gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 13. Відображення поверхонь. Перша фундаментальна форма

13.1. Відображення поверхонь

Розглянемо неперервне відображення простих поверхонь F і M в $\mathbb{R}^3$:

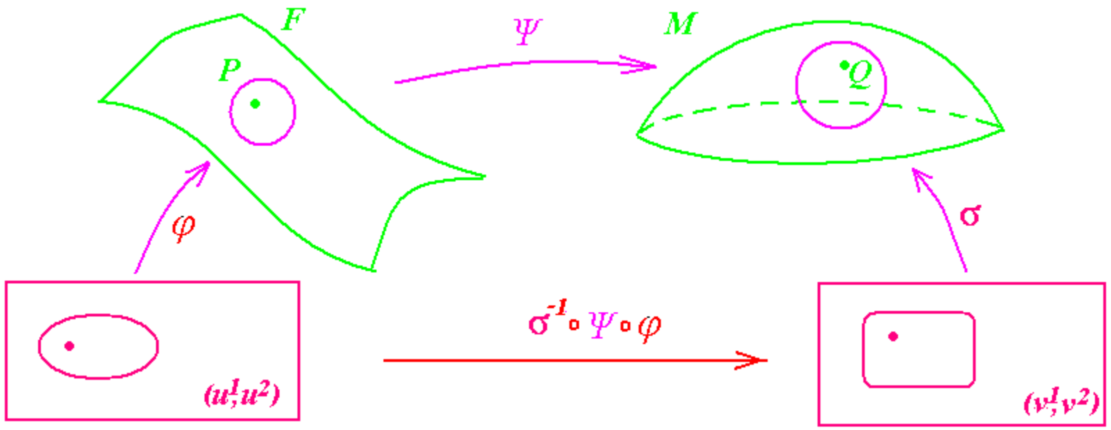
$$\Psi : F \to M$$

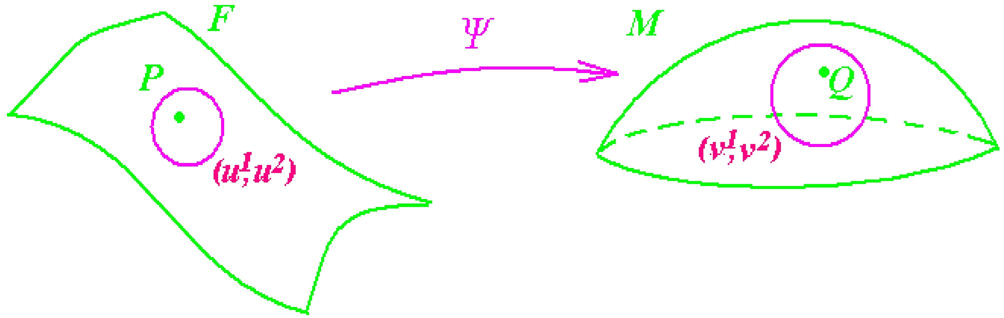
Зафіксуємо точку P на поверхні F та її образ $\Psi(P) = Q$ на поверхні M.

Введемо локальні координати (u^1, u^2) в околі точки P на поверхні F і локальні координати (v^1, v^2) в околі точки Q на поверхні M.

