то

$$\nabla_{\gamma} \nabla_{\gamma} Y + R(Y, \gamma') \gamma' = 0 \quad (*)$$

Реш. Путь $R(Y, \gamma') \gamma' : t \mapsto R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t)) \gamma'(t)$ - тиск поле уздовж γ .

Тор. з формулювання II вар. довільності з $Y \perp \gamma'$ і закр. кінцями: у цьому випадку вона дор. 0.

► Дов. геодезична ф-ла II вар. у додаткових матеріалах: якщо показати $X(t, \tau) = d_{(t, \tau)} \delta(\frac{\partial}{\partial t})$ і $\hat{Y}(t, \tau) = d_{(t, \tau)} \delta(\frac{\partial}{\partial \tau})$, то це

будуть лише частини до кривих $t \mapsto \delta(t, \tau) = \gamma_\tau(t)$ і $\tau \mapsto$
 $\delta(t, \tau)$ відповідно, $\hat{Y}(\cdot, 0) = Y$.

Тоді можна показати (наприклад за гол. лок. координат), що $\nabla_X \hat{Y} = \nabla_{\hat{Y}} X$ (де диференціювання -

у сенсі геоф. уздовж кривої), і що

$$R(\hat{Y}, X)X = \nabla_{\hat{Y}} \nabla_X X - \nabla_X \nabla_{\hat{Y}} X = \begin{bmatrix} \nabla_X X = \nabla_{\gamma_j'} \gamma_j' = 0, \\ \nabla_{T_0} \gamma_j - \text{век.} \end{bmatrix} = -\nabla_X \nabla_X \hat{Y}.$$

При $T=0$ $X=\gamma'$ і $\hat{Y}=Y$, звідки отримувало потрібне. $\triangle$

Рем. Це не вірно і для $\forall T=T_0$ і $Y=\hat{Y}(\cdot, T_0)$ уздовж геоф. γ_{T_0} .

Випр. Показати, що вірно і обернене (див. Теорема-Залгальер),

лев. $(\ell-1)$ -м. в. поле Y уздовж геодезичної γ , що задов. $(*)$, зветься полем Якобі (уздовж γ).

Рем. Нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ — ортонорм. у $\forall$ точці базис ^{парале} ~~парале~~ ^{парале} полів уздовж γ (як і у доведенні Тм. Майерса, беремо ортонорм. базис у одній точці і паралельно переносимо, подібно продовжуємо його ℓ -ти паралельними полівми). Будемо шукати поле Якобі уздовж γ у вигляді $Y = Y^i E_i$ (тут $Y^i \in C^{\ell-1}(I)$, якщо $\gamma: I \rightarrow M$, $E_i: I \rightarrow TM$, $i = \overline{1, n}$) в силу паралельності E_i , маємо $(\forall i = \overline{1, n})$

$$\nabla_{x^i} Y = (Y^{\bar{i}})' E_{\bar{i}} + Y^{\bar{i}} \nabla_{x^i} E_{\bar{i}} = (Y^{\bar{i}})' E_{\bar{i}},$$

$$\nabla_{x^i} \nabla_{x^j} Y = (Y^{\bar{i}})'' E_{\bar{i}} + (Y^{\bar{i}})' \nabla_{x^j} E_{\bar{i}} = (Y^{\bar{i}})'' E_{\bar{i}}.$$

Потому (*) надубає вигляду:

$$(Y^{\bar{i}})'' E_{\bar{i}} + Y^{\bar{i}} R(E_{\bar{i}}, x') x' = 0. \quad (**)$$

Позначимо $R(E_{\bar{j}}, x') x' = R_{\bar{j}}^i E_{\bar{i}} \quad \forall \bar{j}$, де $R_{\bar{j}}^i \in C^{l-3}(I)$. Маємо:

$$(Y^{\bar{i}})'' + Y^{\bar{j}} R_{\bar{j}}^i = 0, \quad \bar{i} = \overline{1, n}.$$

Це система лінійних ЗОД II порядку з матрицею (до $l \geq 4$) коефіцієнтів. Разом з початковими умовами $Y^{\bar{i}}(t_0) = Y_0^{\bar{i}}; (Y^{\bar{i}})'(t_0) = Y_1^{\bar{i}}, \bar{i} = \overline{1, n}$ для якоїсь $t_0 \in I$ (тобто значеннями $Y^{\bar{i}} \in \nabla_{x^i} Y$ у t_0) вона утворює задачу Коші, у якій $\exists!$ розв'язок на усюму I :

Лем. 1. Нехай $t_0 \in I$. Тоді $\forall$ пара $v, w \in T_{x(t_0)} M \exists!$ таке значіння Y уздовж γ таке, що $Y(t_0) = v$ і $\nabla_{x^i} Y(t_0) = w$. Тобто значіння уздовж γ утворюють $2n$ -вимірний вект. простір над $\mathbb{R}$.
 Дов. рівняння (**) лінійні, $\forall$ н.д. X і Y уздовж

Лема 1.2. Інтегрування вект. простору.
 $\gamma \in \mathcal{A}, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda\gamma + \mu\gamma'$ - менше н.д. уздовж γ . В силу лін. залежності
 розв'язків лін. системи від початкових умов $\in \mathbb{I}$! розв'язку з. Коші,
 відобр. $(v = \gamma(t_0), w = \nabla_{\gamma} \gamma(t_0)) \mapsto \gamma : T_{\gamma(t_0)} M \oplus T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow$
 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{простір н.д.} \\ \text{уздовж } \gamma \end{array} \right\}$ - лінійне і біліній $\Rightarrow$ лін. ізоморфізм, тому
 вимірності цих просторів збігаються. $\triangle$

Лем. Дати за зановуванням внаслідок теор. $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ і ма
 $v, w \in T_{\gamma(0)} M$ позначимо $\gamma_{v,w}$ - н.д. уздовж γ таке, що
 $\gamma_{v,w}(0) = v, \nabla_{\gamma} \gamma_{v,w}(0) = w$.

