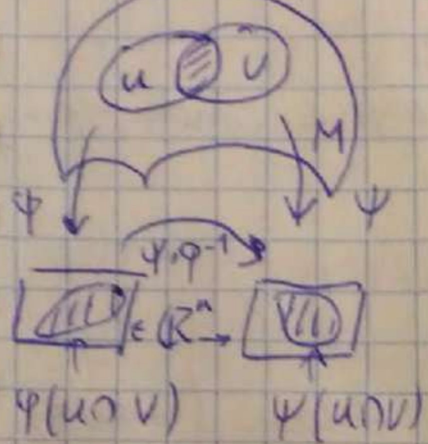
def n-вимірним ($n \in \mathbb{Z}_+$) многовидом (топологічним) будемо називати хаусдорфовий з ($\leq$) зліченною

базою топологічний простір M такий, що $\forall p \in M$
$\exists$ відкрите $U \ni p$ і гомеоморфізм $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$
(n наз. вимірністю M: $n = \dim M$)
<u>Rem.</u> $\mathbb{R}^n$ тут можна замінити на відкр. кулю $B^n \subset \mathbb{R}^n$ (або на будь-яку $V \subset \mathbb{R}^n$: V гомеоморфна $\mathbb{R}^n$), отримаємо екв. означення.
<u>def</u> Пара (U, φ) з попереднього <u>def.</u> зветься картою M, U - носієм карти (координатним околом), φ - коорд. відображенням, якщо $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $x^i: U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ звуться локальними координатами, що відповідають цій карті. Набір карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ зветься атласом M, якщо $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
<u>def</u> Нехай (U, φ), (V, ψ) - карти M. $U \cap V \neq \emptyset$. Відображення переходу (заміни координат) від першої карти до другої зветься $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$



<u>def.</u> Атлас $\mathcal{A}$ зветься k-гладким (де $k \in \mathbb{Z}_+$ або $k = \infty$), якщо $\forall\, (U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ таких, що $U \cap V \neq \emptyset$,

$$\psi\circ\varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U\cap V), \psi(U\cap V))$$

<u>Rem.</u> Це буде k-диффеоморфізм відкр. підмножин $\mathbb{R}^n$.

<u>def.</u> Два k-гл. атласи $\mathcal{A}$ і B многовиду M наз. еквівалентними, якщо $A \cup B$ – k-гл. атлас.

<u>Впр.</u> Це відношення еквівалентності.

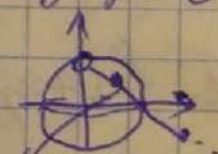
<u>def.</u> k-гладкою структурою на многовиді M зветься клас еквівалентності k-гл. атласів M; пара $(M, [\mathcal{A}])$ де $[\mathcal{A}]$ – k-гл. структура на многовиді M, зветься k-гладким многовидом

<u>Rem.</u> $\forall$ k-гл. стр. (атлас, многовид) є l-гладкою для $l \le k$, зокрема $\forall$ многовида $\exists$ (тривіальна) 0-гл. стр.

$\forall$ атлас - 0 - гл. і $\forall$ два еквівалентні.

<u>Ex. 1.</u> $\mathbb{R}^n$ - n - вимірний ∞ - гл, $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ задає стандартну гладку стр.

<u>2.</u> S^n - n - вимірний ∞ - гл. : $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, стандартна гл. стр. задається атласом з 2 карт (стереогр. проекції)



<u>3.</u> M, N - k - гладкі многовиди $\Rightarrow$ $M \times N$ - k - гл. многовид (<u>Впр.</u>) Наприклад, n - вимірний тор $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ - ∞ - гладкий (і взагалі $\dim M \times N = \dim M + \dim N$),

<u>4.</u> M - n - вимірний k - гладкий, $U \subset M$ - відкрите $\Rightarrow$ U - n - вимірний k - гладкий многовид (<u>Впр.</u>)

<u>5.</u> $\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (n - вимірний дійсний проективний простір) - простір прямих, що проходять через 0.

$\mathbb{R}P^n = \{(x^1 : \ldots : x^{n+1})\}$, де $(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = [(x^1, \ldots, x^{n+1})]$.

$(x^1:\dots:x^{n+1}) = (\lambda x^1:\dots:\lambda x^{n+1})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Або: $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$:  – простір пар діаметрально протилежних точок S^n.

Це n-вимірний ∞-гл. многовид, станд. гладка структура задається атласом $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$, де $U_i = \{(x^1:\dots:x^{n+1}) \mid x^i \neq 0\}$, $\varphi_i(x^1:\dots:x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$.

(комплексний проективний простір)

Впр. Перевірити, що це ∞-гл. атлас. Що таке $\mathbb{C}P^n$? Чи є воно гл. многовидом? Якої вимірності?

def. Нехай M, N – K-гл. многовиди. Неперервне $F: M \to N$ наз. K-гладким, якщо $\forall p \in M$ і $\forall$ карт (U, φ) і (V, ψ) із якихось атласів гладких структур M і N відповідно таких, що $p \in U$, $F(p) \in V$ відображення $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ – K-гладке.

Дотичний простір і диференціал

Нехай M - k - гладкий многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.

<u>def</u> Дотичним вектором M в $p \in M$ будемо називати відображення

$$v : \left\{ \begin{matrix} \text{карти } (U,\varphi) \\ \text{гладкої структури } M \\ \text{такі, що } p \in U \end{matrix} \right\} \to \mathbb{R}^n$$

таке, що якщо $v((U,\varphi)) = (v^1, \ldots, v^n)$, а $v((\tilde{U},\tilde{\varphi})) = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^n)$, то $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\tilde{v}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p)\, v^j \qquad (*)$$

далі не пишемо

де $(x^1, \ldots, x^n)$, $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ - лок. коорд., що відп. (U,φ) і $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ відповідно, а $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial (\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p))$ - часткові похідні відображень переходу.

<u>Rem.</u> Тобто $(\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n) = (\tilde{x}^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \tilde{x}^n(x^1, \ldots, x^n))$

Rem 3 (*) вимагає, що значення v достатньо задати в одній карті (при цьому значення в ∀ парі карт узгоджені за правилом (*) - Впр.). Зокрема, якщо це значення $= 0$ в одній карті, воно $= 0$ і ∀ іншої (і в цьому випадку пишемо $v = 0$)

def Лінійні операції над дотичними векторами в p задаються наступним чином:

$$(v + w)((U, \varphi)) := v((U, \varphi)) + w((U, \varphi)),$$

$$(\lambda v)((U, \varphi)) := \lambda \cdot v((U, \varphi)),$$

де v, w - дот. вектори в p, $\lambda \in \mathbb{R}$, (U, φ) - карта з $p \in U$

Rem. В силу лінійності (*) $v + w$ і λv - також дотичні вектори в p (коректно визначені).

Cor. Дотичні вектори в p утворюють векторний простір (підпростір у просторі всіх відображень з множини карт в околі p у $\mathbb{R}^n$)

def. Цей простір зветься дотичним простором (до) M у p і позначається T_pM.

Rem. У $T_p(M,U)$ вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ відповідає $U_{u^i}(p)$.

def Похідною функції $f \in C^k(M)$ у напрямку вектора $v \in T_pM$ (у точці p) зветься

$$v(f) := v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in \mathbb{R},$$

де $(x^1, \dots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U,φ), $p \in U$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (як ми бачили, це $\Leftrightarrow v((U,\varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$), і $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$ – спрощене позначення.

Рч. Це означення коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – інша карта з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ і $v = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$. Тоді

$$\tilde{v}^i \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = [(*)] = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = \begin{bmatrix}\text{розписуємо}\\ \text{позначення}\end{bmatrix} =$$

$$= v^j \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \begin{bmatrix}\text{диф.}\\ \text{композиції}\end{bmatrix} =$$

$$= v^j \frac{\partial (f \circ \cancel{\tilde{\varphi}^{-1}} \circ \cancel{\tilde{\varphi}} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \ \triangle$$

def. Нехай $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – гладка крива в M, $t_0 \in (a,b)$: $\gamma(t_0) = p$. Тоді дотичним вектором γ в t_0 зветься

$$\gamma'(t_0) := (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M,$$

де $(x^1, \dots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U, φ), $p \in U$, $(\gamma^1, \dots, \gamma^n) := \varphi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ – лок. задання γ

якщо $\gamma'(t_0) \neq 0$, γ наз. регулярною в t_0 (і регулярною, якщо вона рег. $\forall t_0$)

Рч. Це озн. коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

$\triangleright$ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – інша карта в околі p з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$, і $(\tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^n) := \tilde{\varphi} \circ \gamma = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$. Тоді $\forall\ i = \overline{1,n}$

$$(\tilde{\gamma}^i)'(t_0) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j} (\varphi(\underbrace{\gamma(t_0)}_{p})) ((\varphi \circ \gamma)^j)'(t_0) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) (\gamma^j)'(t_0)$$

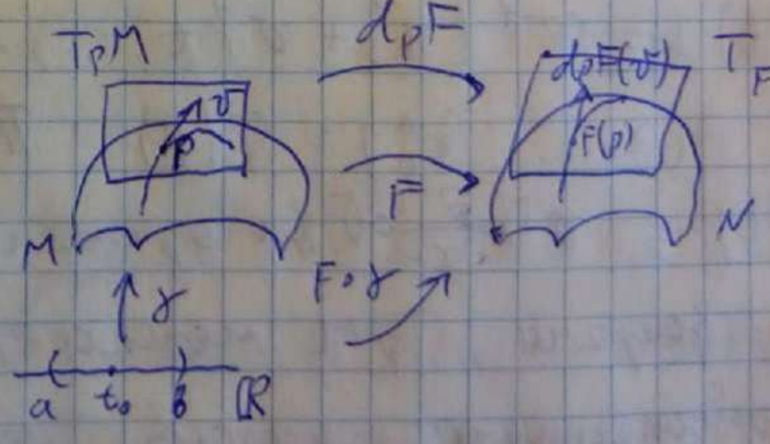
тобто $\gamma'(t_0) : (U, \varphi) \mapsto ((\gamma^1)'(t_0), \dots, (\gamma^n)'(t_0))$ задовольняє $(*)$ і визначає елемент $T_p M$ з розкладенням по $\frac{\partial}{\partial x^i}$ з **def.** $\triangleleft$

кривах, що проходять через p: ми вважаємо $\gamma \sim \mu$, якщо $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$ і $\forall f \in C^k(M)$ $(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$.

Тобто є 3 способи означення дотичного вектору: через лок. координати, через диференціювання і через криві.

<u>def.</u> Нехай M, N – k-гладкі, $F \in C^k(M, N)$, $k \geq 1$. Для $p \in M$ диференціал F у p $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ визначається наступним чином:

$\forall v \in T_pM$ нехай $v = \gamma'(t_0)$, де $\gamma \in C^k((a,b), M)$ з $\gamma(t_0) = p$.



Тоді

$$d_pF(v) := (F \circ \gamma)'(t_0)$$

<u>Rem.</u> γ існує в силу попер. <u>Рч.</u>

Тензори в точці

Нехай M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$, $l, m \in \mathbb{Z}_+$

<u>def.</u> l-коваріантним і m-контрваріантним тензором в точці $p \in M$ ((l,m)-тензором, тензором валентності (l,m)) зветься $(l+m)$-лінійне відображення

$$T : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \times \underbrace{T_pM^* \times \ldots \times T_pM^*}_{m} \to \mathbb{R}$$

<u>Rem</u> Тобто $\forall\, v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T_pM^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{1,l}$, $w_i \in T_pM$

$T(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, \alpha_m) = \lambda T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha_m) + \mu T(v_1, \ldots, w_i, \ldots \alpha_m)$

і $\forall\, j = \overline{1,m}$, $\beta_j \in T_pM^*$

$T(v_1, \ldots, \lambda \alpha_j + \mu \beta_j, \ldots, \alpha_m) = \lambda T(v_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) + \mu T(v_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_m)$.

<u>Rem</u> Очевидно, лінійність зберігається при лінійних комбінаціях відображень: якщо T, S – (l,m)-тензори, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\lambda T + \mu S : (v_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \lambda T(v_1, \ldots, \alpha_m) + \mu S(v_1, \ldots, \alpha_m)$ –

тех (l,m)-тензор.

<u>Соч.</u> (l,m)-тензори у p утворюють векторний простір.

<u>Def.</u> Він позначається $T_pM^l_m$ або $\underbrace{T_pM^*\otimes\ldots\otimes T_pM^*}_{l}\otimes\underbrace{T_pM\otimes\ldots\otimes T_pM}_{m}$

(Детальніше про конструкцію тензорного добутку векторних просторів див., наприклад, А.И. Кострикин, Ю.И. Манин, Линейная алгебра и геометрия).

<u>Ex.</u> $\underline{T_pM^0_0}$ традиційно ототожнюють з $\mathbb{R}$ (лін. відображення $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) – скаляри.

$\underline{T_pM^1_0}$ – лінійні функціонали $\alpha: T_pM\to\mathbb{R}$, тобто $\alpha\in T_pM^*$ (1-форми).

$\underline{T_pM^l_0}$ – l-лінійні $\alpha:\underbrace{T_pM\times\ldots\times T_pM}_{l}\to\mathbb{R}$ (l-форми).

$\underline{T_pM^0_1}$ – лінійні $T_pM^*\to\mathbb{R}$, тобто елементи двічі спряженого простору $T_pM^{**}\simeq T_pM$: при цьому канонічному ізоморфізмі вектору $v\in T_pM$ відповідає функціонал від 1-форм $v: T_pM^*\to\mathbb{R}$: $v(\alpha):=\alpha(v)$.