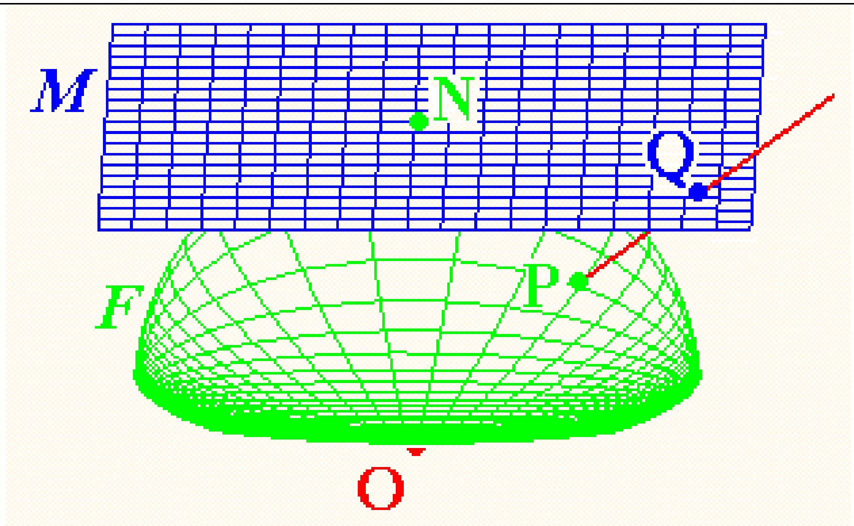
Тоді в локальних координатах відображення Ψ задається у вигляді

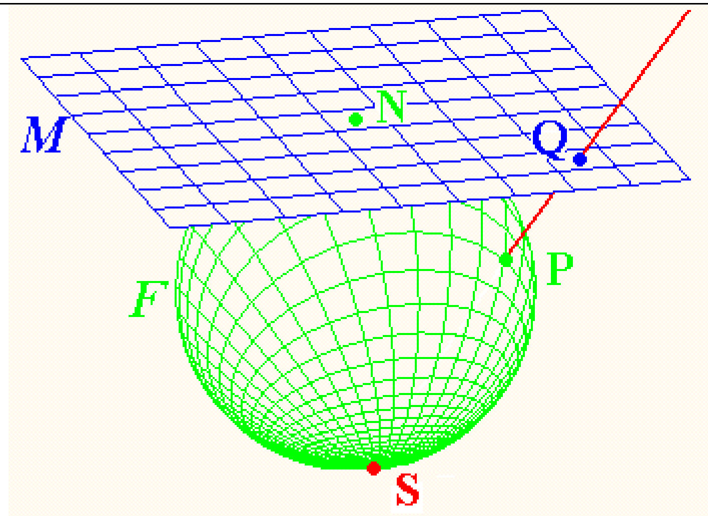
$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