Р.2. Поля вигляду $\gamma(t) = (b+ct)\gamma'(t), b, c \in \mathbb{R}$ - це в точності
 поля $\mathcal{A}$ іоді уздовж γ , що дотичні до γ .

В Путь "дотичні до γ " означає, що $\gamma = f\gamma'$ для деякої $f \in C^1(I)$.
 Оскільки γ' - парал. уздовж γ , (*) набуває вигляду:

$$f''\gamma' + \underbrace{f R(\gamma', \gamma')}_{=0} \gamma' = 0 \Leftrightarrow f'' = 0 \Leftrightarrow f(t) = b + ct. \triangle$$

Ри.3. $\forall$ поля Якобі Y уздовж X його дотична і нормальна компоненти $Y^T \in Y^\perp$ (можна ортос. проєкції на X' і на орт. доповнення до нього $Y \perp$ можу X' відновити) - мені поля Якобі уздовж X . Зокрема, $Y^T(t) = (b+ct) X'(t)$, $b, c \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow Y^T = \frac{g(Y, X')}{g(X', X')} X'$, де значення g незмінні постійні, а друга похідна залишається, в силу уздовж. зв'язності з g ,
 $g(Y, X')'' = (g(\nabla_{X'} Y, X') + g(Y, \nabla_{X'} X'))' = [X - \text{геог.}] = g(\nabla_{X'} \nabla_{X'} Y, X') + g(\nabla_{X'} Y, \nabla_{X'} X') = [\frac{X - \text{геог.}}{(X)}] = -g(R(Y, X') X', X') = [R] = 0$.

Тр.ч., $Y^T(t) = (b+ct) X'(t)$ - н.д. за Ри.2, а моги і $Y^\perp = Y - Y^T$ - н.д. за лінійністю (Сол.1.) $\triangle$

Сол.2. Якщо $\exists t_0 \neq t_1$ такі, що для н.д. Y уздовж X $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$, то Y ортогональне до X : $Y \perp X'$.

$\Rightarrow$ Дка. лінійна ф-ція, що $= 0$ у двох різних точках, кривова, $Y^T = 0$ за поперед. Ри.3, тоді $Y = Y^\perp$. $\triangle$

Ех. Нехай M -ПСК $k \in \mathbb{R}$, γ -ком. параметризована геодр. γ -судово
 розуміаємо уздовж γ ортотопи γ $\forall$ точки базис $\{E_i\}_{i=1}^n$,
 що схи. з паралельних полів, покладемо тепер $E_n = \gamma'$ (як γ
 гомеоморф. T_n Майєрса). Тоді $\forall \bar{j} = \overline{1, n}$ за описом R для ПСК:
 $R(E_j, \gamma')\gamma' = k \left(g(\gamma', \gamma') E_{\bar{j}} - g(E_j, \gamma') \gamma' \right) = \begin{bmatrix} k E_{\bar{j}}, & \bar{j} = \overline{1, n-1} \\ 0, & \bar{j} = n \end{bmatrix}$, тобто
 γ введеному вище позначенням

$$R_{\bar{j}}^i = \begin{bmatrix} k \delta_{\bar{j}}^i, & \bar{j} = \overline{1, n-1} \\ 0, & \bar{j} = n \end{bmatrix}$$

Тоді рівн. $(**)$ для коэф. н. γ . $\gamma = \gamma^i E_i$ набувають вигляду

$$\begin{cases} (\gamma^i)'' + k \gamma^i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ (\gamma^n)'' = 0. \end{cases}$$

також для $i = \overline{1, n-1}$

$$\gamma^i(t) = \begin{cases} b^i \cos(\sqrt{k}t) + c^i \sin(\sqrt{k}t), & k > 0, \\ b^i + c^i t, & k = 0, \\ b^i \cosh(\sqrt{-k}t) + c^i \sinh(\sqrt{-k}t), & k < 0, \end{cases}$$

i) $\gamma^n(t) = v + ct$, де $v^1, \dots, v^{n-1}, v, c^1, \dots, c^{n-1}, c \in \mathbb{R}$. Позначимо $E := \sum_{i=1}^{n-1} v^i E_i$, $F := \sum_{i=1}^{n-1} c^i E_i$. Вони паралельні до лінійної комбінації паралельних. Зауважимо, що $\gamma^{\perp}(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^{\perp}_i(0) E_i^{(0)} = E(0)$.

$$\nabla_{\gamma} \gamma^{\perp}(0) = \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma^{\perp}_i)'(0) E_i = 0 = \begin{cases} \sqrt{k} F(0), & k > 0, \\ F(0), & k = 0, \\ \sqrt{-k} F(0), & k < 0. \end{cases}$$

