

Простір (група) Тейзенберга:

$M = \mathbb{R}^3$ з мод. координатами (x, y, z) . Поча ~~Поча~~
 $\{X := \frac{\partial}{\partial x}, Y := \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}, Z := \frac{\partial}{\partial z}\}$

утворюють базис $T_p M \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \forall p$.

Визначимо ріманову м-ку $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ умовою ортонормованості $\{X, Y, Z\}$ у $\forall$ точці:

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = \langle Z, Z \rangle = 1,$$

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle = 0.$$

(вона мажна, бо X, Y, Z мажні). Обчислимо її ріманову зв'язність ∇ за ф-лою Котуха.

Спочатку знайдемо функції d_i :

$$[X, Y] = \frac{\partial}{\partial x} (1) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (x) \frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) (1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = Z.$$

$$\text{Ан-но, } [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \left(\underbrace{X(\langle Y, Z \rangle)}_0 + \underbrace{Y(\langle Z, X \rangle)}_0 - \underbrace{Z(\langle X, Y \rangle)}_0 + \underbrace{\langle [X, Y], Z \rangle}_Z - \underbrace{\langle [Y, Z], X \rangle}_0 + \underbrace{\langle [Z, X], Y \rangle}_0 \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\langle \nabla_X Y, X \rangle = \left[\begin{array}{l} \text{покажи добутки} \\ X, Y, Z \text{ постійні, тому} \\ \text{при першій мтені सबнеги} = 0 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\langle [X, Y], X \rangle}_Z - \right.$$

$$\left. - \underbrace{\langle [Y, X], X \rangle}_{-Z} + \underbrace{\langle [X, X], Y \rangle}_0 \right) = 0.$$

$$\langle \nabla_X Y, Y \rangle = 0, \text{ бо } \langle Y, Y \rangle = 1 \Rightarrow 0 = \langle Y, Y \rangle' =$$

$$= 2 \langle \nabla_x Y, Y \rangle.$$

$$\text{п.ч.}, \quad \nabla_x Y = \frac{1}{2} Z$$

∇ -дег сурьма, мөрү

$$\nabla_Y X = \nabla_x Y - [X, Y] = \frac{1}{2} Z - Z = -\frac{1}{2} Z.$$

$$\langle \nabla_x Z, X \rangle = 0, \text{ so } [X, X] = [X, Z] = 0 \text{ y op. K.}$$

$$\langle \nabla_x Z, Y \rangle = [\langle Z, Y \rangle = 0] = -\langle Z, \nabla_x Y \rangle = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} Z$$

$$\langle \nabla_x Z, Z \rangle = 0, \text{ so } \langle Z, Z \rangle = 1$$

$$\text{Омнел, } \nabla_x Z = -\frac{1}{2} Y$$

$$\text{i } \nabla_Z X = \nabla_x Z - [X, Z] = -\frac{1}{2} Y.$$

$$\langle \nabla_Y Z, X \rangle = [\langle Z, X \rangle = 0] = -\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \nabla_Y Z, Y \rangle = 0, \text{ so } [Y, Y] = [Y, Z] = \frac{1}{2} Z \text{ y op. K.}$$

$$\langle \nabla_Y Z, Z \rangle = 0, \text{ so } \langle Z, Z \rangle = 1.$$

$$\text{п.ч.}, \quad \nabla_Y Z = \frac{1}{2} X, \text{ i } \nabla_Z Y = \nabla_Y Z - [Y, Z] = \frac{1}{2} X.$$

$$\langle \nabla_X X, X \rangle = 0, \text{ so } \langle X, X \rangle = 1$$

$$\langle \nabla_X X, Y \rangle = [\langle X, Y \rangle = 0] = -\langle X, \nabla_X Y \rangle = 0$$

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle = [\langle X, Z \rangle = 0] = -\langle X, \nabla_X Z \rangle = 0$$

$\begin{matrix} \text{"}\frac{1}{2}Z\text{"} \\ \text{"}\frac{1}{2}Y\text{"} \end{matrix}$

Отже, $\nabla_X X = 0$.

Аналог, $\nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0$ (аналог.)

Зокрема, інтегральні траєкторії цих ^{одноточкових} полів - геодезичні. Наприклад, для

Z це $\gamma(s) = (x_0, y_0, s)$ - верт. прями:
 $\gamma' = \frac{\partial}{\partial s} = Z$.

Знайдемо на ній пари спряж. точок. Для цього достатньо шукати пара знайти, що
 $\perp \gamma' = Z$, тоді будемо

$$W = fX + gY$$

Тоді $\nabla_{\gamma'} W = f'X + f \nabla_Z X + g'Y + g \nabla_Z Y =$

$$= f'X - \frac{1}{2}fY + g'Y + \frac{1}{2}gX = (f' + \frac{1}{2}g)X + (g' - \frac{1}{2}f)Y.$$

Аналог, $\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} W = (f'' + \frac{1}{2}g')X - \frac{1}{2}(f' + \frac{1}{2}g)Y +$
 $+ (g'' - \frac{1}{2}f')Y + \frac{1}{2}(g' - \frac{1}{2}f)X = (f'' + g' - \frac{1}{4}f)X +$
 $+ (g'' - f' - \frac{1}{4}g)Y.$

Рівняння перів знайти:

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} W + R(W, \gamma') \gamma' = 0$$

Тоді $R(W, \gamma') \gamma' = R(fX + gY, Z)Z =$

$$\begin{aligned}
 &= f R(X, z)z + g R(Y, z)z = f(\nabla_x \nabla_z z - \\
 &- \nabla_z \nabla_x z - \nabla_{[X, z]} z) + g(\nabla_y \nabla_z z - \nabla_z \nabla_y z - \\
 &- \nabla_{[Y, z]} z) = \\
 &= f(0 - \nabla_z(-\frac{1}{2}Y) - 0) + g(0 - \nabla_z(\frac{1}{2}X) - 0) = \\
 &= \frac{1}{4}fX + \frac{1}{4}gY.
 \end{aligned}$$

т.ч., получ. н. д.:

$$(f'' + g')X + (g'' - f')Y = 0$$

$$\begin{cases} f'' = -g' \\ g'' = f' \end{cases}$$

$$f''' = -g'' = -f' \quad \text{и т.д.}$$

$$f' = C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta$$

$$f = C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta + C_3$$

$$g' = f'' = -C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta$$

$$g = C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta + C_4$$

$$\forall \beta_0 \quad W(\beta_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C_3 = -C_1 \sin \beta_0 + C_2 \cos \beta_0 \\ C_4 = -C_1 \cos \beta_0 - C_2 \sin \beta_0 \end{cases}$$

Период 2π : $\forall \beta_0 \quad \gamma(\beta_0 + 2\pi)$ совпадает с $\gamma(\beta_0)$. Таким $\forall$ заданной кривой период, меньший $> 2\pi$ не $\in$ наименьшим.