$\underline{T_pM^1_1}$ – білінійні $A : T_pM \times T_pM^* \to \mathbb{R}$. Цей простір канонічно ізоморфний простору лінійних операторів на T_pM: оператору $A : T_pM \to T_pM$ відповідає білінійне $A(v, \alpha) := \alpha(A(v))$ $\forall v \in T_pM, \alpha \in T_pM^*$. Впр. Це ізоморфізм.

$\underline{T_pM^l_1}$ – $(l+1)$-лінійні $T : \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{l} \times T_pM^* \to \mathbb{R}$. Ан-ко операторам, цей простір ізоморфний простору векторнозначних l-лінійних форм $\underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{l} \to T_pM$: якщо T – така форма, то відповідний $T \in T_pM^l_1$ задається умовою
$T(v_1, \dots, v_l, \alpha) := \alpha(T(v_1, \dots, v_l))$ $\forall v_1, \dots, v_l \in T_pM$, $\alpha \in T_pM^*$.
Впр. Це ізоморфізм.

def Нехай $T \in T_pM^l_m$, $S \in T_pM^k_s$. Їхнім тензорним добутком зветься $T \otimes S \in T_pM^{l+k}_{m+s}$, що визначений умовою
$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{l+k}, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+s}) := T(v_1, \dots, v_l, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \cdot S(v_{l+1}, \dots, v_{l+k}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+s})$
$\forall v_1, \dots, v_{l+k} \in T_pM$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+s} \in T_pM^*$.

Тензорні розшарування і тензорні поля

M - k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

__Def.__ (l,m)-тензорним розшаруванням M зветься (формальне) об'єднання $TM^l_m := \bigcup_{p \in M} T_pM^l_m$. Зокрема, $TM := TM^0_1$ зветься дотичним розшаруванням M.

__Rem.__ Ел-ти TM^l_m зручно записувати у вигляді пар:

$$TM^l_m = \{(p,T) \mid p \in M, T \in T_pM^l_m\}$$

Позначимо через $\pi : TM^l_m \to M : (p,T) \mapsto p$ т.зв. канонічну проекцію.

__Rem.__ Нехай $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ - атлас (з гладкої структури) M і $\forall \alpha \in A$ $\varphi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ - відповідні лок. координати. Тоді $\forall$ $(p,T) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ (тобто такого, що $p \in U_\alpha$) T має розклад $(*)$ у відп. базисі. Покладемо $\forall \alpha \in A$

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{n+n^{l+m}} : (p, T = T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l} dx^{i_1}_\alpha \otimes \dots \otimes dx^{i_l}_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}_\alpha} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}_\alpha}) \mapsto$$
$$\mapsto (\underbrace{\varphi_\alpha(p)}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{(T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l})}_{\mathbb{R}^{n^{l+m}}}).$$

переходу $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$. Оскільки вони k-гладкі, A – k-гладкий. $\triangle$

Впр. TM^l_m з топологією з Рч. хаусдорфовий і має ($\leq$) зчисл. базу.

Сл. TM^l_m має структуру $(k-1)$-гладкого $(n+n^{l+m})$-вимірного многовиду.

Впр. Ця топологія і гладка структура не залежить від вибору вихідного атласу M (а лише від топології та гл. структури M).

Rem. Зокрема, TM – $2n$-вимірний мн.

При $M = \mathbb{R}^n$ можна взяти вихідний атлас $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ і відповідне ψ_α встановлює дифеоморфізм (∞-гл.) $T(\mathbb{R}^n)^l_m \cong \mathbb{R}^{n+n^{l+m}}$.

Ан-но для відкритих $U \subset \mathbb{R}^n$: $TU^l_m \cong U \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}$ (Впр.)

def (l,m)-тензорним полем на M (перерізом TM^l_m) зветься $T: M \to TM^l_m$ таке, що $\pi \circ T = id_M$.

Rem. Тобто $\forall\ p \in M \quad T: p \mapsto T_p \in T_pM^l_m$.

Оскільки $T_pM^l_m$ – векторний простір, до перерізів можна векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^r(M)$.

Rem. При $\dim M > 0$ цей простір ∞-вимірний $(\forall\, l, m, r)$.

Rem. TM^l_m – приклад поняття векторного розшарування.

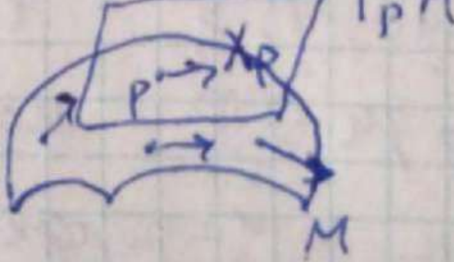
Детальніше про такі об'єкти див., наприклад, М.М. Постников, Дифференциальная геометрия (Лекции по геометрии, семестр IV), А.С. Мищенко. Векторные расслоения и их применение.

Ex. $\forall f \in C^k(M)\ \forall p \in M\ \ d_p f \in T_pM^* = T_pM^1_0$ і локально $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i$. Тому $df : p \mapsto d_p f$ визначає $(k-1)$-гладке $(1,0)$-тенз. поле (1-форму), що локально задається $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Властивості векторних полів

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.

def. $(0,1)$-тензорне поле на M $X : M \to TM^0_1 = TM$ зветься векторним полем на M.



Зат. Тобто $X: p \mapsto X_p \in T_pM^0_1 = T_pM$. Для лок. координат $(x^1, .., x^n)$ на U $\forall p \in U$ $X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, де $X^i: U \to \mathbb{R}$ - ф-ції (лок. координати X). Т.ч., $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, де $\frac{\partial}{\partial x^i}$ тепер позначають і поля на U: $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$. $X \in C^r(M, TM)$ ($\in$ r-гладким вект. полем) $\Leftrightarrow X^i \in C^r(U)$, $i = \overline{1,n}$ $\forall$ лок. координат. r-гладкі в.п. на M утворюють вект. простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^r(M)$. Позначимо його через $\mathcal{X}^r(M)$. Тут $r = \overline{0, k-1}$.

Озн. Нехай $X \in \mathcal{X}^r(M)$, $f \in C^l(M)$, де $l = \overline{1,k}$. Похідною f за X (у напрямку X) зветься $X(f): p \in M \mapsto X_p(f) \in \mathbb{R}$.

Зат. Локально (у введених вище позначеннях) $X(f)\Big|_U = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, тому $X(f) \in C^{\min(r, l-1)}(M)$. $\underbrace{\text{Крім того}}_{\text{Зокрема, для конст. } f = \lambda \in \mathbb{R}\ X(\lambda) = 0}$, в силу властивостей диференціювання за X_p $\forall p \in M$ маємо $\forall f, g \in C^l(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$X(\lambda f + \mu g)(p) = X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g) = (\lambda X(f) + \mu X(g))(p),$$

тобто $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$. У правило Лейбніца:

ф-ції x^i й визначені лише локально.

<u>def.</u> Нехай гладкість многовиду $k \geq 2$. Дужкою Лі векторних полів $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$, $r \geq 1$, зветься

$$[X, Y] : f \in C^k(M) \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

<u>Rem.</u> $X(f), Y(f) \in C^r(M) \Rightarrow [X, Y](f) \in C^{\min(r, r-1)}(M) = C^{r-1}(M)$.
Тобто ми визначили поле $[X, Y] \in \mathcal{X}^{r-1}(M)$ через диференціювання, як пояснювалося у попер. <u>Rem.</u> Це можна зробити в силу:
<u>Твр.</u> $[X, Y] : f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ дійсно задає лінійне $C^k(M) \to C^{r-1}(M)$, що задовольняє $(*)$.

<u>Rem.</u> Часто пишуть $[X, Y] = XY - YX$, де множення означає композицію диференціювань.

<u>Rem.</u> Знайдемо локальне задання дужки Лі у лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ на U: якщо $[X, Y]|_U = [X, Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $\forall\, i = \overline{1, n}$

$$[X, Y]^i = [X, Y](x^i) = X(Y(x^i)) - Y(X(x^i)) \ominus$$

Форми на многовиді

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

__def.__ r-гладкою l-формою на M ($r = \overline{0, k-1}$, $l \in \mathbb{Z}_+$) зветься r-гладке $(l, 0)$-тензорне поле $\alpha : M \to TM^l_0$ на M.

__Rem.__ Тобто $\forall p \in M$ $\alpha_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \to \mathbb{R}$ – l-лінійна форма:

$\alpha_p(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, v_l) = \lambda \alpha_p(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_l) + \mu \alpha_p(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_l)$

$\forall i = \overline{1, l}$, $v_1, \ldots, v_i, w_i, \ldots, v_l \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (при $l = 0$ $\alpha_p \in \mathbb{R}$, тобто $\alpha \in C^r(M)$ – ф-ція). У лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ на U:

$\alpha|_U = \alpha_{i_1 \ldots i_l} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l}$, де $\alpha_{i_1 \ldots i_l} \in C^r(U)$ $\forall i_1, \ldots, i_l = \overline{1, n}$

Тоді $\forall v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $p \in U$, якщо $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1, l}$, то:

$\alpha_p(v_1, \ldots, v_l) = \alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) dx^{i_1}(v_1) \ldots dx^{i_l}(v_l) = \alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) v_1^{i_1} \ldots v_l^{i_l}$.

Зокрема, $\alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) = \alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$.

__Ex.__ $\forall f \in C^{r+1}(M)$ $df : p \mapsto d_pf$ – r-гл. 1-форма, і локально $df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Зам. ч-ні. l-форми на M утворюють вект. простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^\infty(M)$. Будемо його позначати $\mathcal{X}^{l,\infty}(M)$.

Пн. Нехай $\alpha \in \mathcal{X}^{l,\infty}(M)$. Визначимо відображення

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^\infty(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^\infty(M)}_{l} \to C^\infty(M) \ : \ \alpha(X_1, \ldots, X_l)(p) := \alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_l)_p)$$

$\forall X_1, \ldots, X_l \in \mathcal{X}^\infty(M)$, $p \in M$. Це відображення l-лінійне відн. множення на ф-ції з $C^\infty(M)$ (у т.ч. константи $\in \mathbb{R}$), тобто є l-лінійною формою на модулі $\mathcal{X}^\infty(M)$ над $C^\infty(M)$.

▷ l-лінійність випливає з побудови: $\forall i = \overline{1,l}$, $X_1, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_l \in \mathcal{X}^\infty(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, $\forall p \in M$:

$$\alpha(X_1, \ldots, fX_i + gY_i, \ldots, X_l)(p) = \alpha_p((X_1)_p, \ldots, f(p)(X_i)_p + g(p)(Y_i)_p, \ldots, (X_l)_p) =$$
$$= f(p)\alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_i)_p, \ldots, (X_l)_p) + g(p)\alpha_p((X_1)_p, \ldots, (Y_i)_p, \ldots, (X_l)_p) =$$
$$= (f\alpha(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_l) + g\alpha(X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_l))(p).$$

Це дійсно відображення у $C^\infty(M)$, бо, якщо у довільних

Ріманова метрика

- Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. Введение в риманову геометрию.
- Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы [redacted] дифференциальной геометрии.

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

<u>Def.</u> Рімановою метрикою на M зветься $(k-1)$-гладка симетрична [redacted] 2-форма g на M ($g \in S^2(M)$) така, що $\forall p \in M$ g_p додатньо визначена. Пара (M, g) тоді зветься рімановим многовидом.

<u>Rem.</u> Тобто $\forall p$ $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ – білінійна, $g_p(v, w) = g_p(w, v)$ $\forall v, w \in T_pM$ і $g_p(v, v) > 0$ для $\forall v \neq 0$. Отже, g_p – скалярний добуток на T_pM, а g – гладке поле скалярних добутків на M.

Якщо зрозуміло про яку g йдеться, говорять просто про ріманові мн. M.

<u>Rem.</u> У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U:

$$g|_U = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = g_{ij}\, dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} (dx^i)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij}\, dx^i dx^j ,$$

де $g_{ij} \in C^{k-1}(U)$, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ $\forall\, i,j = \overline{1,n}$.

Ex. 1. $\mathbb{R}^n$ зі стандартною евклідовою структурою: $\forall p \in \mathbb{R}^n$ ототожнюємо $T_p\mathbb{R}^n$ з $\mathbb{R}^n$ і покладемо для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (у глобальних координатах $(x^1, \dots, x^n)$):

$g_p(v, w) := \langle v, w \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i w^i$ (тобто координати декартові)

Тобто $g_{ij} = \delta_{ij}$ $\forall\, i,j$ глобально, і це ∞-гладка ріман. м-ка.

У подальшому цей рімановий многовид будемо позначати E^n.

2. Модель Пуанкаре (у півпросторі) n-вимірного гіперболічного простору (Лобачевського): $H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ з метрикою

$g := \frac{1}{(x^n)^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (dx^i)^2$. Це ∞-гладка ріманова м-ка.

def. Нехай M і $\overline{M}$ – k-гл. многовиди, $k \geq 1$. $\varphi \in C^k(M, \overline{M})$ зветься зануренням, якщо $\forall\, p \in M$ ранг $d_p\varphi = \dim M$.

Тоді пара (M, φ) зветься підмноговидом у $\overline{M}$ (k-гладким).