Сл. 3. У рим. (M, g) ПСК k пера E якої уздовж геог. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$, що ортогональні їй, мають вигляд

$$\gamma_{v,w}(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{k}t) E(t) + \sin(\sqrt{k}t) F(t), & k > 0, \\ E(t) + t F(t), & k = 0, \\ \cosh(\sqrt{-k}t) E(t) + \frac{t}{\sqrt{-k}} F(t), & k < 0, \end{cases}$$

де E і F — паралельні пера уздовж γ такі, що $E(0) = v$ і

$$F(0) = \begin{cases} \frac{w}{\sqrt{k}}, & k > 0, \\ w, & k = 0, \\ \frac{w}{\sqrt{-k}}, & k < 0. \end{cases}$$

лев. Для геодезичної γ точки $p = \gamma(t_0)$ і $q = \gamma(t_1)$, де $t_0 \neq t_1$, звуться сусідніми точками γ , якщо $\exists$ пера E якої

γ уздовж γ таке, що $\gamma \neq 0$, $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = 0$.

Лем. 3 Соч. 2. γ уздовж випадку $\gamma \perp \gamma'$

Ек. Для множини $\overline{(M, g)}$ ПСК K нехай $\gamma(0) = 0$: $\gamma = \gamma_{0, w} \neq 0$ -

н. л. уздовж геодр. $\gamma: [0, a] \rightarrow M$. Тоді $w \neq 0$ в силу Соч. 1. (інакше $\gamma_{0, w} = 0$), γ позначена Соч. 3. це означає, що $E = 0$: $F \neq 0$

(γ проходить точки, це випливає з $\exists!$ паралельних векторів). Тоді при $k \leq 0$ γ γ не має точки, що спрямовані до $\gamma(0)$, бо γ γ -гін t (для $k=0$) : $\sin(\sqrt{k}t)$ (для $k < 0$) не має нулів крім $t=0$.

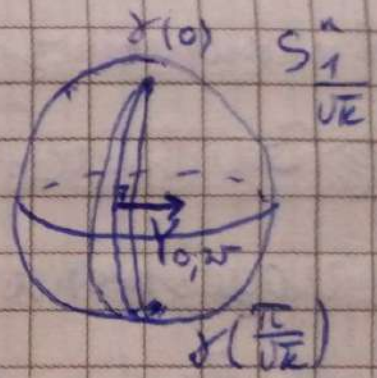
При $k > 0$ це точки $\gamma(\frac{\pi m}{\sqrt{k}})$ $m \in \mathbb{Z}$ (бо $\sin(\sqrt{k}t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi m}{\sqrt{k}}$).

Нехай (M, g) - простір постійної кривини K , майже повний і зв'язний. Зауважимо, що, оскільки γ уздовж випадку (M, g) задов. умовам

Тл. Майерса (див. вище), його діаметр не перевищує $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Оскільки параметризація γ натуральна, рівно на ній мають місце точки, що відірвані від $\gamma(0)$, не більші одної.

Зокрема, на сфері $M^n(k) = S^n_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$ це точка, що
 діаметрально протилежна $\gamma(0)$. У цьому ви-
 падку $Y_{0,w}$ задає геодезичну варіацію з
 великим похибком (і вони усі - найкоротші)



Впр. $\forall$ рімановою (M, g) $\forall$ геодезичної $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ $\exists$ не фіксовані
 кілець скінченна кільк. точок, що сп'ясовані $\gamma(0)$ (див. Бурнаго-
 Зильбергер; див. так же про індексні індексну форму).

Л. 4. Нехай $p \in M$, $v, w \in T_p M$ і $\varepsilon > 0$ таке, що $\forall (t, T) \in [0, a] \times$
 $\times (-\varepsilon, \varepsilon)$ визначене $\sigma(t, T) = \exp_p(t(v + Tw))$. Поді σ - геодезична
 варіація, і $\forall T \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $Y_T := d_{(\cdot, T)} \sigma(\frac{\partial}{\partial T}) \in$ полем длоді
 уздовжс геодез. $\gamma_T = \sigma(\cdot, T)$ з $Y_T(0) = 0$, $\nabla_{\dot{\gamma}_T} Y_T(0) = w$ (можемо
 $Y_{0,w}$ у наших позначеннях) Зокрема, при $T=0$ $Y_{0,w}(t) = \frac{d}{dt} \exp_p(tv)$
 задає н.д. уздовжс $\gamma = \gamma_0: t \mapsto \exp_p(tv)$ (з $\gamma(0) = p$ і $\gamma'(0) = v$).

Реш. Пор. з варіацією з дов. лемми Гаусса. Путь індукований ε

векторов з властивостей $\exp_p$.