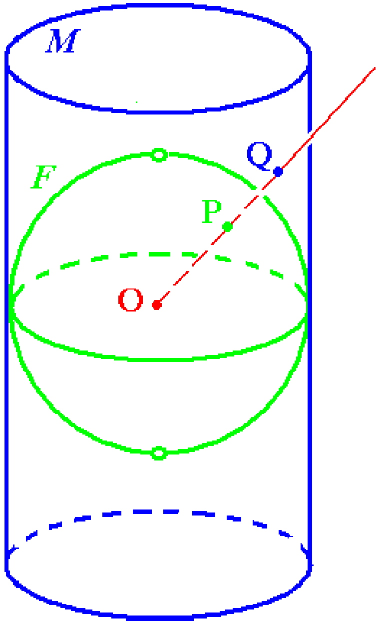


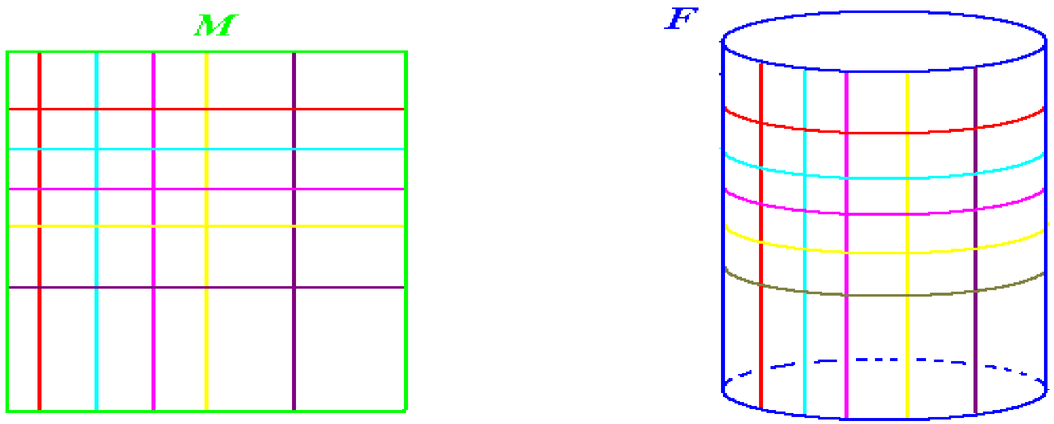


Приклади









Припустимо, що поверхні F і M є регулярними.

Визначення. Відображення $\Psi : F \to M$ назвемо *регулярним* в точці $P \in F$, якщо в локальних координатах (u^1, u^2) в околі точки P на поверхні F і в локальних координатах (v^1, v^2) в околі точки Q на поверхні M відображення Ψ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

