Задача 5.3c. Для загальної лінійчатої поверхні маємо параметризацію

$$r(s,\lambda) = \rho(s) + \lambda\, e(s),$$

де s – регулярний параметр напрямної ρ. Крім того, не обмежуючи загальність, будемо відразу вважати напрямне поле твірних одиничним ($|e| = 1$), як вказано в умові. Тоді

$$r_s = \rho' + \lambda\, e' = \tau + \lambda\, e',$$

$$r_\lambda = e,$$

Тоді в околі кожної регулярної точки маємо

$$g_{11} = \langle r_s, r_s\rangle = |\tau + \lambda\, e'|^2 = 1 + 2\lambda\langle\tau, e'\rangle + \lambda^2|e'|^2,$$

$$g_{12} = \langle r_s, r_\lambda\rangle = \langle\tau + \lambda\, e', e\rangle = \langle\tau, e\rangle,$$
$$g_{22} = \langle r_\lambda, r_\lambda\rangle = \langle e, e\rangle = |e|^2 = 1.$$

Тут ми використали, що $|e| = 1$, а отже $\langle e', e\rangle = 0$. Таким чином, перша форма має вигляд

$$I = (1 + 2\lambda\langle\tau(s), e'(s)\rangle + \lambda^2|e'(s)|^2)\, ds^2 + 2\langle\tau(s), e(s)\rangle\, ds\, d\lambda + d\lambda^2.$$

Зокрема, для гелікоїда $\rho(s) = (0, 0, s)$ – вертикальна пряма з натуральним параметром $s = a\,v$, $e(s) = \left(\cos\frac{s}{a},\, \sin\frac{s}{a},\, 0\right)$ і $u = \lambda$; для циліндра $e' = 0$; для конуса $e = -\rho$ і $v = 1 - \lambda$. Якщо вважати, що напрямна ортогональна до твірних, тобто $\langle\tau, e\rangle = 0$, то знову маємо напівгеодезичну параметризацію:

$$I = (1 + 2\lambda\langle\tau(s), e'(s)\rangle + \lambda^2|e'(s)|^2)\, ds^2 + d\lambda^2.$$

Розглянемо ще випадок поверхні дотичних (торса) натурально параметризованої кривої ρ. Для неї $e = \tau$, отже в силу формул Френе $e' = k\nu$. Звідси маємо, що $\langle\tau, e'\rangle = 0$, $|e'|^2 = k^2$ і $\langle\tau, e\rangle = 1$. Підставляючи у загальну формулу, маємо

$$I = (1 + \lambda^2 k(s)^2)\, ds^2 + 2ds\, d\lambda + d\lambda^2.$$

Задача 5.3d. Розглянемо параметризацію

$$r(s,\varphi) = \rho(s) + \cos\varphi\,\nu(s) + \sin\varphi\,\beta(s),$$

що, як ми знаємо, відповідає трубчатій поверхні радіуса 1 навколо кривої ρ з натуральним параметром s. Згадаємо, що в силу формул Френе

$$r_s = (1 - k\cos\varphi)\,\tau - \varkappa\sin\varphi\,\nu + \varkappa\cos\varphi\,\beta,$$

$$r_\varphi = -\sin\varphi\,\nu + \cos\varphi\,\beta,$$

і регулярними є точки, де $1 - k\cos\varphi \neq 0$. В околах таких точок в силу ортонормованості репера Френе маємо

$$g_{11} = \langle r_s, r_s \rangle = (1 - k\cos\varphi)^2 + (-\varkappa \sin\varphi)^2 + (\varkappa \cos\varphi)^2 = (1 - k\cos\varphi)^2 + \varkappa^2,$$

$$g_{12} = \langle r_s, r_\varphi \rangle = \varkappa \sin^2\varphi + \varkappa \cos^2\varphi = \varkappa,$$
$$g_{22} = \langle r_\varphi, r_\varphi \rangle = (-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1,$$

отже
$$I = \left((1 - k(s)\cos\varphi)^2 + \varkappa(s)^2\right) ds^2 + 2\varkappa(s)\, ds\, d\varphi + d\varphi^2.$$

Зокрема, ці координати напівгеодезичні для пласких кривих (де $\varkappa = 0$).