► За властивостями $\exp_p$, σ - ℓ -м, і $\forall \tau \gamma_\tau: t \mapsto \exp_p(t(v + \tau w))$ - геодезична; отже, σ - геог. варіація, а γ_τ - н. д. уздовж $\gamma_0 \forall \tau$ (див. Рн. 1. і Рн. після кросу). Тим самим $\forall t$

$\gamma_\tau(t) = \sigma(t, \tau)'_\tau = d_{t(v + \tau w)} \exp_p(tw)$,
зокрема, $\gamma_0(t) = d_{tv} \exp_p(tw)$. Звісно, $\gamma_\tau(0) = \underbrace{d_0 \exp_p(0)}_{\text{id}_{T_p M}} = 0$.
Як у дов. Рн. 1, позн $X(t, \tau) := d_{(t, \tau)} \sigma(\frac{\partial}{\partial t}) = \gamma'_\tau(t)$:

$X(t, \tau) = \sigma(t, \tau)'_t = d_{t(v + \tau w)} \exp_p(v + \tau w)$,
 $\nabla_{\gamma'_0} \gamma_0(0) = \left[\begin{array}{l} \text{позначимо} \\ \hat{\gamma} \bullet (t, \tau) = d_{(t, \tau)} \sigma(\frac{\partial}{\partial \tau}), \\ \text{як у дов. Рн. 1, } \hat{\gamma}(\cdot, \tau) = \gamma_\tau \end{array} \right] = \nabla_X \hat{\gamma}(0, \tau) = \left[\begin{array}{l} \text{матри} \\ \text{говедежна } \varphi\text{-ли} \\ \text{I вар. геог. завб.} \\ \text{у дов. Рн. 1.} \end{array} \right] =$

$= \nabla_{\hat{\gamma}} X(0, \tau) = \left[\begin{array}{l} \text{покладемо вздовж ліг-} \\ \text{ставати } t=0 \text{ в } X, \\ \text{до диференціювання} \\ \text{у напрямку } \tau \end{array} \right] = \left(\underbrace{d_0 \exp_p(v + \tau w)}_{\text{id}_{T_p M}} \right)'_\tau =$

$= (v + \tau w)'_\tau = w$, тобто гімсно $\gamma_\tau = \gamma_{0, w}$ для геодезичної γ_τ (зокрема, $\gamma_0: t \mapsto d_{tv} \exp_p(tw)$ для $\gamma_0: t \mapsto \exp_p(tw)$).

Пр. 5. Нехай $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ - розглянута, і $\exp_{\gamma(0)}$ визначене нульовим на $B_\varepsilon(0)$, де $\varepsilon > |a \gamma'(0)|$ (чим B_ε і $|\cdot|$ - sign. $g_{\gamma(0)}$). Тоді можна $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ співнести $\Leftrightarrow d_{a\gamma'(0)} \exp_{\gamma(0)}$ впропорцями

► За властивостями $\exp_p$, $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, де $p = \gamma(0)$, $v = \gamma'(0)$.

За лев., $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ співнести $\Leftrightarrow a \neq 0$ і $\exists$ нере. дати $Y_{0,w} \neq 0$ узгодно γ так, що $Y_{0,w}(a) = 0$ ($Y_{0,w}(0) = 0$ в силу позначень).

За сумісності н. д. у Лем. 1 і за Пр. 4, маємо $Y_{0,w}(t) = d_{tv} \exp_p(tw)$.

$\Rightarrow$ Пр. 4., знаючи $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ співнести, то $a \neq 0$ і $d_{av} \exp_p(aw) = 0$, де $w \neq 0$ (бо інакше $Y_{0,w} = 0$). Отже, $aw \neq 0$, маємо

$d_{av} \exp_p = d_{a\gamma'(0)} \exp_{\gamma(0)}$ - впропорцений оператор.

$\Leftarrow$ І навпаки, знаючи $d_{av} \exp_p$ впропорцений, то $\exists \tilde{w} \neq 0$ так, що

$d_{av} \exp_p(\tilde{w}) = 0$. Тим уперу $a \neq 0$, бо $d_0 \exp_p = \text{id}_{T_p M}$ невар.

(і про співнесені можна у манеру внаслідку не ігнорувати). Тоді

$Y_{0, \frac{\tilde{w}}{a}}$ - н. д. узгодно γ , $Y_{0, \frac{\tilde{w}}{a}} \neq 0$, бо $\frac{\tilde{w}}{a} \neq 0$, і $Y_{0, \frac{\tilde{w}}{a}}(a) =$

$= d_{\text{ав}} \exp_p(\tilde{w}) = 0$, тому $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$ спряснені. $\triangle$

Сол. 4. Спряснені з $p = \gamma(0)$ точки геодезичної γ не можуть лежати у нормалізованій (зокрема кривовій) оселі p .

$\Rightarrow$ За лев., на норм. оселі $\exp_p$ - дифеоморфізм. $\triangle$

Рем. M геодезично повний у $p = \gamma(0) \Leftrightarrow \exp_p$ визначене на усюму $T_p M$, тому у формулюваннях Рч. 4. і Рч. 5. можна не робити одмовки, що пов'язані з визначеністю ~~на певній частині~~

~~на певній частині~~ Зокрема, це так, коли M повний, за Тн. 1. X - P - Y - Q

Тн. 1. (Якобі). У геодезичної $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ $\exists$ внутрішня точка $\gamma(t)$, $t \in (0, a)$, що спряснена $\gamma(0) \Leftrightarrow \exists$ варіація γ із закріпленими кінцями, що містить деякі довільні, нехай за γ

$\Rightarrow$ Дуб. Д. - З цього додаткові матеріали. $\triangle$

Сол. 5. У найкоротшій $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ не існує внутрішніх точок, що спряснені $\gamma(0)$.

Рем. Подібно в мовях $\underline{T}_n$. Якщо ситуація аналогічна до $\underline{T}_n$.