Rem. φ – занурення $\Leftrightarrow \forall p \in M$ $d_p\varphi$ – лін. ін'єк. $\Rightarrow \dim M \leq \dim \overline{M}$

def. Якщо $\dim M = \dim \overline{M} - 1$, підмн. (M, φ) зветься гіперповерхнею.

Rem Це узагальнення поняття підмноговиду (M, φ) у $\mathbb{R}^{n+q}$: регулярність φ якраз і означає, що $\operatorname{rank} d_p\varphi = n = \dim M$. Також це узагальнення регулярних кривих $\gamma : (a,b) \to M$: $\operatorname{rank} d_t\gamma = 1 \iff d_t\gamma \neq 0 \iff \gamma'(t) \neq 0$ $(\forall t \in (a,b))$.

Pr. Якщо (M, φ) - підмноговид у $\overline{M}$, а $(\overline{M}, \overline{g})$ - ріманів, то $g := \varphi^*\overline{g}$ - ріманова м-ка на M.

▷ Як і вище, вважаємо $M, \overline{M}, \varphi$ k-гладкими, $\overline{g}$ $(k-1)$-гладкою. За властивостями кодиференціала, тоді g - $(k-1)$-гл. симетрична 2-форма на M. Згадаємо, що за def. $\forall p \in M\ \forall v, w \in T_pM$ $g_p(v,w) = \overline{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(v), d_p\varphi(w))$ (звідси легко побачити симетричність). $\forall p \in M\ \forall 0 \neq v \in T_pM$ $d_p\varphi(v) \neq 0$ (бо φ - занурення $\Rightarrow d_p\varphi$ - inj) $\Rightarrow [\overline{g}_{\varphi(p)} > 0$ визначена$] \Rightarrow g_p(v,v) = \overline{g}_{\varphi(p)}(d_p\varphi(v), d_p\varphi(v)) > 0$, тобто g_p додатно визначена. △

Def. $g = \varphi^* \bar{g}$ наз. першою фундаментальною формою (M, φ). Ще говорять, що g індукована м-ною $\bar{g}$ за допомогою φ, (M, g) звуть рімановим підмноговидом $(\bar{M}, \bar{g})$, а φ – ізометричним занурення.

Def. Занурення $\varphi : M \to \bar{M}$ звуть вкладенням, якщо φ – топологічне вкладення, тобто $\varphi : M \to \varphi(M)$ – гомеоморфізм (відн. індукованої топології на $\varphi(M)$). У цьому випадку (M, φ) наз. вкладеним підмн.

Th. (Уітні про вкладення). $\forall$ n-вимірного k-гладкого M ($k \geq 1$) існують k-гладкі вкладення в $\mathbb{R}^{2n}$ і занурення в $\mathbb{R}^{2n-1}$

▷ Див. Постников або курс "Геометрія підмноговидів". ◭

Сор. $\forall$ k-гл. многовида M ($k \geq 1$) $\exists$ ріманова м-на на M.

▷ Візьмемо занурення $M \to \mathbb{R}^m$ та індукуємо g евкл. м-ною E^m ◭

Впр. Довести твердження Сор., використавши існування розбиттів одиниці замість існування занурень (див. попереднюю тему)

Ex.3. $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Стандартна м-ка (у подальшому за замовчуванням розглядаємо S^n з нею) - це перша фунд. форма (S^n, i) де $i : S^n \to E^{n+1}$ - включення $\underset{S^n}{\underset{\cap}{P}} \mapsto \underset{\mathbb{R}^{n+1}}{\underset{\cap}{P}}$.

Впр. Перевірити, що i - вкладення.

Rem. Взагалі, якщо $\overline{M}$ - k-гл. многовид і $M \subset \overline{M}$ - підмножина така, що M має структуру k-гл. многовида і $i : M \to \overline{M}$ (включення) є зануренням, то (M, i) - підмноговид у $\overline{M}$ (вкладений, якщо топологія многовида M - індукована). Детальніше див. курс "Геометрія підмноговидів".

Rem. У лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на $U \subset M$ і $(x^1, \dots, x^{n+q})$ на $V \subset \overline{M}$ $(U \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset)$, якщо $g|_U = g_{ij}\, du^i du^j$, $\bar{g}|_V = \bar{g}_{ab}\, dx^a dx^b$, то з загальної ф-ли для подиференціала маємо $\forall i, j = \overline{1,n}$:

$$g_{ij}|_{U \cap \varphi^{-1}(V)} = \bar{g}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial x^b}{\partial u^j}.$$

де $\frac{\partial x^a}{\partial u^i}$, $a=\overline{1,n+q}$, $i=\overline{1,n}$ — частк. похідні коорд. ф-цій лок. задання φ. Для $\overline{M}=E^{n+q}$:

$$g_{ij}|_u = \delta_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial x^b}{\partial u^j} = \sum_{a=1}^{n+q}\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial x^a}{\partial u^j} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle,$$

де $\varphi_i = \varphi_{u^i} = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a} = \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$ (останнє позначення означає, що $\varphi_i : p\in U \mapsto d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$) — ~~введені~~ [redacted] раніше лок. поля, що утворюють базис $T_p(M,\varphi) = d_p\varphi(T_pM)$ $\forall p \in U$.

def. Нехай $I \subset \mathbb{R}$ — проміжок. Будемо називати криву $\gamma : I \to M$ k-гладкою ($\gamma \in C^k(I,M)$), якщо

- $\gamma|_{\operatorname{Int} I} \in C^k(\operatorname{Int} I, M)$
- якщо ліва межа a проміжка I [redacted] належить до I, то $\forall$ лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ на околі $\gamma(a)$ для лок. задання $(\gamma^1,\dots,\gamma^n)$ кривої γ у цих коорд. $\forall i=\overline{1,n}$ $\forall l=\overline{0,k}$ визначена однобічна похідна

$$(\gamma^i)^{(l)}(a+0) = \lim_{t\to a+0}(\gamma^i)^{(l)}(t).$$

— аналогічно до правої межової точки.

<u>Впр.</u> Перевірити, що це <u>озн.</u> не залежить від вибору лок. коорд.

<u>Зам.</u> Зокрема, будемо вважати, що γ' теж визначене на I, беручи $\gamma'(a) = \gamma'(a+0) = (\gamma^i)'(a+0)\frac{\partial}{\partial x^i}$ для лівої межі і ан-но для правої. Це окремий випадок узагальнення поняття гладкості на многовиди з межею.

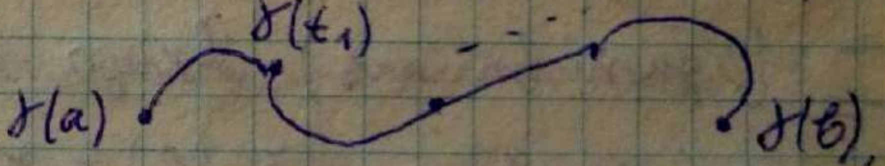
Def. k-гладкі криві $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\mu \in C^k(J, M)$ звуться еквівалентними ($\gamma \sim \mu$), якщо $\exists$ k-дифеоморфізм $\varphi : I \to J$ (тобто φ - біє., $\varphi \in C^k(I, J)$ і $\varphi^{-1} \in C^k(J, I)$ у сенсі, аналогічному до попереднього def.) такий, що $\gamma = \mu \circ \varphi$.

Впр. Це дійсно відношення еквівалентності на множині заданих на проміжках k-гладких кривих у M.

Rem. Якщо $\gamma \sim \mu$, це говорять, що одну з цих кривих отримано з іншої заміною параметра (перепараметризацією, репараметризацією). Зокрема, далі ми будемо говорити про "єдиність кривої з точністю до заміни параметра" саме у цьому сенсі: всі криві, що задовольняють першій умові, [redacted] еквівалентні.

Впр. Якщо γ регулярна і $\gamma \sim \mu$, то μ регулярна.

def. Кусково гладким шляхом у M назвемо $\gamma \in C([a,b], M)$, якщо $\exists$ розбиття $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$ таке, що $\forall i = \overline{1,n}$
$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^k([t_{i-1}, t_i], M)$



def. Довжиною кусково гладкого шляху $\gamma : [a,b] \to M$ у рімановому мн. (M, g) зветься

$$l(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt.$$

Rem. Ф-ція під інтегралом тут кусково $(k-1)$-гладка (її проміжки гладкості збігаються з такими для γ, див. локальний вигляд вище), тобто принаймні кусково неперервна, тому інтеграл існує (і дорівнює сумі інтегралів по проміжках гладкості). Якщо треба уточнити (при цьому $\gamma'(t)$ не всюди коректно визначене, бо може бути $\gamma'(t_i-0) \neq \gamma'(t_i+0)$). про яку метрику йдеться, писатимемо $l_g(\gamma)$.

Ex. У E^n це $\int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ – евклідова довжина шляху.

$|\cdot|$ – евкл. норма на $\mathbb{R}^n$

Pr. (властивості довжини шляхів).

1. $l(\gamma) \geq 0$ і $l(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma$ – постійний (тобто $\gamma(t) = p$ $\forall t \in [a,b]$ для якоїсь $p \in M$).

2. (адитивність). Якщо $\gamma_1 : [a,b] \to M$ і $\gamma_2 : [b,c] \to M$ – кус. гладкі шляхи, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, то
$$\gamma_1 * \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$
визначає кус. гладкий шлях $\gamma_1 * \gamma_2 : [a,c] \to M$ і
$$l(\gamma_1 * \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

3. (інваріантність) Нехай шляхи $\gamma \in C^k([a,b], M)$ і $\mu \in C^k([c,d], M)$ еквівалентні.

. Тоді $l(\gamma) = l(\mu)$.

4. Якщо g – перша фунд. форма (M, φ) у $(\bar{M}, \bar{g})$, то $\forall$ кусн. гл. шляху γ у M $\varphi \circ \gamma$ – кусн. гл. шлях у $\bar{M}$ і $l_g(\gamma) = l_{\bar{g}}(\varphi \circ \gamma)$.

__def.__ Гладка крива $\gamma \in C^k(I, M)$ у рімановому мн. (M, g) зветься натурально параметризованою, якщо $\forall s \in I$
$g_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 1$.

__Rem.__ Сам параметр при цьому називають натуральним (s – його традиційне позначення). Зокрема, нат. параметризовані криві регулярні. Для нат. парам. шляху $\gamma : [a, b] \to M$ маємо $l(\gamma) = b - a$.

__Rem.__ У подальшому, якщо зрозуміло, про яку рім. м-ку йдеться, будемо позначати відповідні їй (як поле скалярних добутків) норми в точках і поле норм через $|\cdot|$. Тобто $|v| := \sqrt{g_p(v, v)}$ для $v \in T_pM$, $|X| := \sqrt{g(X, X)}$ для $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ і $|X(t)| := \sqrt{g_{\gamma(t)}(X(t), X(t))}$ для поля X уздовж γ (кривої).
Тоді умова натуральності параметра набуде вигляду
$|\gamma'(s)| = 1 \quad \forall s$ або просто $|\gamma'| = 1$.

Рп. $\forall$ регулярної кривої в рімановому многовиді $\exists$ еквівалентна їй натурально параметризована (її т.зв. натуральна (ре)параметризація).

$\triangleright$ Отже, $\gamma \in C^k(I, M)$ і $\gamma' \neq 0$. Оберемо $t_0 \in I$ і покладемо

$$s(t) := \begin{cases} l(\gamma|_{[t_0,t]}), & t \geq t_0 \\ -l(\gamma|_{[t,t_0]}), & t \leq t_0 \end{cases} = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(\tau)|\, d\tau, \quad t \in I.$$

Тоді $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0 \ \forall t$, тому $\psi(t) := s(t)$ задає k-дифеоморфізм $\psi : I \to \psi(I)$, $\mu := \gamma \circ \psi^{-1}$ – k-гладка (тобто $\mu \in C^k(\psi(I), M)$), $\mu \sim \gamma$ за def., і $\forall s \in \psi(I)$

$$\mu'(s) = \underset{\psi^{-1}(s)}{\gamma'(t)} \cdot \underset{(\psi^{-1})'(s)}{t'(s)} = \frac{\gamma'(\psi^{-1}(s))}{\psi'(\psi^{-1}(s))} = \frac{\gamma'(\psi^{-1}(s))}{|\gamma'(\psi^{-1}(s))|}, \text{ тому}$$

$|\mu'(s)| = 1$. $\blacktriangle$

Rem. У навпаки, якщо параметр натуральний, то довжина $l(\gamma|_{[s_0,s]}) = s - s_0$, тобто s – довжина дуги кривої від

Афінні та рімманові зв'язності. Геодезичні

M – k-гл. многовид, $k \geq 2$, $\dim M = n$.

def. Афінною зв'язністю на M зветься відображення $\nabla: \mathcal{X}^{k-2}(M) \times \mathcal{X}^{k-1}(M) \to \mathcal{X}^{k-2}(M)$: $X, Y \mapsto \nabla_X Y$ таке, що

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ $\forall X, Y \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$, $f, g \in C^{k-2}(M)$, $Z \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$;
2. $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ $\forall X \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$, $Y, Z \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$;
3. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ $\forall X \in \mathcal{X}^{k-2}(M)$, $Y \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$, $f \in C^{k-1}(M)$.

$\nabla_X Y$ при цьому зветься коваріантною похідною Y за X. Пара (M, ∇) зветься многовидом з афінною зв'язністю.