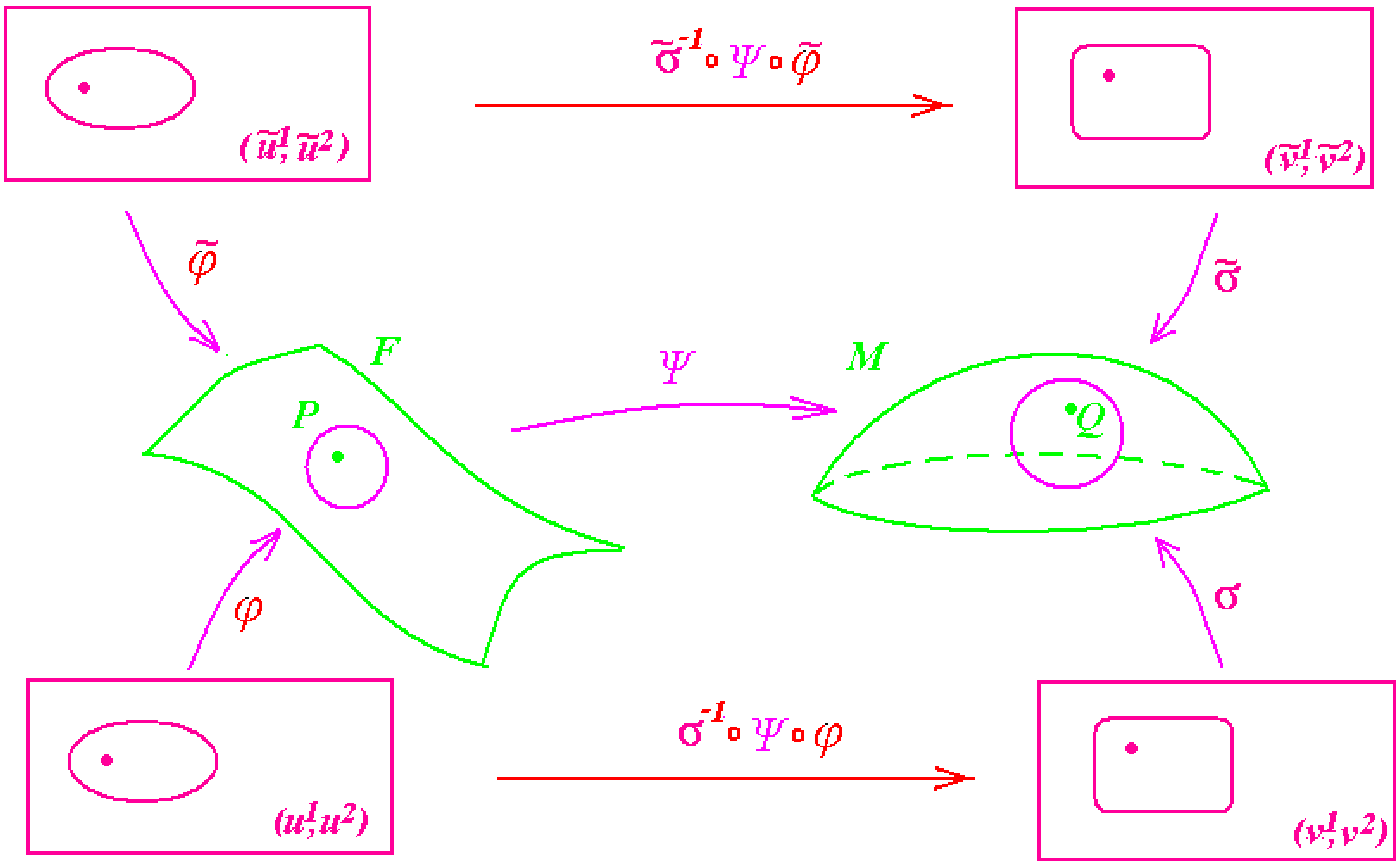
так, що

1) функції $\xi^1(u^1, u^2)$, $\xi^2(u^1, u^2)$ є неперервно диференційованими,

2) $\left. \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} \end{vmatrix} \right|_P \neq 0$

Визначення регулярності відображення є коректним – воно не залежить від вибору локальних координат.

Ілюстрація-пояснення:



Відображення $F \to M$ в старих координатах

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні M

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(v^1, v^2) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(v^1, v^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Відображення $F \to M$ в нових координатах

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \end{cases}$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Як наслідок, при регулярних замінах координат на поверхнях F і M:

1) зберігається неперервна диференційованість функцій, що представляють відображення, як композицій неперервно диференційованих функцій;

2) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Зауваження 1. Регулярне відображення регулярних простих поверхонь є локальним гомеоморфізмом.

Зауваження 2. Якщо в нас є регулярне відображення регулярних простих поверхонь $F \to M$, то його можна застосовувати для регулярної заміни локальних координат на поверхні F (або на поверхні M) так, щоб в нових координатах відображення задавалось за відповідністю координат – відповідні за відображенням точки на поверхнях F і M мають однакові координати.

13.2. Диференціал відображення поверхонь

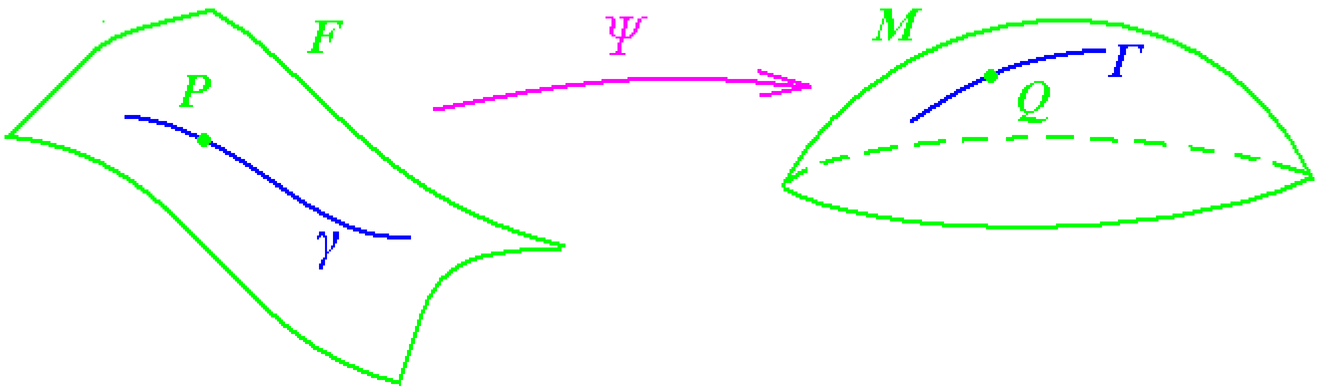
Розглянемо регулярне відображення регулярних поверхонь в $I\!R^3$:

$$\Psi: F \to M$$

Зафіксуємо точку P на поверхні F та її образ $\Psi(P) = Q$ на поверхні M.