Майєрса: $\exists$ варіація γ , для якої друга варіація дорівнює $\delta^2 \mathcal{L} < 0$ (це випливає з дов. теореми), і тому $\exists$ майєрса меншої довжини, як завжди близької до γ : γ не є найкоротшою "серед близьких м'ягків".

Ес. Як ми бачили вище, на $M^n(k) = S_{\frac{1}{\sqrt{k}}}^n$ при $k > 0$

спрямлені точки (діаметрально протилежні) $\exists$

для $\forall$ геодезичної довжини $a > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (наприклад,

для пот. парам. це $\gamma(0)$ і $\gamma(\frac{\pi}{\sqrt{k}})$). При цьому існують

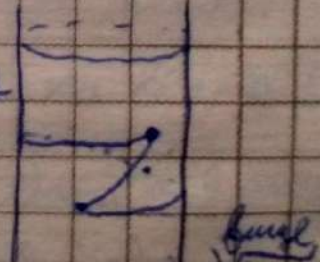
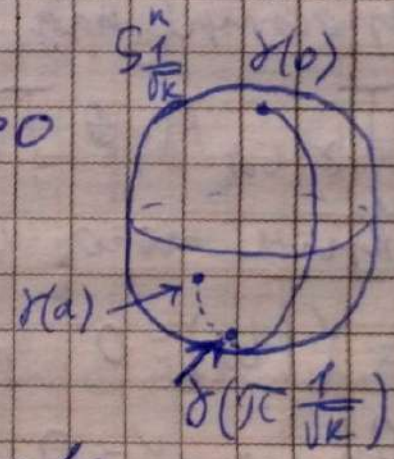
варіації, що зменшують довжину, випливає як з $\underline{T}_n$. Якщо, тож і з $\underline{T}_n$ Майєрса.

Ек. Також, як бачили, у многовидах ПСК $k \leq 0$ спрямлені точки $\#$.

(нічого подібного, що це не тільки для пот. кривих), тому

усі геодезичні - найкоротші "серед близьких" (це випл. і

просто з ф. м. II вар.), але не обов'язково найкоротші (див. приклад циліндра).



Рм 6. $\forall$ неспряженіх точок $\gamma(t_0)$ і $\gamma(t_1)$ розглянемо γ ,
 $t_0 \neq t_1$, $\forall$ векторів $v_0 \in T_{\gamma(t_0)} M$, $v_1 \in T_{\gamma(t_1)} M \exists!$ криву
Якоби Y уздовж γ таке, що $Y(t_0) = v_0$, $Y(t_1) = v_1$.

$\Rightarrow$ За Сол. 1., н. л. уздовж γ імовірно $\mathbb{Z}_n$ -вимірний вект.
простір над $\mathbb{R}$. Крива Ψ - відображення з цього пр-сту у
 $T_{\gamma(t_0)} M \oplus T_{\gamma(t_1)} M : Y \mapsto (Y(t_0), Y(t_1))$. Очевидно, воно лінійне.
Крім того, це лін. іскрива : якщо $\Psi(Y) = 0$, то $Y(t_0) =$
 $= Y(t_1) = 0$, тому $\uparrow$ якщо $Y \neq 0$, то $\gamma(t_0)$ і $\gamma(t_1)$ спряжені.
Отже, $Y = 0$. Оскільки Ψ - лін. іскрива простору однакової
вимірності $\mathbb{Z}_n$, це лін. ізоморфізм, і Ψ^{-1} дає потрійну
визначеність. $\triangle$

Кривовиди кривини, що обмежена зверху

Путь кривої (M, g) - n -вим. $(\ell-1)$ -и. рим. мн. $n \geq 2, \ell \geq 4, \nabla, R$ як - як наміне.

Рн. Якщо секційна кривина рим. кривовида (M, g) негодатна ($K \leq 0$ у наших позн.), то $\forall$ його геодезична не містить спряжених точок.

$\Rightarrow$ Нехай γ - крив. (M, g) , Y - поле Якобі уздовж γ , $f := |Y|^2 = g(Y, Y)$.

Позн $f'' = (2g(\nabla_{\gamma'} Y, Y))' \stackrel{\text{(уздовж зв'язності } \nabla \text{ з } g)}{=} 2g(\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y, Y) + 2g(\nabla_{\gamma'} Y, \nabla_{\gamma'} Y) =$

$= \left[\begin{array}{l} \text{рівняння} \\ \text{поля Якобі} \end{array} \right] = -2g(R(Y, \gamma') \gamma', Y) + 2|\nabla_{\gamma'} Y|^2 \geq 0$, бо $\forall t$

з області визн. γ значення першого доданку ≤ 0 - це або

0, коли $Y(t) \in \gamma'(t)$ колінеарні, або $-2K_{\gamma(t)}(\gamma(t)) \cdot (g_{\gamma(t)}(Y(t), Y(t)) \cdot$

$g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) - g_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t))^2) \geq 0$ в іммеру внаслідок,

де $\sigma(t) := \text{span}\{Y(t), \gamma'(t)\}$ - площина у $T_{\gamma(t)} M$ за лев. сенс. кривини та кривої.

