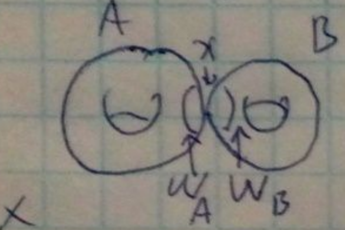
Косньовскі, 24.4(d). $X \cong T^2 \vee T^2$: $X = A \cup B$, $A \cong T^2$, $B \cong T^2$ і $A \cap B = \{x\}$. Знайти $\pi_1(X, x)$.

$U := A \cup W_B$, де W_B – стягнутий окіл x у B, $V := B \cup W_A$, де W_A – стягнутий окіл x у A. Тоді: U, V – лін. зв'язні і



$U \sim V \sim T^2 \Rightarrow \pi_1(U, x) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, $\pi_2(V, x) = \langle c, d \mid cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$; $U \cap V \neq \varnothing$ – стягнутий (зокрема, лін. зв.) $\Rightarrow \pi_1(U \cap V, x) = \langle \rangle$. За Th. З-в.К., $\pi_1(X, x) \cong \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$ (вільний добуток)

Косньовскі 24.4(g). $X = U \cup V$, де U і V відкр., лін. зв, $U \cap V \neq \varnothing$ і лін. зв. (тобто ми в умовах Th. З.-в.К.). Нехай V однозв'язний. Оберемо якусь $x \in U \cap V$.

1. $i_{U*} : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ – сюр.

2. $\mathrm{Ker}\, i_{U*}$ – найменша норм. підгрупа $\pi_1(U, x)$, що включає $\mathrm{Im}\, i_{UV*} = i_{UV*}(\pi_1(U \cap V, x))$

(Нагадаємо позн. з лекції! $\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "i_U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_{UV}"] \arrow[dr, "i_{VU}"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "i_V"'] & \end{tikzcd}$)

Нехай $\pi_1(U,x) = \langle a_1,\dots,a_n \mid r_1,\dots,r_m \rangle$ і $\pi_1(U\cap V,x) = \langle c_1,\dots,c_p \mid t_1,\dots,t_o \rangle$.

За умовою, $\pi_1(V,x) = \langle\,\rangle$. Тоді за Тм. З.-в.К.

$$\pi_1(X,x) \simeq \langle a_1,\dots a_n \mid r_1,\dots,r_m,\ i_{UV*}(c_1),\dots,i_{UV*}(c_p) \rangle,$$

бо $i_{VU*} = 0$ ($i_{VU*}: \pi_1(U\cap V,x) \to \pi_1(V,x)$ – тривв.).

1. За побудовою у доведенні Тм., твірні $\pi_1(X,x)$, що відп. $a_1,\dots,a_n$ – це $i_{U*}(a_1),\dots,i_{U*}(a_n)$, тобто $\forall$ ел-т $\pi_1(X,x)$ – це добуток (слово) цих ел-тів і обернених до них: $i_{U*}(a_{i_1})^{\varepsilon_1}\dots i_{U*}(a_{i_k})^{\varepsilon_k} =$
$= i_{U*}(a_{i_1}^{\varepsilon_1}\dots a_{i_k}^{\varepsilon_k})$, де $i_1,\dots,i_k = \overline{1,n}$ і $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k = \pm 1$. Це й означає,
бо i_{U*} – гом-зм | що i_{U*} – епі.

2. $\forall\, i = \overline{1,p}$ $\quad i_{U*}(i_{UV*}(c_i))$ – трив. елемент $\pi_1(X,x)$, бо

$\pi_1(X,x)$ має співвідношення $i_{UV*}(c_i)$ (що насправді означає $i_{U*}(i_{UV*}(c_i))$ за побудовою). Отже, $\operatorname{Im} i_{UV*} \subset \operatorname{Ker} i_{U*}$ (бо $c_1,\dots,c_p$ – тривіальні $\pi_1(U\cap V,x)$). Тоді й $H \subset \operatorname{Ker} i_{U*}$, де H – найменша норм. підгр. $\pi_1(U,x)$, що містить $\operatorname{Im} i_{UV*}$ і складається з усіх можливих добутків ел-тів $\operatorname{Im} i_{UV*}$, можливо, спряжених з ел-тами $\pi_1(U,x)$. Але якщо ел-т $a \in \pi_1(U,x)$ належить до $\operatorname{Ker} i_{U*}$, тобто тривіальний у $\pi_1(X,x)$ зі співвідн. $u_1,\dots,u_m, i_{UV*}(c_1),\dots,i_{UV*}(c_p)$ (ототожнюємо ел-ти з їх образами під дією i_{U*}), то він після викреслювання підслів, що тривіальні у $\pi_1(U,x)$ має вигляд

$a = w_1 i_{UV*}(c_{i_1})^{\varepsilon_1} w_2 i_{UV*}(c_{i_2})^{\varepsilon_2} w_3 \dots w_k i_{UV*}(c_{i_k})^{\varepsilon_k} w_{k+1}$, де $i_1,\dots,i_k = \overline{1,p}$, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k = \pm 1$, і $w_1 w_2 \dots w_{k+1} = e$. Тоді перепишемо: $a = w_1 i_{UV*}(c_{i_1})^{\varepsilon_1} w_1^{-1} w_1 w_2 i_{UV*}(c_{i_2})^{\varepsilon_2} (w_1 w_2)^{-1} w_1 w_2 w_3 \dots w_1 w_2 \dots w_k i_{UV*}(c_{i_k})^{\varepsilon_k} w_{k+1}$ – це добуток спряжених до $i_{UV*}(c_{i_j})^{\varepsilon_j}$, бо $w_{k+1} = (w_1 \dots w_k)^{-1}$.

Т.ч., $a \in H$. Отже, $\operatorname{Ker} i_{U*} \subset H \Rightarrow \operatorname{Ker} i_{U*} = H$.