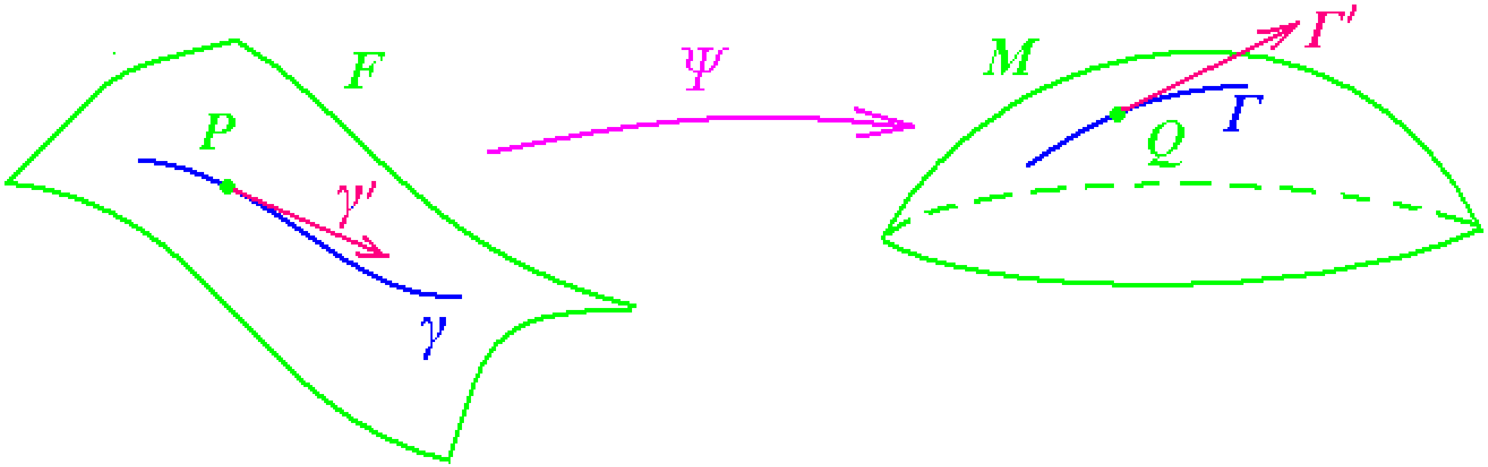
Розглянемо криву $\gamma: (a,b) \to F$, що проходить через точку P.

Розглянемо відповідну криву $\Gamma = \Psi \circ \gamma: (a,b) \to M$, що проходить через точку Q.



Розглянемо вектор швидкості γ' кривої γ в точці P і поставимо йому у відповідність вектор швидкості Γ' кривої Γ в точці Q:

$$\gamma'(P) \to \Gamma'(Q)$$



Оскільки будь-який вектор в дотичній площині $T_P F$ реалізується як вектор швидкості деякої кривої γ, що проходить через точку P, на поверхні F, виникає відображення

$$d\Psi_P : T_P F \to T_Q M\ ,$$

яке називається *диференціалом* відображення Ψ в точці P.

Запишемо, як виглядає відображення $d\Psi_P$ в локальних координатах і проаналізуємо коректність його визначення.

Нехай (u^1, u^2) – локальні координати в околі точки P на поверхні F, і $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ – радіус-вектор поверхні F.

Нехай (v^1, v^2) – локальні координати в околі точки Q на поверхні M, і $\vec{x} = \vec{h}(v^1, v^2)$ – радіус-вектор поверхні M.