Оскільки для $(\ell-1)$ -и. f маємо $f \geq 0, f'' \geq 0$ -

f - від опукла, і тоді якщо $\exists t_0 \neq t_1$ такі, що $Y(t_0) = Y(t_1) = 0$, то

$f(t_0) = f(t_1) = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow Y = 0$, тому спряж. точок γ не існує. $\triangle$

def. Якщо повний однозв'язний рімановий многовид (M, g) має • недоводимо самої кривини ($K \leq 0$), він зветься простором Адамара. ex. $M^n(K)$ при $K \leq 0$; поверхні в E^3 : шербатичний параболоїд, повні однозв'язні лінійні поверхні (наприклад, гелікоїд).

Th. ~~Карман~~ (Карман-Адамар). Якщо (M, g) - n -вимірний простір Адамара, то M диффеоморфний R^n , причому в якості диффеоморфізму можна взяти $\exp_r : T_r M \rightarrow M \quad \forall r \in M$.

Крім того, $\forall$ геодезична $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ - це єдина (з можливістю до зміни параметра) найкоротша, що з'єднує $\gamma(0)$ і $\gamma(a)$.

- 1 J. Cheeger, D. Ebin. Comparison theorems in Riemannian geometry.
- 2 D. Burago, B. Zakharenko. Введение в риманову геометрию.
- 3 D. Trnka, B. Klenke, B. Meyer. Риманова геометрия в целом.

Углеродна форма

(M, g) - l -м. n -вим. римановий многовид, $l \geq 4$, $n \geq 2$, ∇ - його рим. зв-сть, R - тензор кривини. Вважаємо, що усі координати x параметризовані з постійним $|x'|$, так що $\nabla_x x' = 0$ (x - l -мажор).

def. Кусково $(l-1)$ -м. поле Y уздовж шляху $\gamma \in C^l([a, b], M)$ зв. $Y \in C([a, b], TM)$: $\exists$ розбиття $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$: $\forall i = \overline{1, m} \quad Y|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^{l-1}([t_{i-1}, t_i], TM)$: $\forall t \in [a, b] \quad Y(t) \in T_{\gamma(t)} M$.

Rem. Зокрема, можна розглядати кусково м. поля Y які Y уздовж гео. γ , для яких умова $\nabla_x \nabla_x Y + R(Y, x') x'$ виконана на $\forall$ ^(констант) проміжку гладкості, але за замовчуванням продовжуємо вважати поля Y які гладкими.

Лем. $\forall$ н.д. Y, Z узгоднас вог. γ . $g(\nabla_\gamma Y, Z) = g(Y, \nabla_\gamma Z)$ поспіліве.

► Косігна цього варузу дорівнює

$$\begin{aligned} g(\nabla_\gamma Y, Z)' - g(Y, \nabla_\gamma Z)' &= \left[\begin{array}{c} 3 \text{ членів} \\ \nabla \text{ і } g \end{array} \right] = g(\nabla_\gamma \nabla_\gamma Y, Z) + g(\nabla_\gamma \nabla_\gamma Z) \\ &- g(\nabla_\gamma Y, \nabla_\gamma Z) - g(Y, \nabla_\gamma \nabla_\gamma Z) = \left[\begin{array}{c} \text{def} \\ \text{n.d.} \end{array} \right] = -g(R(Y, \gamma')\gamma', Z) + g(Y, R(Z, \gamma')\gamma') \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{сметуна} \\ R \end{array} \right] = -g(R(Z, \gamma')\gamma', Y) + g(R(Z, \gamma')\gamma', Y) = 0. \triangle \end{aligned}$$

Лем. Осн. лінійні комбінації кусково н.д. узгоднас γ тес є тасами н.д., вони утворюють (в. вч.) векторний простір над $\mathbb{R}$, позначено його $\mathcal{K}(\gamma)$. Тодя, що ортогональні до γ' у T таси, і такі н.д. Y , що $Y(a) = Y(b) = 0$ (де $\gamma: [a, b] \rightarrow M$), утворюють підпростори у $\mathcal{K}(\gamma)$, позн. їх $\mathcal{K}^\perp(\gamma) \subset \mathcal{K}_0(\gamma)$. Вчн, $\mathcal{K}_0^\perp(\gamma) := \mathcal{K}^\perp(\gamma) \cap \mathcal{K}_0(\gamma)$.

def. Індексною формою ~~на кривій~~ геодезичного н.д. $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ зветься $I: \mathcal{K}(\gamma) \times \mathcal{K}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$I(Y, Z) := \int_a^b (g(\nabla_\gamma Y, \nabla_\gamma Z) - g(R(Y, \gamma')\gamma', Z)) dt.$$

Рн. I - симетрична білінійна форма на $\mathcal{K}(\gamma)$ (і на $\mathcal{K}^\perp(\gamma), \mathcal{K}_0(\gamma), \mathcal{K}_0^\perp(\gamma)$).
В $\mathcal{K}$ для під інтеграла принаймні кусково неперервна, тас

$I(Y, Z)$ визначено $\forall$ куск. м. Y, Z . Відмінністю надається властивостей лінійності $g, \nabla: R$, симетричність - з симетриєю $g: R$. $\triangle$

Rem. $\forall Y \in X_0^1(X)$

$$I(Y, Y) = \int_a^b (g(\nabla_{x'} Y, \nabla_{x'} Y) - g(R(Y, x') x', Y)) dt$$

$\in$ групу варіацій $\frac{d^2}{ds^2} \ell(\gamma_s) \big|_{s=0}$ дорівнює Y для варіації $\sigma: [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ (взагалі кажучи, кусково гладкої для визначення длб варіації) такої, що $Y(t) = d_{(t,0)} \sigma(\frac{\partial}{\partial s}) \forall t$ з закріпленими кінцями (де $\gamma_s := \sigma(\cdot, s) \forall s$). Скасно, це так для варіації $\sigma(t, s) := \exp_{x(t)}(sY(t))$, що побудована за допомогою векторних полів.