Rem. Тобто зв'язність – це правило диференціювання в. полів у напрямку інших полів. 3 є аналогом правила Лейбніца. З нього для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ маємо $\nabla_X(\lambda Y) = \lambda \nabla_X Y$, тобто $\nabla_X \cdot : \mathcal{X}^{k-1}(M) \to \mathcal{X}^{k-2}(M)$ лінійне над $\mathbb{R}$.

Ex. Пласка зв'язність на $\mathbb{R}^n$ (з глоб. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$): для

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad \nabla_X Y := X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = X(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$ – задов. <u>def.</u>

<u>Rem.</u> Нехай $(x^1,\dots,x^n)$ – лок. коорд. на $U\subset M$. $\forall\, i,j=\overline{1,n}$ розкладемо визначене на U поле $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}$ за $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \text{де } \Gamma^k_{ij}\in C^{r-2}(U),\ i,j,k=\overline{1,n}.$$

Звичайно, для цього треба визначити ∇ на U. Це можна коректно зробити, продовжуючи поля з U на M (<u>Впр.</u> або задати геом. відповід

<u>def.</u> $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k=1}^n$ наз. символами Крістоффеля зв. ∇ у $(x^1,\dots,x^n)$.

<u>Впр.</u> При заміні $(x^1,\dots,x^n)$ на $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ нові с.К. мають вигляд

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^o_{lm}\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^o}\frac{\partial x^l}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^l}$$

(Зокрема, це <u>не</u> компоненти $(2,1)$-тенз. поля).

<u>Rem.</u> Нехай $X\in\mathfrak{X}^{r-2}(M)$, $Y\in\mathfrak{X}^{r-1}(M)$, $X|_U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\nabla_X Y|_U = \nabla_{\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\underline{1}] = X^i\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\underline{2} \text{ і } \underline{3}] =$$

$$= X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\underline{\text{def.}}\ \Gamma^k_{ij}] = X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Отже,

$$\nabla_X Y|_U = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} Y^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

__def.__ ∇ зветься пласкою, якщо в околі $\forall p \in M$ $\exists$ лок. коорд.: в них $\Gamma^k_{ij} = 0 \ \forall i,j,k$.

__Rem.__ Тобто у цих коорд. ∇ локально виглядає як у __Ex.__ вище.

__Rem.__ Фіксуємо $Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$. Тоді $X \mapsto \nabla_X Y : \mathfrak{X}^{r-2}(M) \to \mathfrak{X}^{r-2}(M)$ є в силу __1.__ лінійним над $C^{r-2}(M)$, тобто задає $(r-2)$-гл. $(1,1)$-тенз. поле (поле операторів). Отже, $\forall p \in M$ визначене значення цього поля у p [redacted] $T_pM \to T_pM : v \mapsto \nabla_v Y$. Відображення $\nabla : T_pM \times \mathfrak{X}^{r-1}(M) \to T_pM : v, Y \mapsto \nabla_v Y$ будемо називати зв'язністю у p, що відп. ∇, а $\nabla_v Y$ - ков. похідною Y за v [redacted]. При цьому $\forall X \in \mathfrak{X}^{r-2}(M)$ $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$. Іншими словами, __1.__ гарантує, що $(\nabla_X Y)_p$ визначене лише X_p і Y. Також це легко вивести з ф-ли у лок. коорд.

__Впр.__

$$\nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X;$$

$$\nabla_v (X + Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y;$$

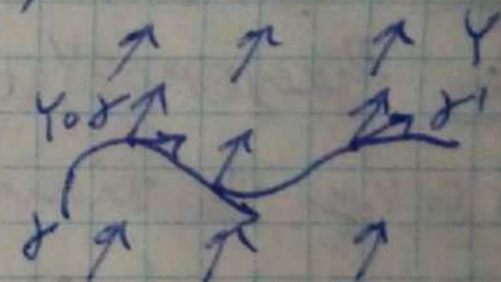
[redacted] $$\nabla_v (fX) = v(f) X_p + f(p) \nabla_v X.$$

$(\forall v, w \in T_pM,$ $X, Y \in \mathfrak{X}^{r-1}(M),$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R},$ $f \in C^{r-1}(M))$

(гладкість на I тут визн. відн-но до країв)

Пр. Нехай $\gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ (де $I \subset \mathbb{R}$ – проміжок), а X – $(\varkappa-1)$-гл. поле уздовж γ: $X \in C^{\varkappa-1}(I, TM)$, $\forall t \in I$ $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Тоді $\exists!$ $(\varkappa-2)$-гл. поле $\nabla_{\gamma'}X$ уздовж γ таке, що $\forall Y \in \mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)$ $\forall t \in I$

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{\gamma'}(Y \circ \gamma)(t) \; (\in T_{\gamma(t)}M).$$



Rem. За **def.**, $Y \circ \gamma$ – $(\varkappa-1)$-гл. поле уздовж γ (обмеження Y на γ). Т.ч., згідно з **Пр.** коректно визначене відобр. полів уздовж γ $\nabla_{\gamma'}: X \mapsto \nabla_{\gamma'}X$.

def. $\nabla_{\gamma'}X$ зветься коваріантною похідною X уздовж γ.

$\triangleright$ **!** Отже, нехай $\nabla_{\gamma'}X$ існує. Розгл. $\forall Y \in \mathfrak{X}^{\varkappa-1}(M)$ і покладемо $X := Y \circ \gamma$. $\forall t_0 \in I$ нехай $(x^1, \dots, x^n)$ – сис-ма лок. коорд. на $U \ni \gamma(t_0)$, $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ – відп. лок. задання γ, $Y|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тоді $X|_{\gamma^{-1}(U)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, де $X^i(t) = Y^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ для $t \in \gamma^{-1}(U)$. Нехай $\{\Gamma^k_{ij}\}$ – с.к. ∇ в $(x^1, \dots, x^n)$. Тоді з лок. ф-ли вище (що, очевидно, вірна і для ков. похідної у точці) $\forall t \in \gamma^{-1}(U)$:

$$\nabla_{\gamma'} X(t) = \nabla_{\gamma'(t)} Y = \nabla_{(\gamma^i)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (\gamma^i)'(t)\Big[\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t)) + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))\cdot Y^j(\gamma^1(t),\dots,\gamma^n(t))\Big]\frac{\partial}{\partial x^k} = \left[\begin{matrix}\text{похідна}\\ \text{складної}\\ \text{ф-ції}\end{matrix}\right] =$$

$$= \left(\frac{dX^k}{dt}(t) + (\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)(t)\cdot(\gamma^i)'(t)\cdot X^j(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Цей вираз однозначно визначений зв'язністю, γ і X. Звідси $\underline{!}$

$\exists$ Тепер визначимо $\nabla_{\gamma'}X$ ф-лою вище:

$$\nabla_{\gamma'}X\Big|_{\gamma^{-1}(U)} := \left((X^k)' + (\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)\cdot(\gamma^i)'\cdot X^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

($\forall$ коорд. околу U з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$, що перетинається з носієм γ).

Впр. Це коректно визначене поле уздовж γ (тобто треба перевірити, що вираз не змінюється при заміні координат, використавши ф-ли перетворення $\{\Gamma^k_{ij}\}$ вище).

Коефіцієнти тут $(r-2)$-гл. $\Rightarrow \nabla_{\gamma'}X \in C^{r-2}(I, TM)$. Воно задовольняє умові Рг. в силу міркувань у доведенні $\underline{!}$ ▲

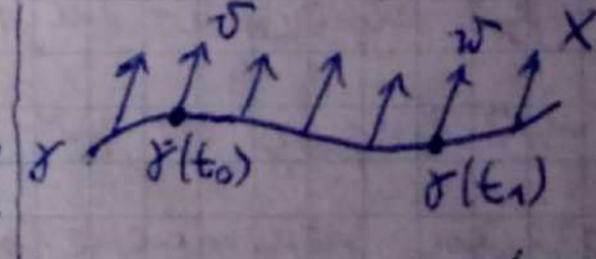
Утв. $\forall\, \gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$, X, Y – $(\varkappa-1)$-гл. в.п. уздовж γ і $f \in C^{\varkappa-1}(I)$:

$$\nabla_{\gamma'}(X+Y) = \nabla_{\gamma'}X + \nabla_{\gamma'}Y;$$

$$\nabla_{\gamma'}(fX) = f'X + f\,\nabla_{\gamma'}X.$$

Rem. Якщо I включає кінці, у них $\nabla_{\gamma'}X$ визначається однобічно ($\nabla_{\gamma'}X(a+0)$ або $\nabla_{\gamma'}X(b-0)$).

def. $(\varkappa-1)$-гладке поле X уздовж $\gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ зветься паралельним (у многовиді з аф. зв. (M, ∇)), якщо $\nabla_{\gamma'}X = 0$. Якщо при цьому $X(t_0) = v$ $(\in T_{\gamma(t_0)}(M))$, а $X(t_1) = w$ $(\in T_{\gamma(t_1)}(M))$, то говорять, що w отриманий з v паралельним перенесенням з $\gamma(t_0)$ у $\gamma(t_1)$ уздовж γ.



Pr. $\forall\, \gamma \in C^{\varkappa}(I, M)$ $\forall\, t_0 \in I$ $\forall\, v \in T_{\gamma(t_0)}M$ $\exists!$ паралельне $(\varkappa-1)$-гл. поле X уздовж γ таке, що $X(t_0) = v$.

▷ З лок. запису у попер. доведенні випливає, що $\forall\, t \in I$ і лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ на $U \ni \gamma(t)$ для лок. задання від γ. У заг. випадку залежність від γ є.

Rem. Якщо γ – $\varkappa$-гл., то $\gamma': t \mapsto \gamma'(t)$ – $(\varkappa-1)$-гл. в.п. уздовж неї.

def. $\gamma \in C^\varkappa(I, M)$ зветься геодезичною (лінією) многовида з аф. зв'язністю (M, ∇), якщо $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, тобто γ' – паралельне уздовж γ.

Rem. Ця умова, взагалі кажучи, не зберігається при переході до еквівалентної кривої (заміні параметра).

Впр. При яких замінах параметра вона все ж зберігається?

Rem. У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U з с.к. $\{\Gamma^k_{ij}\}$ для ф-цій $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ лок. задання γ з $(*)$ отримуємо умови:

$$(\gamma^k)'' + \Gamma^k_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)(\gamma^i)'(\gamma^j)' = 0, \quad k = \overline{1,n} \qquad (**)$$

Це система нелінійних ЗДФ II порядка. Взагалі кажучи, її розв'язок $\exists$ тільки локально:

Th. Нехай $\varkappa \geq 3$.

1. $\forall\, p \in M$, $v \in T_pM$ $\exists\, \varepsilon > 0$ та геодезична $\gamma \in C^\varkappa((-\varepsilon, \varepsilon), M)$

така, що $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v$ (тобто γ проходить через p у напрямку v).

2. $\forall$ геодезичних $\gamma, \mu \in C^{2}(I, M)$ якщо $\exists\, t_0 \in I$ таке, що $\gamma(t_0)=\mu(t_0)$ і $\gamma'(t_0)=\mu'(t_0)$, то $\gamma=\mu$.

▷ Це знову випливає з $\exists!$ для кожної лок. системи коорд. розв'язку з. Коші для (**) з початковими умовами $\gamma^i(t_0) = x_0^i$, $(\gamma^i)'(t_0)=v^i$, $i=\overline{1,n}$, де $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ - коорд. p, $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тут система визначена $(x-2)$-гл. Γ_{ij}^k, тому для застосовності теореми потрібно $x \geq 3$ (або ліпшицевість). Для існування достатньо лок. розв'язку, єдиність - знову через лему Лебега (Вм) ◁

Ex. Для пласкої (принаймні локально) ∇, зокрема, для ∇ на $\mathbb{R}^n$ з Ex вище у відп. коорд. (**) мають вигляд $(\gamma^k)''=0$, $k=\overline{1,n}$, тобто $\gamma^k = x_0^k + v^k(t-t_0)$ (у $\mathbb{R}^n$ це проміжки прямих).

Rem. Многовиди з аф. зв'язністю - це ще одне узагальнення ріманових, як ми невдовзі побачимо.

Випадок ріманового многовида

Деф. Аф. зв'язність ∇ на M зветься узгодженою з рімановою метрикою g на M, якщо $\underbrace{\forall X \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)}$ $\nabla_X g = 0$.

Зам. Тобто $\forall Y, Z \in \mathfrak{X}^{r-1}(M)$ кі

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Запишемо цю умову для $Y = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $(\forall i,j,k = \overline{1,n})$. Нехай $g|_U = g_{ij}\, dx^i dx^j$, $\{\Gamma^k_{ij}\}$ - с.к. ∇:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g\left(\Gamma^l_{ki} \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj} \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}.$$

$\forall$ лок. координат

Впр. І навпаки, якщо ця умова виконана $\forall i,j,k = \overline{1,n}$, то ∇ узгоджена з g.

Деф. Аф. зв'язність ∇ на M зветься рімановою зв'язністю (зв. Леві-Чівіта) ріманової м-ки g на M (або рім. зв. (M,g)), якщо вона без скруту і узгоджена з g.

Тв. (формула Кошуля). $\forall$ ріманового мн. (M, g) $\exists!$ ріманова зв'язність ∇. Вона визначена формулою:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \Big) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}^{\infty}(M). \qquad (***)$$

▷ ! Нехай ∇ – якась ріманова зв. g. Доведемо тоді $(***)$. Вона визначатиме ∇ однозначно. Дійсно, нехай для деякого поля X ми знаємо $g(X,Y)$ $\forall Y$. Тоді $\forall p \in M$ нам відоме $g_p(X_p, v)$ $\forall v \in T_pM$ (бо $\forall v \in T_pM$ $\exists Y : Y_p = v$ – Впр.). Оскільки g_p – скал. добуток, це однозначно визначає X_p. Отже, ми знаємо $X : p \mapsto X_p$. В нашому випадку $g(\nabla_X Y, Z)$ $\forall Z$ визначає $\nabla_X Y$ $(\forall X, Y)$.