Відображення Ψ: $F \to M$ задається в локальних координатах у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Крива γ задається в локальних координатах

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases},$$

її вектор швидкості в точці P має вигляд

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^2}{dt}(t_0).$$

Відповідна крива Γ задається в локальних координатах

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(\xi^1(t), \xi^2(t)) \\ v^2 = \psi^2(\xi^1(t), \xi^2(t)) \end{cases}$$

її вектор швидкості в точці Q має вигляд

$$\frac{d\vec{h}_\Gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^1}(v_0^1, v_0^2) \cdot \frac{d\psi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\psi^2}{dt}(t_0) =.$$

$$= \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^1}(v_0^1, v_0^2) \cdot \left(\frac{\partial \psi^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0) \right) +$$

$$+ \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0) \right)$$

Відображення $d\Psi_P : T_PF \to T_QM$, яке ставить у відповідність вектори швидкостей $\gamma'(P) \to \Gamma'(Q)$, представляється у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\xi^1}{dt} \\ \dfrac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \in T_PF \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \psi^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \psi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \psi^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{d\xi^1}{dt} \\ \dfrac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \in T_QM$$

Як наслідок, отримуємо наступну формулу (аналітичне представлення в локальних координатах) для відображення $d\Psi_P : T_PF \to T_QM$

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

Інварінатність відносно регулярних замін координат

Якщо зробити регулярну заміну координат $u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, $u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ на поверхні F і регулярну заміну координат $v^1 = v^1(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$, $v^2 = v^2(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$ на поверхні M, то тоді координати дотичних векторів змінюються згідно з відповідним тензорним законом:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

Зауваження.

Відображення $d\Psi_P : T_PF \rightarrow T_QM$ є лінійним відображенням дотичних площин.

Регулярність відображення Ψ: $F \rightarrow M$ в точці P означає, що лінійне відображення $d\Psi_P : T_PF \rightarrow T_QM$ є не виродженим (ранг цього лінійного відображення дорівнює $\dim T_PF = \dim T_QM = 2$).

13.3. Перша фундаментальна форма поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in D.$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F.

Візьмемо в дотичній площині $T_P F$ пару векторів

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

і обчислимо їх скалярний добуток.

Маємо:

$$X = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \qquad Y = Y^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + Y^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Обчислюємо скалярний добуток (всі обчислення – в точці $P\ (u_0^1, u_0^2)$) :

$$< X, Y > \ =$$

$$= \ < X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, Y^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + Y^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > =$$

$$= \ X^1Y^1 < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > + X^1Y^2 < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > + X^2Y^1 < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > + X^2Y^2 < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > \ =$$

$$= X^1Y^1 g_{11} + X^1Y^2 g_{12} + X^2Y^1 g_{21} + X^2Y^2 g_{22}$$

де

$$g_{ij} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} > \qquad , \qquad 1 \le i\ , j \le 2.$$

Отже, скалярний добуток векторів

$$X=\begin{pmatrix}X^1\\X^2\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}Y^1\\Y^2\end{pmatrix}$$

в дотичній площині T_PF в точці P обчислюється за формулою

$$<X,Y>\ =X^1Y^1g_{11}+X^1Y^2g_{12}+X^2Y^1g_{21}+X^2Y^2g_{22}$$

$$<X,Y>\ =\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}X^iY^j$$

або

$$<X,Y>\ =\left(X^1X^2\right)\cdot\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Y^1\\Y^2\end{pmatrix}$$

тут коефіцієнти g_{ij} обчислені в точці $P(u_0^1,u_0^2)$

Визначення. Білінійна диференціальна форма

$$g = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2$$

з коефіцієнтами

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \right\rangle \quad , \qquad 1 \le i\,,\, j \le 2,$$

називається *першою фундаментальною формою* регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(u^i, u^2)$.

