

860. Знайти рівняння інердори з асимптотами $x-1=0$, $2x-y+1=0$, що дотикаються до прямої $4x+y+5=0$.

Пок'аємо з 875., що рівняння пари асимптот відрізняється від рівняння інердори лише константою, маємо інердору:

$$(x-1)(2x-y+1)+C=0$$

$$2x^2 - xy + x - 2x + y \underbrace{(-1+C)}_{=:d} = 0$$

$$2x^2 - xy - x + y + d = 0$$

Нехай $4x+y+5=0$ - дотична у $(x_0, y_0) \in$ інердорі, маємо

$$2x_0^2 - x_0y_0 - x_0 + y_0 + d = 0$$

$$(4x_0^2 - 2x_0y_0 - 2x_0 + 2y_0 + 2d = 0)$$

у рівн. дотичної:

$$(4x_0 - y_0 - 1)(x - x_0) + (-x_0 + 1)(y - y_0) = 0$$

$$(4x_0 - y_0 - 1)x + (-x_0 + 1)y - 4x_0^2 + x_0y_0 + x_0 + x_0y_0 - y_0 = 0$$

$$(\cdot 4x_0^2 - 2x_0y_0 - x_0 + y_0 = x_0 - y_0 - 2d)$$

$$(4x_0 - y_0 - 1)x + (-x_0 + 1)y - x_0 + y_0 + 2d = 0$$

Значит $4x + y + 5 = 0$

$$\frac{4x_0 - y_0 - 1}{4} = \frac{-x_0 + 1}{1} = \frac{-x_0 + y_0 + 2d}{5}$$

$$4x_0 - y_0 - 1 = -4x_0 + 4 \Rightarrow 8x_0 - y_0 - 5 = 0$$

$$-5x_0 + 5 = -x_0 + y_0 + 2d \Rightarrow 4x_0 + y_0 - 5 + 2d = 0$$

$$\begin{cases} 8x_0 - y_0 - 5 = 0 \\ 4x_0 + y_0 - 5 + 2d = 0 \end{cases}$$

$$12x_0 - 10 + 2d = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{5-d}{6} \Rightarrow y_0 = 8x_0 - 5 = \frac{20-4d}{3} - 5 = \frac{5-4d}{3}$$

Подставим:

$$2 \cdot \left(\frac{5-d}{6} \right)^2 - \left(\frac{5-4d}{3} \right) \left(\frac{5-d}{6} \right) - \frac{5-d}{6} + \frac{5-4d}{3} + d = 0$$

$$\frac{1}{18} (25 - 10d + d^2 - 25 + 25d - 4d^2 - 15 + 3d + 30 - 24d + 18d) = 0$$

$$-3d^2 + 12d + 15 = 0$$

$$d^2 - 4d - 5 = 0$$

$$d = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

$$d = -1, d = 5$$

Але $d = -1$ виходить $C = 0$, тобто
це пара дотичних (може $(x_0, y_0) = (1, 3)$,
тобто точка їх перетину - єдиний перетин,
де $F'_x = F'_y = 0$). Тому $d = 5$. Рівняння:

$$2x^2 - xy - x + y + 5 = 0.$$

1046(3) Знайти площину симетрії поверхні

$$4x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8xz - 16x - 16y - 8z + 4z = 0$$

Матриця квадр. частини:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ -5 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

це еліпс. параболоїд (кр. гіл відомо до $I_4 \neq 0$),
Власні знач. (було у $q(z)$): $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 0$

Візн. вл. вектори: $a_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right), a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$
 $a_3 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Площина симетрії стр. до векторів,
що візн. нульовим вл. значенням:

$$1 \cdot (4x - 5y - 4z - 8) + 1 \cdot (-5x + 4y - 4z - 8) - 4 \cdot (-4x - 4y + 16z - 4) = 0$$

$$18x + 18y - 72z = 0$$

$$x + y - 4z = 0$$

$$1 \cdot (4x - 5y - 4z - 8) - 1 \cdot (-5x + 4y - 4z - 8) + 0 = 0$$

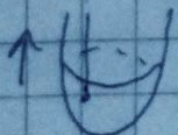
$$12x - 12y = 0$$

$$x - y = 0$$

Що буде, якщо спробувати знайти площину, що стр. до третього вектора?

$$2 \cdot (4x - 5y - 4z - 8) + 2 \cdot (-5x + 4y - 4z - 8) + 1 \cdot (-4x - 4y + 16z - 4) = 0$$
$$-36 = 0$$

Така площина $\nexists$ (це напрямки всі параболоїда,

↑  тому вони не паралельні ніякій хвилі).
Знайти площину симетрії можна

Використати, щоб знайти вершину параболоїда:
це перетин цих двох площин і параболоїда (а-
бо, вершина параболоїда - її перетин з віссю сим.).

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8xz - 16x - 16y - 8z + 42 = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$x = y \Rightarrow 2x - 4z = 0, x = y = 2z$. Підставимо:

$$28z^2 + 28z^2 + 16z^2 - 40z^2 - 16z^2 - 16z^2 - 32z - 32z - 8z + 42 = 0$$

$$-42z + 42 = 0$$

$z = 1 \Rightarrow x = y = 2$. Отже, вершина $(2, 2, 1)$ - знайдемо.

з початком параб. с.к., що був знайдений у 9/3
іншим методом.



1106. Знайти рівн. діам. площини поверхні

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 2z, \text{ що прох. через пряму } \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases},$$

параболоїда спрясеного до неї хорд (до якого вона
спрясена).

Пл., що спрясена до $(1, \mu, 0)$ в одн. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} - 2z = 0$

$$1 \cdot \frac{x}{6} - \mu \frac{y}{9} - 0 = 0$$

Проекціює через $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$:

$$-0 = 0, \frac{1}{6} - \frac{\mu}{9} = 0 \Rightarrow (1, \mu, 0) \sim (9, 3, 0)$$

$$\text{рівн.: } \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 0, x - y = 0.$$

Або використати переток площин.

1079. Знайти дотичні площини до поверхні

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0, \text{ що пер. } x + 2y + z = 0.$$

Дом. площина $\gamma (x_0, y_0, z_0) \in$ поверхні:

$$(4x_0 + 2z_0)(x - x_0) + (6y_0 - 4)(y - y_0) + (2x_0 + 4z_0 - 2)(z - z_0) = 0$$

$$(4x_0 + 2z_0)x + (6y_0 - 4)y + (2x_0 + 4z_0 - 2)z - 4x_0^2 - 6y_0^2 - 4z_0^2 - 4x_0z_0 + 4y_0 + 2z_0 = 0$$

$$(4x_0 + 2z_0)x + (6y_0 - 4)y + (2x_0 + 4z_0 - 2)z - 4y_0 - 2z_0 + 3 = 0$$

$$\parallel x + 2y + z = 0!$$

$$\frac{4x_0 + 2z_0}{1} = \frac{6y_0 - 4}{2} = \frac{2x_0 + 4z_0 - 2}{0}$$

Залишилося розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_0 - 3y_0 + 2z_0 + 2 = 0 \\ x_0 + 2z_0 - 1 = 0 \\ 4x_0^2 + 6y_0^2 + 4z_0^2 + 4x_0z_0 - 8y_0 - 4z_0 + 3 = 0 \end{cases}$$

і підставити розв'язки у рівн. площини.