Оскільки ∇ узгоджена з g:

$$X(g(Y,Z)) = \underline{g(\nabla_X Y, Z)} + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Y(g(Z,X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

$$-Z(g(X,Y)) = -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \quad \gamma'_\tau = \gamma'_t \cdot t'_\tau = \frac{1}{\alpha}\gamma'_t$, тому $\nabla_{\gamma'_\tau}\gamma'_\tau = \frac{1}{\alpha^2}\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t$

Т.ч., властивість γ бути геодезичною зберігається. Зокрема, вона зберігається для заміни одного нат. параметра на інший: $\sigma = c \pm s$.

Rem. Далі зв'язність всюди вважаємо рімановою.

def. Крива $\gamma \in C^\infty(I, M)$ зветься геодезичною ріманового многовида (M, g), якщо вона або постійна, або еквівалентна кривій μ, що є натурально параметризованою геодезичною рімановою зв'язності ∇ метрики g: $\gamma \sim \mu$, $\nabla_{\mu'}\mu' = 0$, $|\mu'| = 1$.

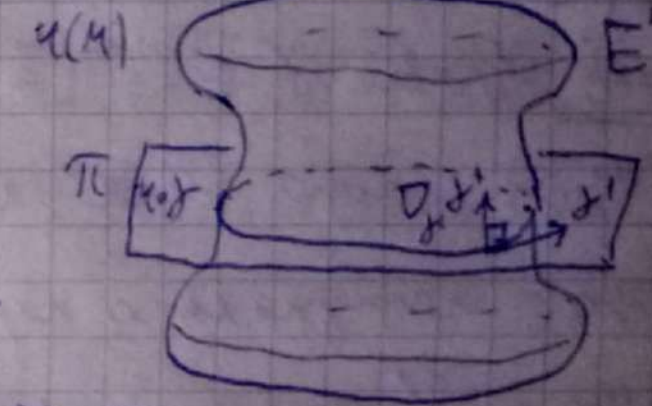
Rem. З зауважень вище випливає, що це def. коректне і що власт. γ бути геодезичною зберігається при переході до еквівалентної кривої. Усі непостійні геодезичні регулярні.

Геодезичні з Рч. про $\exists!$ (для ріманової зв.) задовольняють цьому def.: якщо $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ і $\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$, то при $v \neq 0$

$s = |v|t$ – нат. параметр ($\gamma'_s = \frac{1}{|v|}\gamma'_t \Rightarrow |\gamma'_s| = \frac{|v|}{|v|} = 1$), і $\nabla_{\gamma'_s}\gamma'_s = \frac{1}{|v|^2}\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$.

Ex. 1. У E^n рім. зв. пласка, тому геодезичні — прямолінійні прямих (див. Ex. вище). У пласких (M, g) вони виглядають як прямі у відп. "пласких" лок. координатах.

2. Дослідимо геодезичні на $S^n \subset E^{n+1}$. Для цього доведемо більш загальну достатню умову!



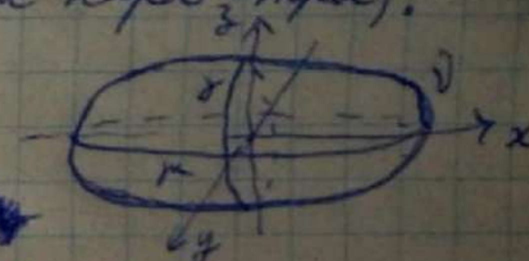
Pr. Нехай (M, φ) — підмноговид у E^n з I фунд. формою g, φ-ін', π — його (2-вимірна) площина симетрії, тобто для симетрії σ пр-ру E^n відн. π $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(M)$. Нехай $\varphi(M) \cap \pi$ — носій $\varphi\circ\gamma$, і $\forall t \in I$ (обл. визн. γ) $\dim(T_{\gamma(t)}(M,\varphi) \cap \pi) = 1$, де γ — рег. крива в M. Тоді γ — геодезична.

▷ "Обмежимо" σ на M, тобто визначимо $\sigma_M : M \to M$ умовою $\varphi \circ \sigma_M = \sigma \circ \varphi$ (це можна зробити, бо $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(M)$ і φ-ін').

Твр. Для будь-якої ізометрії σ такої, що $\sigma(\varphi(M)) = \varphi(M)$, σ_M — ізометрія (M, g). Це вірно для підмноговида у $\forall$

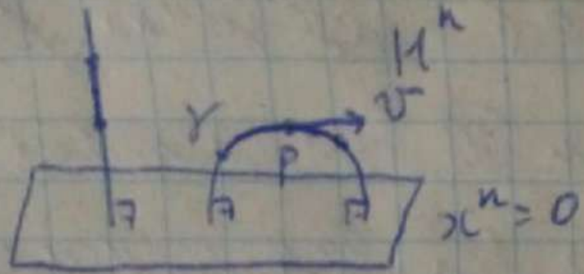
ч заперечення ($\Rightarrow d_{\gamma(t)}\gamma$ - ізом), $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, тобто γ - геодезична. ▲

Для S^n у E^{n+1}, перетинаючи її з площинами π, що містять O (і є її площинами симетрії), отримаємо, що всі великі кола S^n (а також всі їх проміжки) - геодезичні. Оскільки через $\forall p \in S^n$ у напрямі $\forall v \in T_pS^n$ можна провести велике коло (це $S^n \cap \pi$, де π натягнута на p і v), з $\exists!$ геодезичних маємо, що інших геодезичних немає (з точністю до заміни параметра).



Так само можна знаходити геод. і на інших підмноговидах E^n, наприклад, 3 еліпси на еліпсоїді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ у E^3 при поп. різних a, b, c - його перетини з O_{xy}, O_{yz}, O_{xz}. Відомо, що інших простих (без самоперетинів) замкнених геодезичних на ньому немає.

3. H^n ($\mathbb{R}^n_+$ з $g = \frac{1}{(x^n)^2}\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$). Тут геодезичні - це півкола та півпрямі, що ортогональні $\{x^n=0\}$, а також їх проміжки (регулярно перел.)



Дійсно, достатньо перевірити, що вони є геод. (Впр.), тоді з єдиності геод. і того, що через $\forall$ точку у напрямку $\forall$ вектора можна провести таку криву (Впр.) випливає, що інших немає.

Def. Для натурально параметризованої γ у рімановому (M, g) $|\nabla_{\gamma'}\gamma'(s)|$ зветься геодезичною кривиною γ у s.

Rem. Тобто γ - геод. $\Leftrightarrow$ її геод. кривина нульова.

Перша та друга варіації довжини шляху

(M, g) – рімановий многовид, k-гл., $k \geq 2$, $\dim M = n$, ∇, R – ЛЧ зв. і тензор кривини g.

__Деф.__ Нехай $\gamma \in C^k([a,b], M)$ – натурально параметризований шлях. Його варіацією зветься будь-яке $\sigma \in C^k([a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ (де $\varepsilon > 0$) таке, що $\sigma(t, 0) = \gamma(t)$ $\forall t \in [a,b]$. Якщо при цьому $\sigma(a, \tau) = \gamma(a)$, $\sigma(b, t) = \gamma(b)$ $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, то говорять, що σ – вар. з закріпленими кінцями.

__Rem.__ Гладкість σ у точках (a, τ) і (b, τ) встановлюється через однобічні похідні (як для шляху γ).

__Rem.__ Нехай σ – вар. γ. $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\gamma_\tau := \sigma(\cdot, \tau) : [a,b] \to M$ – k-гл. шлях, і $\gamma_0 = \gamma$. Якщо вар. – з закр. кінцями, то $\forall \tau$ γ_τ з'єднує $\gamma(a)$ і $\gamma(b)$. Т.ч., γ – найкоротша $\Rightarrow$ $\forall$ вар. σ з закр. кінцями $\forall \tau$ $l(\gamma_\tau) \geq l(\gamma) = l(\gamma_0) \Leftrightarrow \tau = 0$ – т. мінімума ф-ції $\tau \mapsto l(\gamma_\tau) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau} l(\gamma_\tau)\Big|_{\tau=0} = 0$ і $\frac{d^2}{d\tau^2} l(\gamma_\tau)\Big|_{\tau=0} \geq 0$.

Ці величини називають першою та другою варіацією довжини γ (для варіацій σ). Ця умова все ще не є достатньою: вона означає, що γ — найкоротша серед "достатньо близьких шляхів" (які входять у варіацію), а не глобально (див. Ex. нижче)

Рк.1 (Перша варіація довжини). Нехай $\sigma \in C^k([a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon), M)$ — варіація нат. парам. γ, $\gamma_\tau = \sigma(\cdot,\tau)\ \forall \tau$, $Y(t) := d_{(t,0)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\ \forall t\in[a,b]$ (при цьому $\forall t$ $Y(t)\in T_{\sigma(t,0)}M = T_{\gamma(t)}M$, тобто Y — $(k-1)$-гл. поле уздовж γ). Тоді

$$\frac{d}{d\tau}\ell(\gamma_\tau)\Big|_{\tau=0} = g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), Y(t))\Big|_a^b - \int_a^b g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t), Y(t))\,dt.$$

▷ Див. літературу, наприклад, Бураго-Залгаллер. △

Rem. Для варіацій з закріпл. кінцями $Y(a) = d_{(a,0)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{def. диференціала,}\\ \tau\mapsto(a,\tau) \text{ прох. через}\\ (a,0) \text{ у напр. } \frac{\partial}{\partial\tau} \text{ при } \tau=0\end{array}\right] = \sigma(a,\tau)'\Big|_{\tau=0} = \gamma(a)'\Big|_{\tau=0} = 0$. Ан-но, $Y(b)=0$.

Cor.1 У позначеннях Рк.1 для варіацій з закр. кінцями

$$\frac{d}{d\tau}\ell(\gamma_\tau)\Big|_{\tau=0} = -\int_a^b g_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t), Y(t))\,dt.$$

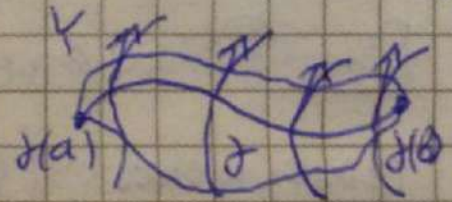
Rem. Ми обчислювали першу вар., виводячи ф-ли Ейлера-

Лагранжа (там ми локально задавали $\sigma(t,\tau) = (\gamma^1(t) + \tau\mu^1(t), \ldots, \gamma^n(t) + \tau\mu^n(t))$ з закріпл. кінцями, через збурення у лок. коорд.) Зокрема, ми з'ясували, що вона $= 0 \iff \gamma$ - геодезична. Зробимо це і тут.

Тв 2 (Існування варіації). Нехай $k \geq 3$. $\forall$ $(k-1)$-гл поля Y уздовж γ існує $(k-1)$-гл. варіація σ шляху γ така, що $d_{(t,0)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = Y(t)$ $\forall t \in [a,b]$ (тут всі умови і позначення - як вище). Якщо $Y(a) = Y(b) = 0$, то σ - з закріпл. кінцями.

▷ Аналогічно до початку доведення Тв.3 з теми "Ріманове експоненційне відображення", $\exists$ неперервна ф-ція $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$: $\forall t \in [a,b]$ $\exp_{\gamma(t)}$ визначене на $B_{\delta(t)}(0)$ (куля у $T_{\gamma(t)}M$ відн. $g_{\gamma(t)}$). Тоді вона приймає на $[a,b]$ своє найм. значення що >0, а $|Y|$ - найбільше, що $<+\infty$. Покладемо $\varepsilon := \dfrac{\min\{\delta(t) \mid t \in [a,b]\}}{\max\{|Y(t)| \mid t \in [a,b]\}} > 0$. Тоді $\forall t \in [a,b]$ $\forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $|\tau Y(t)| < \varepsilon |Y(t)| \leq \varepsilon \max_t |Y| = \min_t \delta \leq \delta(t)$, тобто визначене $\sigma(t,\tau) := \exp_{\gamma(t)}(\tau Y(t))$.

σ – $(k-1)$-гл. за властивостями exp (зокрема $\exp_p(v)$ гладко залежить від p за гл. залежністю розв'язків диф. рівнянь від поч. умов). При цьому $\forall t \ \sigma(t,0) = \exp_{\gamma(t)}(0) = \gamma(t)$, тобто це варіація γ; $d_{(t,0)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \sigma(t,\tau)'_{\tau=0} = \exp_{\gamma(t)}(\tau Y(t))'_{\tau=0} =$
$= \left[\begin{smallmatrix}\text{власт.}\\ \exp\end{smallmatrix}\right] = Y(t)$. Нарешті, при $Y(a)=0$ $\sigma(a,\tau) = \exp_{\gamma(a)}(\tau \cdot Y(a)) =$
$= \exp_{\gamma(a)}(0) = \gamma(a)$ $\forall \tau$ і так само при $Y(b)=0$ і $t=b$: кінці закріплені ▲



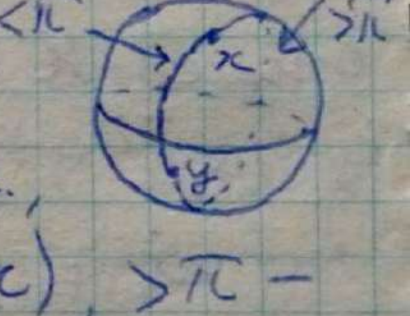
Rem. Тобто ми будуємо варіацію, випускаючи геодезичні з точок γ: $\forall t \in [a,b]$ $\sigma(t,\cdot)$:
$\tau \mapsto \exp_{\gamma(t)}(\tau Y(t))$ – це геодезична, що виходить з $\gamma(t)$ у напр. $Y(t)$ (див тему про експ. відображення). Доведемо ще наступне:

Сл. 2 Будь-яка регулярна найкоротша внутр. м-ли (M,g) – геодезична.