Приклад 1. Нехай F – площина з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{c} + u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2$, натягнута на ортонормовані вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, координати u^1, u^2 – декартові. Тоді $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, тобто,

$$g = du^1du^1 + du^2du^2 \quad , \qquad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивості першої фундаментальної форми

1) *Симетричність*: $g_{12} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > = g_{21}$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^1 X^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^1 Y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

2) *Додатна визначеність:*

$$g_{11} = <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}> \; > 0 \;\; , \quad g_{22} = <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}> \; > 0 \; ,$$

$$\det g \;=\; g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \;=$$

$$= \; <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}> \cdot <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}> - <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}> \cdot <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}> \; = |\,[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}]\,|^2 \; > 0$$

Зауваження. Додатна визначеність першої фундаментальної форми еквівалентна регулярності параметрично заданої поверхні.

3) $< d\vec{f}, d\vec{f} > \quad = \quad < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} du^2, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} du^2 > \quad = \quad g$

4) *Тензорний закон зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми*

Зробимо регулярну заміну координат на поверхні F:

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

запишемо радіус-вектор поверхні F в новій системі координат

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

і обчислимо коефіцієнти першої фундаментальної форми в нових координатах:

$$\tilde{g}_{ij} =< \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^j} > \qquad , \qquad 1 \le i, j \le 2,$$

Маємо:

$$\tilde{g}_{ij} = <\frac{\partial\vec{\tilde{f}}}{\partial\tilde{u}^i}, \frac{\partial\vec{\tilde{f}}}{\partial\tilde{u}^j}> = <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^i} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^i}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^j} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^j}> =$$

$$= <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}> \frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^j} + <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}> \frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^j} +$$

$$+ <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}> \frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^j} + <\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}> \frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^j} =$$

$$= g_{11}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^j} + g_{12}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^j} + g_{21}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^j} + g_{22}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^i}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^j}$$

Таким чином, отримуємо тензорний закон зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми поверхні:

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \quad , \qquad 1 \le i\,, j \le 2.$$

В матричній формі той же закон записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{g} = J^t \cdot g \cdot J$$

Додатна визначеність і симетричність першої фундаментальної форми не залежать від вибору локальних координат на поверхні (зберігаються при регулярних замінах координат).

Інваріантність скалярного добутку – узгодженість тензорних законів для векторів і для першої фундаментальної форми:

$$\left(\tilde{X}^1 \tilde{X}^2\right)\cdot\begin{pmatrix}\tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12}\\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{Y}^1\\ \tilde{Y}^2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(X^1 X^2\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^1}\\ \frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^1}\\ \frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^2}\\ \frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^2}\\ \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y^1\\ Y^2\end{pmatrix}=$$

$$=\left(X^1 X^2\right)\cdot\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Y^1\\ Y^2\end{pmatrix}$$

Підсумок

Для будь-якої регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(u^i, u^2)$ обчислюється перша фундаментальна форма:

$$g = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2$$

$$g_{ij} =< \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^j} > \qquad , \qquad 1 \le i\,, j \le 2.$$

Геометричний сенс – вона визначає скалярний добуток векторів в дотичній площині в кожній точці на поверхні.

Перспектива

Перша фундаментальна форма поверхні використовується при обчислені:

1) довжини кривих, розташованих на поверхні,
2) кута між кривими, що розташовані на поверхні,
3) площі області на поверхні.

13.4. Довжина кривої на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in D.$$

Розглянемо криву γ на поверхні F, задану у внутрішніх локальних координатах

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b.$$

Обчислимо довжину кривої γ.

Для цього спочатку розглянемо вектор швидкості кривої γ. Як вектор в дотичній площині поверхні F, він має координати

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\xi^1}{dt} \\ \dfrac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}$$

Далі помножимо цей вектор сам на себе скалярно.

$$\left(\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt}\right)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{d\xi^1}{dt} \\ \dfrac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}=$$

$$= g_{11}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^1}{dt} + g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{21}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\xi^1}{dt} + g_{22}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} =$$

$$= g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2$$

В цій формулі $g_{ij}=g_{ij}(\xi^1(t), \xi^2(t))$ – це коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні F, обчислені в точках кривої γ.

