Варіант 0.

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = so(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq so(3)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Згадаємо, що $\mathfrak{g} = so(4) = \{x \in Mat(4, \mathbb{R}) \mid x + x^T = 0\}$ складається з кососиметричних матриць, тобто з

$$\begin{pmatrix} 0 & d & e & f \\ -d & 0 & a & c \\ -e & -a & 0 & b \\ -f & -c & -b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

– Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.

Дійсно, $\mathfrak{h}$ – векторний підпростір в $\mathfrak{g}$, бо

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & c' \\ 0 & -a' & 0 & b' \\ 0 & -c' & -b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda a + \mu a' & \lambda c + \mu c' \\ 0 & -(\lambda a + \mu a') & 0 & \lambda b + \mu b' \\ 0 & -(\lambda c + \mu c') & -(\lambda b + \mu b') & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

$\forall \; a, b, c, a', b', c', \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Перевіримо, що він замкнений відносно дужки Лі, тобто є підалгеброю Лі. Знову ж для $\forall\ a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & c' \\ 0 & -a' & 0 & b' \\ 0 & -c' & -b' & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & c' \\ 0 & -a' & 0 & b' \\ 0 & -c' & -b' & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & c' \\ 0 & -a' & 0 & b' \\ 0 & -c' & -b' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -aa'-cc' & -cb' & ab' \\ 0 & -bc' & -aa'-bb' & -ac' \\ 0 & ba' & -ca' & -bb'-cc' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -aa'-cc' & -bc' & ba' \\ 0 & -cb' & -aa'-bb' & -ca' \\ 0 & ab' & -ac' & -bb'-cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bc'-cb' & ab'-ba' \\ 0 & -(bc'-cb') & 0 & ca'-ac' \\ 0 & -(ab'-ba') & -(ca'-ac') & 0 \end{pmatrix} \in h$$

Інший спосіб - знайти базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, як у наступному пункті, та перевірити, що $[e_i, e_j] \in h\ \forall\ i, j$.

— Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебри Лі у ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку

$\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} xy$ і такий, що $\{e_1, e_2, e_3\}$ - базис $\mathfrak{h}$.

Просто покладено $a=1$, $b = \ldots = f = 0$ в описі $\mathfrak{so}(4)$ вище і т.д.:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$e_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Дійсно, $\{e_1, e_2, e_3\}$ - базис $\mathfrak{h}$.

Зауважимо, що $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} xy$ пропорційна формі Кіллінга ~~[illegible]~~ компактної $\mathfrak{so}(4)$ (як відомо з лекцій) з від'ємним коеф., тому дійсно є інваріантним скалярним добутком (додатно визначеним). Це все можна й перевірити, наприклад, інваріантність:

$$\langle [x,y], z \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} [x,y] z = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr}((xy - yx) z) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} xyz + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} yxz =$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} xyz + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} xzy = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} x(yz - zy) = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} x[y,z] = \langle x, [y,z] \rangle$$

за властивостями сліду добутку.

Перевіримо ортонормованість, тобто що $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}\ \forall i,j$.

$$\langle e_1, e_1\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-2) = 1$$

і ан-но перевіряється для $e_2, \dots, e_6$ (можна спробувати дати й загальне пояснення, як у прикладах з лекцій).

$$\langle e_1, e_2\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = 0$$

і ан-но для інших пар $\langle e_i, e_j\rangle$ (теж можна дати загальне пояснення).

— Нехай $G = SO(4)$, $H \cong SO(3)$ — зв'язні групи Лі з алгебрами

Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на G/H інв-ну метрику, що породжена $\langle\cdot,\cdot\rangle$ з попер. пункту. Обчислити секційну кривину G/H $K(e_4, e_5)$, використавши нормальність G/H.

Тут мається на увазі, що $H \subset G$ – підгрупа Лі (бо $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – підалгебра Лі). Вона замкнена, бо $SO(3)$ компактна (як відомо з лекцій), а $SO(4)$ хаусдорфова, тому визначений G/H. ~~Її дотичн~~ Його дотичний простір $T_{eH} G/H$ ототожнюється з $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp} \subset \mathfrak{g}$. У нас це підпростір з базисом $\{e_4, e_5, e_6\}$. Тому визначена скалярна кривина $K(e_4, e_5)$ у двовим. площині, що натягнута на e_4, e_5, як пояснено у лекціях.

Метрика G/H є опусканням метрики G, що породжена $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Оскільки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ інваріантна (а G зв'язна), ця м-ка біінваріантна $\Rightarrow$ G/H нормальний (також тут суттєва зв'язність H), як заз зазначено в умові. Тоді ф-ла для кривини:

$$K(e_4, e_5) = \frac{1}{|e_4|^2 |e_5|^2 - \langle e_4, e_5\rangle^2}\left(\frac{1}{4}\left|[e_4, e_5]^p\right|^2 + \left|[e_4, e_5]^h\right|^2\right).$$

Ортонорм $\Rightarrow$ $|e_4|^2 |e_5|^2 - \langle e_4, e_5\rangle^2 = 1\cdot 1 - 0 = 1.$

$$[e_4, e_5] = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix} = -e_1$$

$(\cdot)^p$ і $(\cdot)^h$ – це ортог. проекції на p і h відповідно.

Оскільки $e_1 \in h$ (і $\perp p$), $[e_4, e_5]^p = 0$, $[e_4, e_5]^h = -e_1$, тому $K(e_4, e_5) = (0 + |-e_1|^2) = 1$.

Так і повинно бути, бо з лекцій ми знаємо, що $\underline{SO(4)/SO(3)} \cong S^3$ (й ізометрична).

Коли шукаємо базис у комплексному випадку, має сенс розглядати дійсну й уявну частини окремо. Наприклад, для

$$u(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & di \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}:$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Для ортонормованості у $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} xy$ e_1 і e_4 треба ще домножити на $\sqrt{2}$.