Rem. За умовою узгодженості $g: V$, $g(\nabla_{x'} Y, \nabla_{x'} Z) = g(\nabla_{x'} Y, Z)' - g(\nabla_{x'} \nabla_{x'} Y, Z) \forall Y, Z \in X(X)$, маємо

$$I(Y, Z) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{x'} Y, Z) \big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_a^b g(\nabla_{x'} \nabla_{x'} Y + R(Y, x') x', Z) dt =$$

$$= g(\nabla_{x'} Y, Z) \big|_a^b + \sum_{i=1}^{m-1} g(\nabla_{x'} Y(t_i-0) - \nabla_{x'} Y(t_i+0), Z(t_i)) - \int_a^b \dots dt,$$

де розбиття $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$: $\forall \bar{i} = \overline{1, m}$ $Y, Z \in C^{l-1}([t_i, t_{i+1}], TM)$. Зокрема, для кожного Y групи ~~на~~ го-
данск зориває 0, для $Z \in \mathcal{H}_0(\gamma)$ -перший, для дея a . Y -
третій (в загальному сенсі)

Р. Дана форма I на $\mathcal{H}_0(\gamma)$ є нульовою (магнет) перів $\mathcal{H}_0(\gamma)$.
 $Y \in \text{Ker } I|_{\mathcal{H}_0(\gamma) \times \mathcal{H}_0(\gamma)} \stackrel{\text{дв.}}{\Leftrightarrow} \forall Z \in \mathcal{H}_0(\gamma) \quad I(Y, Z) = 0 \Leftrightarrow Y - \text{н. д.}$

В. випливає з поперед. Рем.

$\Rightarrow$ Отже, нехай $Y \in \text{Ker } I|_{\mathcal{H}_0(\gamma) \times \mathcal{H}_0(\gamma)}$. Покладемо спочатку $Z := f(\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y + R(Y, \gamma') \gamma') \in \mathcal{H}_0(\gamma)$, де $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ - крива магнет q -гін m ма,
що $f(t_i) = 0 \quad \forall \bar{i} = \overline{0, m}$ і $f|_{[t_{i-1}, t_i]} > 0 \quad \forall \bar{i} = \overline{1, m}$ (i магнет)

для розбиття $[a, b]$ на проміжки магнеті Y як у Рем. :

$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$. Тоді за умовою i Рем.

$$0 = I(Y, Z) = - \int_a^b f g (\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y + R(Y, \gamma') \gamma', \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y + R(Y, \gamma') \gamma') dt,$$

звідки $\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} Y + R(Y, \gamma') \gamma' = 0$ на пром. магнеті Y , тобто
 Y - н. д. в загальному сенсі. Тоді покладемо

Z - ~~функція~~ функція з $X_0(x)$ має, що $Z(t_i) = \nabla_{x_i} Y(t_i - 0) - \nabla_{x_i} Y(t_i + 0) \quad \forall \quad i = \overline{1, n-1}$. Прогі з Лем. за умовою і доведення.

$$0 = I(Y, Z) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{x_i} Y(t_i - 0) - \nabla_{x_i} Y(t_i + 0), \nabla_{x_i} Y(t_i - 0) - \nabla_{x_i} Y(t_i + 0))$$

тоді $\nabla_{x_i} Y(t_i - 0) = \nabla_{x_i} Y(t_i + 0) \quad \forall \quad i \Rightarrow Y$ гладке. $\triangle$

Лем. I невикористана на $X_0(x) \Leftrightarrow$ кінці x не є спряженими Рн (екстремальна властивість порів'янок). Нехай $x: [a, b] \rightarrow M$.

~~невикористана~~ доведення доведення, яка не містить того, що спряжені з $x(a)$, Y - (гладке) н.д. уздовж x , $Z \in X(x)$, $Y(a) = Z(a) = 0 \quad ; \quad Y(b) = Z(b)$. Прогі $I(Y, Y) \leq I(Z, Z) \quad ; \quad I(Y, Y) = I(Z, Z) \Leftrightarrow Y = Z$ (зокрема, Z гладке).

$\Rightarrow$ Нехай $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $T_{x(a)} M$. Поміаємо що $i = \overline{1, n} \quad Y_i := Y_0 + e_i$ - (н.) н.д. має, що $Y_i(a) = 0, \nabla_{x_i} Y_i(a) = e_i$ (вони $\exists!$ за доведеним у поперед. курсі). Прогі $\{Y_i(t)\}_{i=1}^n$ - базис $T_{x(t)} M \quad \forall t \in [a, b]$.

Дійсно, нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R} : \lambda_i Y_i(t) = 0$. В силу лінійності залежності розв'язків лін. системи 3×3 від початкових

умов, моги $Y_{0,\lambda^i e_i}(t) = \lambda^i Y_{0,e_i}(t) = 0$. Оскільки $Y_{0,\lambda^i e_i}(a) = 0$ і на γ немає точок, що відповідають $\gamma(a)$, н.д. $Y_{0,\lambda^i e_i} = 0 \Rightarrow \lambda^i e_i = 0$.
~~Враховуючи умови $Y_{0,\lambda^i e_i}(a) = 0$ і $Y_{0,\lambda^i e_i} = 0$ на γ , маємо $\lambda^i = 0$ для всіх i .~~ $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $\Rightarrow \lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$.