▷ Введемо на k-гл. найкор. $\gamma: [a,b] \to M$ нат. параметризацію.
↗ γ – не геодезична, тобто $\exists\, t$ таке, що $\nabla_{\gamma'}\gamma'(t) \neq 0$.
Тоді існує таке $(k-1)$-гл. поле Y уздовж γ, що $g_\gamma(\nabla_{\gamma'}\gamma', Y) > 0$ і

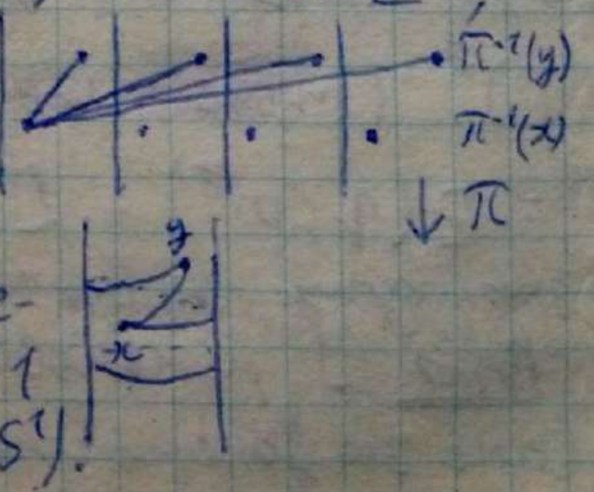
(у цьому випадку все обмежується на підмноговиди TM і TM^*, що відповідають розподілу).

<u>Rem.</u> Рівняння Є.-Л. дають необхідні, але не достатні умови (вони навіть не відрізняють $L(\gamma) \le L(\mu)\ \forall \mu$ від $L(\gamma) \geq L(\mu)\ \forall \mu$). Наприклад, для ріманових найкоротших:



– на S^n геодезична (шлях) довжини $<\pi$ – єдина найкоротша, що з'єднує кінці, $=\pi$ – найкор., але не єдина (точки діам. протилежні, їх безліч), $>\pi$ – не найкоротша.

– прямий циліндр $M = S^1 \times \mathbb{R}$ в E^3 лок. ізометричний E^2, його геодезичні шляхи – образи відрізків прямих під дією лок. ізом. проекції $\pi : E^2 \to M : (u, v) \mapsto (e^{iu}, v)$ $(= (\cos u, \sin u, v))$ (Впр.), тому $\forall x \neq y\ \exists$ безліч геодезичних, що їх поєднують (гвинтові), але лише 1 найкоротша (2, якщо точки проектуються в діам. прот. на S^1).



Ріманове експоненційне відображення

(M,g) – k-гл. рімановий мн., $k \geq 3$, $\dim M = n$, ∇ – рім. зв. g.
Для фіксованої $p \in M$ $\forall v \in T_pM$ позначимо через $\gamma_v \in C^k((-\varepsilon,\varepsilon),$ $M)$ геодезичну, що проходить через p у напрямку v: $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$ (єдину таку на цьому проміжку; тут $\varepsilon > 0$ також залежить від v (і p)).

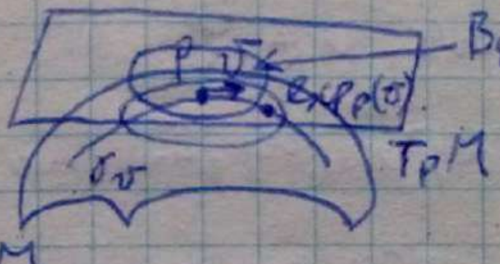
<u>Лем. 1.</u> $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ ($\forall\, t$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, що обидва боки визначені)

▷ При $\lambda = 0$: $\gamma_0(t) = p = \gamma_v(0)$ (бо γ_0 – постійна).
При $\lambda \neq 0$: γ_v – геод. $\Rightarrow \mu(t) := \gamma_v(\lambda t)$ теж визначає геодезичну. Дійсно, нат. параметру γ_v відповідає пар. з постійною $|\mu'|$ у μ, і $\nabla_{\gamma_v'}\gamma_v' = 0 \Leftarrow\Rightarrow \nabla_{\mu'}\mu' = 0$. При цьому $\mu(0) = \gamma_v(0) = p = \gamma_{\lambda v}(0)$, $\mu'(0) = \lambda\gamma_v'(0) = \lambda v = \gamma_{\lambda v}'(0)$. За єдиністю, $\mu = \gamma_{\lambda v}$. ◀

<u>Тв. 1.</u> $\forall p \in M$ $\exists\, \varepsilon > 0$ таке, що $\forall v \in T_pM$ з $|v| < \varepsilon$ $\exists$ геодезична $\gamma_v \in C^k((-2,2), M)$: $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$.

деф. Експоненційним відображенням у $p \in M$ зветься

$$\exp_p : v \in T_pM \mapsto \gamma_v(1).$$



Rem. В силу Пч.1, $\exp_p$ визначене принаймні на $B_\varepsilon(0)$, де ε – з цього Пч. Тут і далі кулі та сфери у T_pM – відн. g_p (її норми).

Lem. 2. $\exp_p$ k-гл. на області визн., $\exp_p(0) = p$ і $d_0 \exp_p = id_{T_pM}$.

▷ Гладкість випл. з гладкої залежності розв'язків системи ЗДР від початкових умов. $\gamma_0(t) = p$ – постійна, тому $\exp_p(0) = \gamma_0(1) = p$. $d_0 \exp_p : T_0 B_\varepsilon(0) \to T_pM$, дотичний простір до відкр. підмножини T_pM ототожнюємо з ним самим. Тоді

$$d_0 \exp_p(v) = \left[\begin{array}{l} t \mapsto tv \text{ прох.} \\ \text{через } 0 \text{ в напр.} \\ v \text{ у } B_\varepsilon(0) \end{array}\right] = \left(\exp_p(tv)\right)'_{t=0} = \left(\gamma_{tv}(1)\right)'_{t=0} = \boxed{\text{Lem. 1}} =$$

$$= \left(\gamma_v(t)\right)'_{t=0} = v \quad \forall v \in T_pM. \ \blacktriangle$$

Cor. 1 $\exp_p$ – лок. дифеоморфізм в 0 окіл, бо $d_0 \exp_p$ невироджений, тобто $\exists$ відкр. $U \ni p$ в M така, що $\exp_p : \exp_p^{-1}(U) \to U$ – дифео-зм (зокрема, $\exp_p^{-1}(U)$ – відкр. окіл 0 в T_pM).

Rem. Детальніше про лок. дифеоморфізми див. геометрію підмноговидів. Тут використані лок. коорд. і теорема про обернене відображення.

def. Окіл U з **Cor. 1.** зветься нормальним околом $p \in M$.

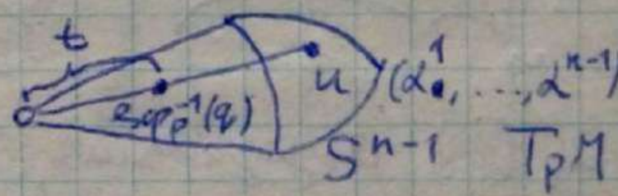
Rem. $0 \in \exp_p^{-1}(U)$ - відкр. $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subset \exp_p^{-1}(U)$, тобто $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to B^N_\varepsilon(p) := \exp_p(B_\varepsilon(0))$ - дифео-зм (зокрема, $B^N_\varepsilon(p)$ - відкр. окіл p).

def. $B^N_\varepsilon(p)$ зветься кульовим нормальним околом $p \in M$.

Rem. **Lem. 1** $\Rightarrow \gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_p(tv)$ ($\forall\, t, v$: це визначено). Оберемо в T_pM якийсь ортонормований (відн. g_p) базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ і $\forall\, q \in B^N_\varepsilon(p)$ розкладемо $\exp_p^{-1}(q) = q^i e_i$, тоді $(q^1, \dots, q^n)$ - точка евкл. кулі $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$. Це координати на $B^N_\varepsilon(p)$. Відп. карта узгоджена з гл. стр. M, бо $q \mapsto (q^1, \dots, q^n)$ k-гл. в силу k-гладкості $\exp_p^{-1}$. Якщо $v = v^i e_i$, то $\exp_p^{-1}(\gamma_v(t)) = tv = (tv^i) e_i$, тобто γ_v має лок. задання $t \mapsto (tv^1, \dots, tv^n)$.

def. Ці координати на $B^N_\varepsilon(p)$ називають нормальними.

Rem. Тепер представимо для $q \in B^N_\varepsilon(p)$ прообраз $\exp_p^{-1}(q)$ як tu, де $t = |\exp_p^{-1}(q)|$ і $|u| = 1$ при $t > 0$ (тобто $u \in S_1(0) =: S^{n-1} \subset T_pM$). В околі u введемо на S^{n-1} коорд. $\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}$ (ця S^{n-1} дифеоморфна стандартній). Отримаємо координати $(t, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ в околі $q \neq p$ – аналог полярних. Точніше, вони задані на образі в $B^N_\varepsilon(p)$ конуса над областю визн. $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ з виколотою вершиною. У цій с.к. лок. задання γ_v:



$t \mapsto (t|v|, \alpha^1_0, \dots, \alpha^{n-1}_0)$ при $t \geq 0$ (де $(\alpha^1_0, \dots, \alpha^{n-1}_0)$ - коорд. $\frac{v}{|v|} \in S^{n-1}$)

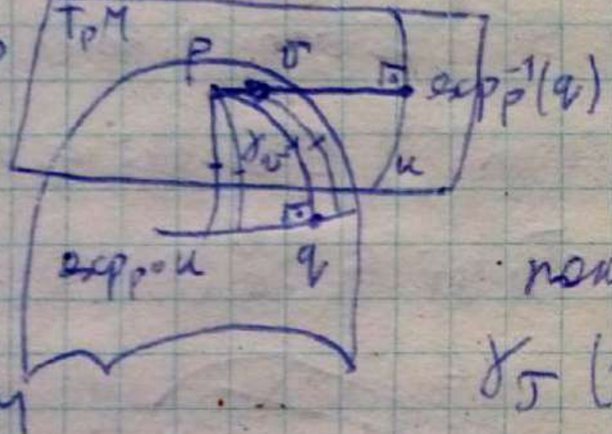
(і $(-t|v|, \alpha^1_1, \dots, \alpha^{n-1}_1)$ при $t < 0$, де $(\alpha^1_1, \dots, \alpha^{n-1}_1)$ - т. S^{n-1}, що діаметрально протил. $(\alpha^1_0, \dots, \alpha^{n-1}_0)$).

def. $(t, \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ звуться напівгеодезичними координатами.

Впр. Відп. карта теж узгоджена з гл. стр. M.

Тв. 2 (лема Гаусса). $\forall q \in B^N_\varepsilon(p)$, $q \neq p$ нехай $q = \gamma_v(t_0) = \exp_p(u(0))$ – точка перетину γ_v і $\exp_p \circ u$, де $u \in C^k((-\delta, \delta), S^{n-1}_r)$ - крива

на сфері $S^{n-1}_r := S_r(0) \subset T_pM$ (відн. g_p) з центром в 0
радіуса $r = |\exp_p^{-1}(q)|$. Тоді γ_v і $\exp_p \circ u$ ортогональні в q,
тобто $g_q(\gamma_v'(t_0), (\exp_p \circ u)'(0)) = 0$.

▷ 

Детальне доведення див. у одній з тем пізніше.

Ідея: враховуючи, що γ_v нат. пар. (тобто $|v|=1$),
покладемо для $t \in [0,r]$ і $\tau \in (-\delta, \delta)$

$\gamma_\tau(t) := \exp_p\left(t \frac{u(\tau)}{r}\right)$ (варіація). Це $\forall \tau$ крива в
$B^N_\varepsilon(p)$, геодезична, $\gamma_0 = \gamma_v$, і вони усі мають довжину r. Диференціюючи вираз для довжини за τ і перетворюючи, отримуємо, що

$g_q(\gamma_v'(\underset{t_0}{r}), (\exp_p \circ u)'(0)) = 0$. ◭

<u>Rem.</u> Тобто в $B^N_\varepsilon(p)$ геодезичні, що виходять з p, ортогональні експоненційним образам гіперсфер T_pM з центром в 0.

<u>Сл. 2.</u> У напівгеодезичних координатах g має вигляд

$$g = dt^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} G_{ij}\, dx^i dx^j.$$

Рм.4. $\forall$ нульового норм. околу $B^N_\varepsilon(p)$ т. $p\in M$ і $\forall q\in B^N_\varepsilon(p)$ геодезична $\gamma_v(t)=\exp_p(tv)$ - єдина (з точністю до заміни параметра) кусково k-гл. найкоротша внутр. м-ки, що з'єднує p і q.