Тому $\{Y_i(t)\}_{i=1}^n$ lin. незал. $\Rightarrow [\dim T_{\gamma(a)} M = n] \Rightarrow$ базис.

Отже, $Z = \varphi^i Y_i$ для деяких кусково гладких $\{\varphi^i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ (це вірно і при $t=a$, бо $Z(a) = Y_i(a) = 0 \forall i$). ^{можна також помітити $\varphi^i(a) = 0$} П.ч. $\nabla_{\gamma} Z = (\varphi^i)' Y_i + \varphi^i \nabla_{\gamma} Y_i$. Покладемо $P := (\varphi^i)' Y_i$ - куск. неперервні узгоджені γ , $Q := \varphi^i \nabla_{\gamma} Y_i$ - куск. гладкі узгоджені γ (і вони обидва гладкі на проміжках гладкості Z). Згадуємо, що в силу лем. $\forall i, j = 1, n$ $g(\nabla_{\gamma} Y_i, Y_j) - g(Y_i, \nabla_{\gamma} Y_j)$ постійна, а отже $= 0$, бо $Y_i(a) = Y_j(a) = 0$. Звісно за узгоджені $g \in \mathcal{D}$.

$g(Q, Z)' = (\varphi^i \varphi^j g(\nabla_{\gamma} Y_i, Y_j))' = (\varphi^i)' \varphi^j \overbrace{g(\nabla_{\gamma} Y_i, Y_j)}^{g(Y_i, \nabla_{\gamma} Y_j)} + \varphi^i (\varphi^j)' \overbrace{g(Y_i, \nabla_{\gamma} Y_j)}^{g(\nabla_{\gamma} Y_i, Y_j)}$
 $+ \varphi^i \varphi^j g(\nabla_{\gamma} \nabla_{\gamma} Y_i, Y_j) + \varphi^i \varphi^j g(\nabla_{\gamma} Y_i, \nabla_{\gamma} \nabla_{\gamma} Y_j) = [Y_i - \text{n.д.}] = 2(\varphi^i)' \varphi^j g(Y_i, \nabla_{\gamma} Y_j) -$
 $- \varphi^i \varphi^j g(R(Y_i, \gamma') \gamma', Y_j) + \varphi^i \varphi^j g(\nabla_{\gamma} Y_i, \nabla_{\gamma} \nabla_{\gamma} Y_j) = 2g(P, Q) - g(R(Z, \gamma') \gamma', Z) +$
 $+ g(Q, Q)$ Тому

$$g(\nabla_{\gamma'} Z, \nabla_{\gamma'} Z) = g(P+Q, P+Q) = g(P, P) + 2g(P, Q) + g(Q, Q) = g(P, P) +$$

$$+ g(Q, Z)' + g(R(Z, \gamma') \gamma', Z), \text{ оскільки}$$

$$I(Z, Z) = \int_a^b (g(\nabla_{\gamma'} Z, \nabla_{\gamma'} Z) - g(R(Z, \gamma') \gamma', Z)) dt = \int_a^b g(P, P) dt + g(Q, Z) \Big|_a^b \geq$$

$$\geq [g(P, P) \geq 0] \geq g(Q, Z) \Big|_a^b = [Z(a)=0] = f^i(b) f^j(b) g(\nabla_{\gamma'} Y_i(b), Y_j(b)) \stackrel{(*)}{=}$$

$$В силу ограниченности, $f^i(b) Y_i - (м.)$ н. д., поэтому $f^i(b) Y_i(a) = 0 = Y(a)$ и $f^i(b) Y_i(b) = Z(b) = Y(b)$. Оск. $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ не сопряжены,$$

$$в силу единственности функ. н. д. значениями Y и Z несвязанные точки (увб. непрерыв. функ.), $f^i(b) Y_i = Y$, и ~~$\nabla_{\gamma'} Y = f^i(b) \nabla_{\gamma'} Y_i$~~ , тогда$$

$$\stackrel{(*)}{=} g(\nabla_{\gamma'} Y(b), Y(b)) = [Y(a)=0] = g(\nabla_{\gamma'} Y, Y) \Big|_a^b = \left[\begin{smallmatrix} \text{ненр} \\ \text{Рем} \end{smallmatrix} \right] = I(-Y, Y).$$

$$\text{Оскільки гіпербола } I(Z, Z) \geq I(Y, Y), \text{ і рівність досягається} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b g(P, P) dt = 0, \text{ тоді } (f^i)' Y_i = P = 0 \text{ на всіх проміжках}$$

$$\text{значення. Оск. } \text{~~на всій області визначення}~~ \text{ } \forall t \neq a$$

$$\{Y_i(t)\}_{i=1}^n - \text{базис } T_{\gamma(t)} M, (f^i)' = 0, \text{ тоді } f^i \text{ постійні на всіх}$$

$$\text{проміжках м. а оскільки на } [a, b] \text{ в силу неперервності } \forall i = \overline{1, n} \text{ тоді}$$

$$Z = f^i Y_i = f^i(b) Y_i = Y. \triangle$$