Rem. Тут і далі допускаємо заміни параметра вигляду $t=\psi(\tau)$, де ψ - кусково k-гл. і $\psi'>0$ на всіх проміжках гладкості або $\psi'<0$ на всіх.

▶ Відрізок γ_v, що з'єднує p і q, має у напівгеод. коорд. лок. задання $t\mapsto(t|v|,\alpha_0^1,\dots,\alpha_0^{n-1})$, $t\in\left[0,\frac{|\exp_p^{-1}(q)|}{|v|}\right]$, тому його довжина $l=\int_0^{\frac{|\exp_p^{-1}q|}{|v|}}|v|dt=$
$=|\exp_p^{-1}q|$. Нехай γ - кус. k-гл. шлях, $\gamma:[a,b]\to B^N_\varepsilon(p)$, $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=q$, і у напівгеод. коорд. він має лок. задання $\tau\mapsto(t(\tau),\alpha^1(\tau),\dots,\alpha^{n-1}(\tau))$.

Тоді в силу Сон.2.:

$$l(\gamma)=\int_a^b\sqrt{(t')^2+G_{ij}(\alpha^i)'(\alpha^j)'}\,d\tau\geqslant\begin{bmatrix}(G_{ij})>0\\ \text{визн.}\end{bmatrix}\geqslant\int_a^b|t'|\,d\tau\geqslant\left|\int_a^b t'\,d\tau\right|=|\underset{l}{\underset{\shortparallel}{t(b)}}-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{t(a)}}|=l.$$

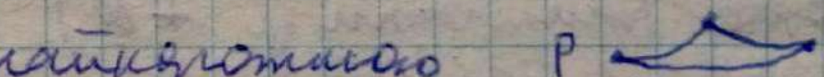
Якщо γ виходить за межі $B^N_\varepsilon(p)$, то вже довжина його відрізку до першої зустрічі з $\partial B^N_\varepsilon(p)$ буде в силу цієї ф-ли $\geq \varepsilon > l$. Тобто γ_v - дійсно найкоротша. При цьому нерівності вище перетворюються на рівності лише при $\alpha^i = \alpha^i_0$, $i = \overline{1, n-1}$ і знакопостійному (на проміжках гладкості) t'. Після заміни T на t γ перетворюється на криву з лок. зн. $t \mapsto (t, \alpha^1_0, \dots, \alpha^{n-1}_0)$. Це γ_v для нат. параметра (при $|v| = 1$). ◭

<u>Впр.</u> Усунути неточність, що пов'язана з лише локального визначеністю $(\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1})$ на S^{n-1} (і з тим, що напівгеод. коорд. не визн. у $p = \gamma(a)$).

<u>Сл. 3.</u> $\forall$ кусково k-гл. найкоротша внутр. м-ки рімановою мн. є геодезичною (з точністю до заміни параметра як у <u>Rem.</u> вище). Зокрема, вона перетворюється на регулярну після такої заміни пар., якщо не є постійною.

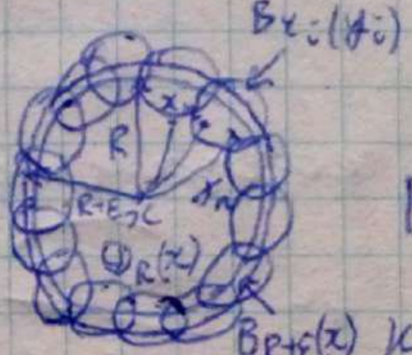
▷ Нехай $\gamma : [a, b] \to M$ - куск. k-гл. найкор. $\forall t \in [a, b]$ нехай U - окіл $\gamma(t)$ з <u>Тh. 3.</u> Тоді для $t_1, t_2 \in [a, b]$ таких, що

$t_1<t_2$, $t\in[t_1,t_2]$ і $\gamma([t_1,t_2])\subset U$ за Рч.3 маємо $\gamma(t_2)\in B^N_\delta(\gamma(t_1))$. Оскільки $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ — найкоротша (див. 1ст. з попер. теми), за Рч.4 $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ перетворюється на геодезичну після заміни параметра. Ці заміни на проміжках в околі кожної $t\in[a,b]$ можна обирати узгоджено, скажімо, переходячи до натурального пар. $s(t)=l(\gamma|_{[a,t]})=d_l(\gamma(a),\gamma(t))$. Таким чином отримаємо геодезичну (ці заміни параметра дадуть гладку криву в силу єдиності геодезичної в околі $\forall$ точки). ▲

Rem. Тобто "ламана" не може бути найкоротшою. p  q

Сл.4 $\forall$ геодезичної $\gamma\in C^k(I,M)$ рім. мн. (M,g) $\forall t\in I$ $\exists t_1,t_2\in I$ такі, що $t_1<t_2$, $t\in[t_1,t_2]$ і $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ — найкоротша внутр. м-ки.

▷ Ан-но: обираємо $U\ni\gamma(t)$ з Рч.3 і t_1,t_2: $t_1<t_2$, $t\in[t_1,t_2]$ і $\gamma([t_1,t_2])\subset U$. Тоді $\gamma(t_2)\in U\subset B^N_\delta(\gamma(t_1))$, тому $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ — найкоротша в силу Рч.4. ▲



З лок. компактності, $\forall y \in D_R(x)\ \exists r_y > 0$:
$B_{r_y}(y)$ - передкомпакт. $\{B_{r_y}(y)\}_{y \in D_R(x)}$ - відкр. покр.
компакта $D_R(x) \Rightarrow \exists$ скінченне підпокриття
$\{B_{r_i}(y_i)\}_{i=1}^{k}$. Тоді $\exists\ \varepsilon > 0$ таке, що $B_{R+\varepsilon}(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(y_i)$
$\Rightarrow D_{R+\varepsilon}(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} D_{r_i}(y_i)$ - компакт, отже $B_{R+\varepsilon}(x)$ - перед-
(замкн. підмн. комп.)
компакт, і R - не sup. ↯ △

<u>def.</u> Рімановий многовид (M, g) (тут і до кінця теми k-гл., $k \geq 3$) зветься геодезично повним у $p \in M$, якщо $\forall v \in T_pM$ $\exists$ геодезична $\gamma_v : \mathbb{R} \to M$, що прох. через p у напр. v: $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. (M, g) наз. геодезично повним, якщо він геод. повний $\forall p$.

<u>Rem.</u> З геод. повноти у p випливає, зокрема, що $\exp_p : v \mapsto \gamma_v(1)$ визначене на усьому T_pM. І навпаки: якщо визначене $\exp_p(v)\ \forall v$, то $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$

$\forall t$ задає потрібну геодезичну.

Ex. E^n, S^n, H^n геодезично повні (див. опис геодезичних), а відкр. підмножини в них, що не співп. з усім многовидом — геод. неповні

Рч. 10. Геодезична повнота (M, g) у P еквівалентна умові на $x = P$ з пп. 3. і 4. Th. 2.: $\forall$ нат. пар. геодезичної $\gamma : [0, a) \to M : \gamma(0) = P$ $\exists$ її неперервне продовження $\bar{\gamma} : [0, a] \to M$.

$\triangleright$ $\Rightarrow$. Достатньо випустити $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ таку, що $\bar{\gamma}(0) = \gamma(0)$, $\bar{\gamma}'(0) = \gamma'(+0)$. В силу єдиності геод., вона продовжує γ.

$\Leftarrow$. $\forall\, v \in T_pM$ (при $v \neq 0$ можна не обмежуючи заг. вважати $|v| = 1$; випадок $v = 0$ очевидний) нехай $\gamma : (-a, a) \to M$ — геод. з $\gamma(0) = P$ і $\gamma'(0) = v$, вона нат. пар., і нехай $(-a, a)$ при цьому — max симетричний інтервал $\exists$-ння розв'язку відповідної системи ЗДР

(можемо "зшити" цю геод. з розв'язків у кількох лок. с.к.)

$\nearrow$ $a < +\infty$. В силу умови, $\exists$ непер. продовження $\bar{\gamma} : (-a, a] \to$ $\to M$. Тоді випустимо геод. μ : $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to M$ таку, що $\mu(a) = \bar{\gamma}(a)$ і $\mu'(a) = \gamma'(a-0)$. В силу єдиності, $\mu|_{(a-\varepsilon, a]} = \bar{\gamma}|_{(a-\varepsilon, a]}$. Ан-но (застосовуючи умову до $t \mapsto \gamma(-t)$), продовжимо вліво і отримаємо геод. на $(-a-\delta, a+\varepsilon)$, що продовжує γ, тобто інтервал був не max $\Downarrow$ $\triangle$

<u>Сл.</u> (Ріманова теорема Хопфа – Рінова – Кон - Фоссена)

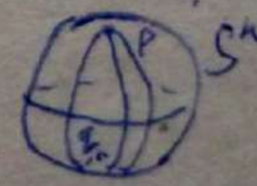
Нехай (M, g) - зв'язний ріман. мн. Наступні твердження еквівалентні:

<u>1.</u> M повний
<u>2.</u> M обмежено компактний $\Big\}$ відносно внутрішньої метрики
<u>3.</u> M геодезично повний
<u>4.</u> $\exists\, p \in M$: M геодезично повний в p.

Якщо виконане будь-яке з цих тверджень, то $\forall\, p, q \in M$ $\exists$ найкоротша геодезична, що з'єднує p і q.

<u>Rem.</u> Геодезична - в силу <u>Рч. 5.</u> <u>Ex.</u> Отже, E^n, S^n, H^n повні.

<u>Rem.</u> На відміну від ситуації у кульовому норм. околі, глобально найкоротша може бути не єдина: згадаймо приклад діам. протилежних точок S^n.



Тензор кривини та кривизна ріманової метрики

M - k-гл. многовид, $k \geq 3$, $\dim M = n \geq 2$

__Def.__ Тензором (оператором) кривини афінної зв'язності ∇ на M зветься $R: \mathcal{X}^{k-2}(M) \times \mathcal{X}^{k-2}(M) \times \mathcal{X}^{k-1}(M) \to \mathcal{X}^{k-3}(M)$:

$$X, Y, Z \mapsto R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

__Rem__ У деяких джерелах використовують __def__ з протилежним знаком

__Pr__ R задає $(k-3)$-гладке $(3,1)$-тензорне поле на M

▷ Згідно з альтернативним __def.__ $(l,1)$-тенз полів, тут потрібно перевірити 3-лінійність відн. додавання вект. полів (що легко випливає з властивостей ∇ і $[\cdot,\cdot]$) та множення на ф-ції (апріорі з $C^{k-1}(M)$ або $C^{k-2}(M)$): $\forall X, Y, Z, f$

$$R(fX, Y)Z = f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y] - Y(f)X} Z = fR(X,Y)Z - \cancel{Y(f)\nabla_X Z} + \cancel{Y(f)\nabla_X Z} = f R(X,Y)Z.$$

Ан-но за Y (або можна використати власт. симетрії нижче).

$$R(X,Y)(fZ) = \nabla_X(f\nabla_Y Z + Y(f)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z + X(f)Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z -$$
$$- [X,Y](f)Z = fR(X,Y)Z + \cancel{X(f)\nabla_Y Z} + \cancel{Y(f)\nabla_X Z} + \cancel{X(Y(f))Z} -$$
$$- \cancel{Y(f)\nabla_X Z} - \cancel{X(f)\nabla_Y Z} - \cancel{Y(X(f))Z} - \cancel{[X,Y](f)Z} = fR(X,Y)Z.$$

Тут використали def. $[\cdot,\cdot]$. Гладкість випл. з лок. ф-ли у наст. Rem. ▲

Rem. Тобто $\forall p \in M$ визначене значення R у p: 3-лінійне $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ таке, що $R_p(X_p, Y_p)Z_p = (R(X,Y)Z)_p \ \forall X, Y, Z$.

У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U: $R|_U = R^l_{ijk}\, dx^j \otimes dx^k \otimes dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$, тобто $R_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = R^l_{ijk}(p)\frac{\partial}{\partial x^l} \ \forall p \in U$. Порядок індексів тут традиційний для афінної та ріманової геом. Тобто, якщо $\{\Gamma^k_{ij}\}$ − с.к. ∇, то на U

$$R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_{\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right]}_{=0}}\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^m_{ki}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) -$$
$$- \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\left(\Gamma^m_{ji}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^m} + \underbrace{\Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{jm}\frac{\partial}{\partial x^l}}_{\forall i,j,k,l = \overline{1,n}} - \frac{\partial \Gamma^m_{ji}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma^m_{ji}\Gamma^l_{km}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Т.ч., змінюючи за необх. індекс, маємо $R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{jm} - \Gamma^m_{ji}\Gamma^l_{km}$.

Зокрема, оскільки Γ^k_{ij} − $(k-2)$-гладкі, ці коеф. $(k-3)$-гладкі, тому дійсно R − $(k-3)$-гл. поле (і може бути визначене для $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^{k-3}(M)$).

__Pr.__ (Симетрії тензора кривини) $\forall$ в. полів X, Y, Z, W (відп. гладкостей):

__1.__ $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.

__2.__ ∇ без скруту $\Rightarrow R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (перша тотожність Біанкі, або тотожність Річчі).

__3.__ ∇ без скруту $\Rightarrow (\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$. (друга тотожність Біанкі).

__4.__ ∇ узгоджена з рімановою метрикою g на $M \Rightarrow g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$.

__5.__ ∇ - ріманова зв. рім. м-ки g на $M \Rightarrow g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$.

$\triangleright$ __Впр.__ або див. літературу, наприклад, Постников, Ріманова геометрія. $\triangle$

__Rem.__ З цього випливають аналогічні симетрії (крім __3.__) тензора R_p $\forall p \in M$.

__Rem.__ Для фіксованих $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ відобр. $R(\cdot, Y)X : \mathfrak{X}^{k-2}(M) \to \mathfrak{X}^{k-3}(M)$ (тобто $Z \mapsto R(Z,Y)X$) задає $(1,1)$-тензорне поле (поле операторів). З власт. R випливає, що насправді воно $(k-3)$-гл., як і його слід.

def. Тензором Річчі аф. зв'язності ∇ на M зветься

$Ric : \mathcal{X}^{k-1}(M) \times \mathcal{X}^{k-2}(M) \to C^{k-3}(M) : X, Y \mapsto Ric(X,Y) := Tr(R(\cdot, Y)X).$

Rem Тобто $\forall p \in M$ $Ric(X,Y)(p) = Tr((R(\cdot,Y)X)_p) = Tr(R_p(\cdot, Y_p)X_p) =$
$= \sum_{i=1}^{n} \langle R_p(e_i, Y_p)X_p, e_i \rangle$ $\forall$ скал. добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на T_pM (наприклад, g_p для деякої рім. м-ки g на M) і $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - ортонормованого відн. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базиса T_pM.

Pr. Ric - $(k-3)$-гладка 2-форма на M, симетрична, якщо ∇ - рім. зв'язність деякої рім. м-ки на M.

$\triangleright$ $(k-3)$-гладкість та лінійність над $C^{k-3}(M)$ випливають з **def.**, властивостей R та лінійності сліда у $\forall$ точці (див. також локальну ф-лу нижче). Якщо ∇ - рім. зв. g, то в позн. вище $\forall X, Y$:

$$Ric(X,Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} g_p(R_p(e_i, Y_p)X_p, e_i) = \begin{bmatrix} \text{сим. } 5. \\ \text{для } R_p \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g_p(R_p(X_p, e_i)e_i, Y_p) =$$
$$= \begin{bmatrix} \text{скл. } 1 \text{ і } 4 \\ \text{для } R_p \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g_p(R_p(e_i, X_p)Y_p, e_i) = Ric(Y,X)(p) \quad \forall p \in M. \blacktriangle$$

Rem. У лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ на U: $Ric|_U = Ric_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ $(= Ric_{ij}\, dx^i dx^j$ $\forall i,j=\overline{1,n}$
у симетричному випадку), де $Ric_{ij} = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = Tr\left(R\left(\cdot, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right) =$
$= Tr\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \underset{\forall k=\overline{1,n}}{\mapsto} R^l_{ikj} \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = R^k_{ikj}$ (згортка R за індексом зверху і другим знизу)

■ Зокрема, ці коефіцієнти (а отже і Ric) дійсно $(k-3)$-гл.

Rem. Далі всюди розглядаємо рімановий (M,g) (k-гл., де $k \geq 3$ або $k \geq 4$ за необхідності) і його ріманову зв'язність ∇.

def. Тензорами кривини та Річчі ріманової м-ки g (або рім. многовиду (M,g)) звуться тензори кривини та Річчі відповідно рім. зв'язності g. Тензором Рімана g (або (M,g)) зветься 4-форма $R: \mathcal{X}^{k-3}(M)\times\mathcal{X}^{k-3}(M)\times\mathcal{X}^{k-3}(M)\times\mathcal{X}^{k-3}(M) \to C^{k-3}(M): X,Y,Z,W \mapsto R(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z,W)$.

Rem. З властивостей тенз. кривини і g, це дійсно 4-форма на M, $(k-3)$-гладка (що отримана з тенз. кривини спусканням індекса). Властивості її симетрії випл. з властив. симетрії тенз. кривини ($\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{4}$, $\underline{5}$). Локально у $(x^1,\dots,x^n)$ на U цей тензор (форма) задається:

$R_{ijkl} := R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g\left(R^m_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g_{im}R^m_{jkl}$ $\forall\, i,j,k,l = \overline{1,n}$,

де $g|_U = g_{ij}\,dx^i dx^j$. Властивості симетрії тоді дають:

$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ (1), $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ (2),

$R_{ijkl} = -R_{jikl}$ (4) і $R_{ijkl} = R_{klij}$ (5) $\forall\, i,j,k,l = \overline{1,n}$.

Впр. У $\forall$ точці R задається $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ лін. незалежними компонентами

Ex. При $n=2$ це, наприклад, R_{1212}.

При $n=3$: $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{1223}, R_{1323}$.

Впр. Перевірити, що при $n=3$ R однозначно визначений тенз. Річчі (що тенс має 6 "значимих" компонент).

def Секційною кривиною рім. мн. (M,g) у $p\in M$ у напрямку площини (тобто 2-вимірного векторного підпростору) $\sigma \subset T_pM$ зветься
$$K_p(\sigma) := \frac{g_p(R_p(v,w)w,v)}{g_p(v,v)\,g_p(w,w) - g_p(v,w)^2},$$
де $\{v,w\}$ - якийсь базис σ (тобто $v, w \in \sigma$ - лін. незалежні, $\sigma = \mathrm{span}\{v,w\}$)

Рч $K_p(\sigma)$ визначена коректно, тобто не залежить від вибору v і w.

▷ Нехай $\{\tilde{v}, \tilde{w}\}$ – інший базис σ і $\tilde{v} = \alpha v + \beta w$, $\tilde{w} = \gamma v + \delta w$.

Тоді $C := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ – м-ця переходу між цими базисами, зокрема,

$0 \neq \det C = \alpha\delta - \beta\gamma$. В чисельнику за власт. 1 і 4. симетрії:

$$g_p(R_p(\tilde{v}, \tilde{w})\tilde{w}, \tilde{v}) = g_p(R_p(\alpha v + \beta w, \gamma v + \delta w)(\gamma v + \delta w), \alpha v + \beta w) =$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)\, g_p(R_p(v, w)w, v)$$

В знаменнику стоїть визначник м-ці Грама $g_p|_\sigma$ у базисах $\{v, w\}$ і $\{\tilde{v}, \tilde{w}\}$ відп. Якщо це м-ці G і $\tilde{G}$, то $\tilde{G} = C^T G C \Rightarrow$ $\det \tilde{G} = (\det C)^2 \det G = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \det G$. $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ скорочуються, отже

$$\frac{g_p(R_p(\tilde{v}, \tilde{w})\tilde{w}, \tilde{v})}{g_p(\tilde{v}, \tilde{v})\, g_p(\tilde{w}, \tilde{w}) - g_p(\tilde{v}, \tilde{w})^2} = \frac{g_p(R_p(v, w)w, v)}{g_p(v, v)\, g_p(w, w) - g_p(v, w)^2}. \quad \triangle$$

Rem Насправді R_p однозначно визначений секційними кривинами в p $\forall p \in M$ (Впр. або див. нижче).

Rem При $\dim M = 2$ площина єдина: $\sigma = T_pM$, тому говорять просто про (гауссову) кривину K у точці, що є ф-цією на M.

Локально нехай (у позначеннях як вище) $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$K_p(\sigma) = \frac{R_{ijkl}\, v^i w^j v^k w^l}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})\, v^i w^j v^k w^l}.$$

При $n=2$, взявши $v = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $w = \frac{\partial}{\partial x^2}$, маємо $K(p) = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$.

Rem (геометричний сенс секц. кривини). Нехай $p \in M$, U - якийсь нормальний окіл p, $\sigma \subset T_pM$ - площина. Тоді $\exp_p : \varphi_p^{-1}(U) \cap \sigma \to M$ задає вкладену поверхню (двовимірний підмноговид) у M, що містить p (і з дотичною площиною σ). Вона (її образ) складається з геодезичних (точніше, їх носіїв), що випускаються з p у напрямках векторів з σ (зокрема, вона "цілком геодезична в p", тобто її II фунд. форма у p нульова - див. курс "Геометрія підмноговидів"). Тоді гауссова кривина цієї поверхні у p (відн. I фунд. форми) дорівнює $K_p(\sigma)$ (Впр.)

def. Кривиною Річчі рім. мн. (M,g) у $p\in M$ у напрямку вектора $0\neq v\in T_pM$ зветься $\mathrm{Ric}_p(v) := \dfrac{\mathrm{Ric}_p(v,v)}{g_p(v,v)}$.

Rem. Тобто вона залежить лише від напрямку v: $\mathrm{Ric}_p(v)=\mathrm{Ric}_p(\lambda v)$ $\forall \lambda\neq 0$. Іншими словами, у p це ф-ція від прямих (як K_p – від площин), тобто на відп. проективному просторі $PT_pM\to\mathbb{R}$. З компактності пр. простору і очевидної неперервності випливає, що Ric_p приймає найменше і найбільше значення. **Впр.** Це вірно також для K_p.

Іноді кр. Річчі ділять на $n-1$ (тоді вона, зокрема, дорівнює K для многовида постійної секц. кривини K – див. нижче).

Впр. Як пов'язані кривини Річчі та секц. кривини у p?

def. Скалярною кривиною рім. мн. (M,g) у $p\in M$ зветься слід тензора Річчі у p відн. скалярного добутку g_p: $s(p):=\mathrm{Tr}_{g_p}\mathrm{Ric}_p$.

Rem. Тобто $s(p)=\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}_p(e_i,e_i)=\sum_{i,j=1}^n g_p(R_p(e_i,e_j)e_j,e_i)$ для деякого ортонорм. відн. g_p базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ пр-ру T_pM.

тоді $0 = g_q(\gamma'_v(t_0), (\exp_p \circ u)'(0))$. Це і є твердження леми Гаусса. ▲

<u>Рч 3.</u> (Друга варіація довжини геодезичної з закріпленими кінцями)
з закріпленими кінцями

Нехай $k \geq 3$, $\sigma \in C^k([a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon), M)$ — варіація нат. парам. геодезичної γ, $\gamma_\tau = \sigma(\cdot, \tau)$ $\forall \tau$, $Y(t) = d_{(t,0)}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ $\forall t$. Тоді

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \ell(\gamma_\tau)\Big|_{\tau=0} = \int_a^b \left(|\nabla_{\gamma'} Y^\perp(t)|^2_{\gamma(t)} - g_{\gamma(t)}\left(R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t))\gamma'(t), Y(t)\right)\right) dt,$$

де $Y^\perp$ — поле уздовж γ, що утворене ортогональним проектуванням $\forall t$ $Y(t)$ на $\gamma'(t)^\perp$: $Y^\perp = Y - g_\gamma(Y, \gamma')\gamma'$; $|\cdot|^2_{\gamma(t)} = g_{\gamma(t)}(\cdot, \cdot)$.

Якщо $Y = Y^\perp$, тобто $Y(t) \perp \gamma'(t)$ $\forall t$, то

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \ell(\gamma_\tau)\Big|_{\tau=0} = -\int_a^b g_{\gamma(t)}\left(\nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'} Y(t) + R_{\gamma(t)}(Y(t), \gamma'(t))\gamma'(t), Y(t)\right) dt.$$

▷ Док. так же. ▲

<u>Ex</u> Для пласких (тобто лок. евклідових) (M, g) $\forall$ варіації це $\int_a^b |\nabla_{\gamma'} Y^\perp(t)|^2_{\gamma(t)} dt \geq 0$, бо $R = 0$. Але не будь-яка геод. є найкоротшою — згадаймо приклад циліндра. Цей критерій — лише для "найкоротших серед близьких".

Многовиди кривини, що обмежена знизу

Тут, якщо не зазначене інше, (M,g) - ℓ-м. рім. мн., $\ell \geq 3$, $\dim M = n \geq 2$, ∇, R, Ric, K_p - як вище.

Th (Майерс). Нехай (M,g) - повний зв'язний n-вим. рімановий многовид, кривини Річчі якого обмежені знизу числом $(n-1)k$, де $k>0$ ($k\in\mathbb{R}$). Тоді M компактний, і його діаметр (як метричного простору з внутрішньою м-кою) не перевищує $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Rem. Умова обмеженості означає, що $\forall p\in M \ \forall\, 0\neq v\in T_pM \ Ric_p(v)\geq k(n-1)$.

Ex. Умови **Th.** виконані для простору постійної кривини $k>0$, наприклад, для сфери $M^n(k)=S^n_{\frac{1}{\sqrt{k}}}$. ▮ Дійсно, її кривини Річчі рівні $(n-1)k$ (див. попер. тему). При цьому її діаметр – в точності $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (відстань між діам. протилежними точками сфери).

 $\frac{\pi}{\sqrt{k}}=\pi R$

Rem. Цю теорему можна послабити, посиливши її умову: перейдемо від кривини Річчі до секційних.

Def. Будемо говорити, що рім. мн. (M,g) має (секційну) кривину, обмежену знизу (відп. зверху) числом $k\in\mathbb{R}$ і позначати це $K\geq k$ ($K\leq k$), якщо $\forall p\in M \ \forall$ пл. $\sigma\subset T_pM$ $K_p(\sigma)\geq k$ ($K_p(\sigma)\leq k$); і так само для строгих нерівностей.

Lem. Якщо $K\geq k$ ($K\leq k$), то всі його кривини Річчі обмежені

Сл. (теорема Бонне). Якщо (M, g) - повний зв'язний з $K \geq k > 0$,

то він компактний, і його діаметр $\leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.