Як наслідок, довжина вектора швидкості кривої γ дорівнює

$$\sqrt{g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2} \quad ,$$

а довжина самої кривої γ дорівнює

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\; dt$$

Твердження. *Довжина кривої γ на поверхні F, заданої у внутрішніх локальних координатах на поверхні F у вигляді*

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b,$$

обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt\ ,$$

де $g_{ij}=g_{ij}(\xi^1(t),\ \xi^2(t))$ – це коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні F, обчислені в точках кривої γ.

Зауваження 1. Щоб обчислювати довжину кривих на поверхні, не обов'язково знати радіус-вектор поверхні (як виглядає поверхня в просторі), а потрібно знати лише першу фундаментальну форму поверхні.

Зауваження 2. $L = \int_a^b \sqrt{g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2}$

Приклад. Розглянемо сферу F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\cos u^1 \cos u^2 \\ R\cos u^1 \sin u^2 \\ R\sin u^1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -R\sin u^1 \cos u^2 \\ -R\sin u^1 \sin u^2 \\ R\cos u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -R\cos u^1 \sin u^2 \\ R\cos u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо попарні скалярні добутки:

$$g_{11} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} > = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = 0,$$

$$g_{22} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} > = R^2 \cos^2 u^1.$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів першої фундаментальної форми сфери (в «географічних» координатах):

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u^1 \end{pmatrix}$$

Довжина кривої γ на сфері, що задано у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b \ ,$$

дорівнює

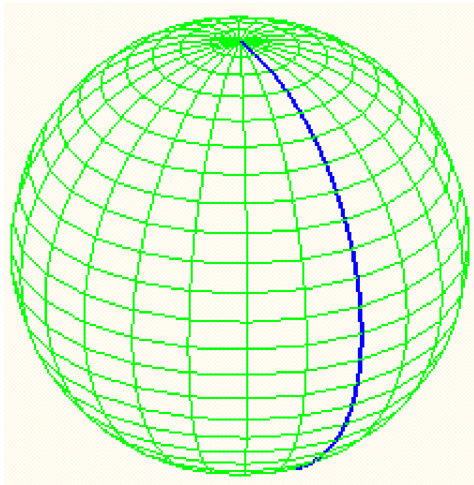
$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2} =$$

$$= \int_a^b \sqrt{R^2(d\xi^1)^2 + R^2\cos^2\xi^1\,(d\xi^2)^2} =$$

$$= R\int_a^b \sqrt{(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + \cos^2\xi^1\,(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\,dt$$

Наприклад, довжина координатної кривої γ, заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \alpha \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

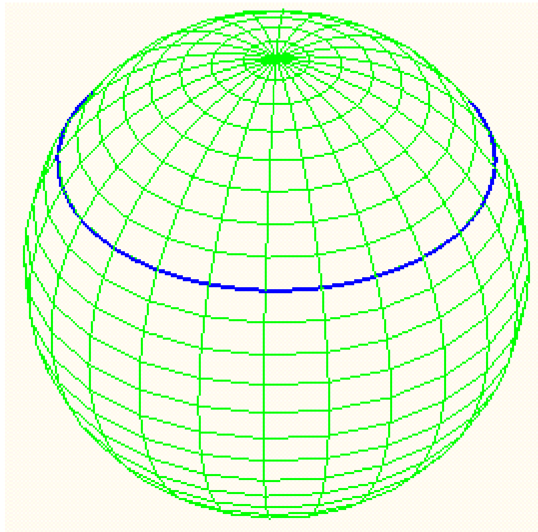


на сфері F, дорівнює

$$L = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + \cos^2 t\,(0)^2}\,dt = \pi R$$

Довжина координатної кривої γ, заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = \beta \\ u^2 = t \end{cases}, \quad -0 < t < 2\pi$$



на сфері F, дорівнює

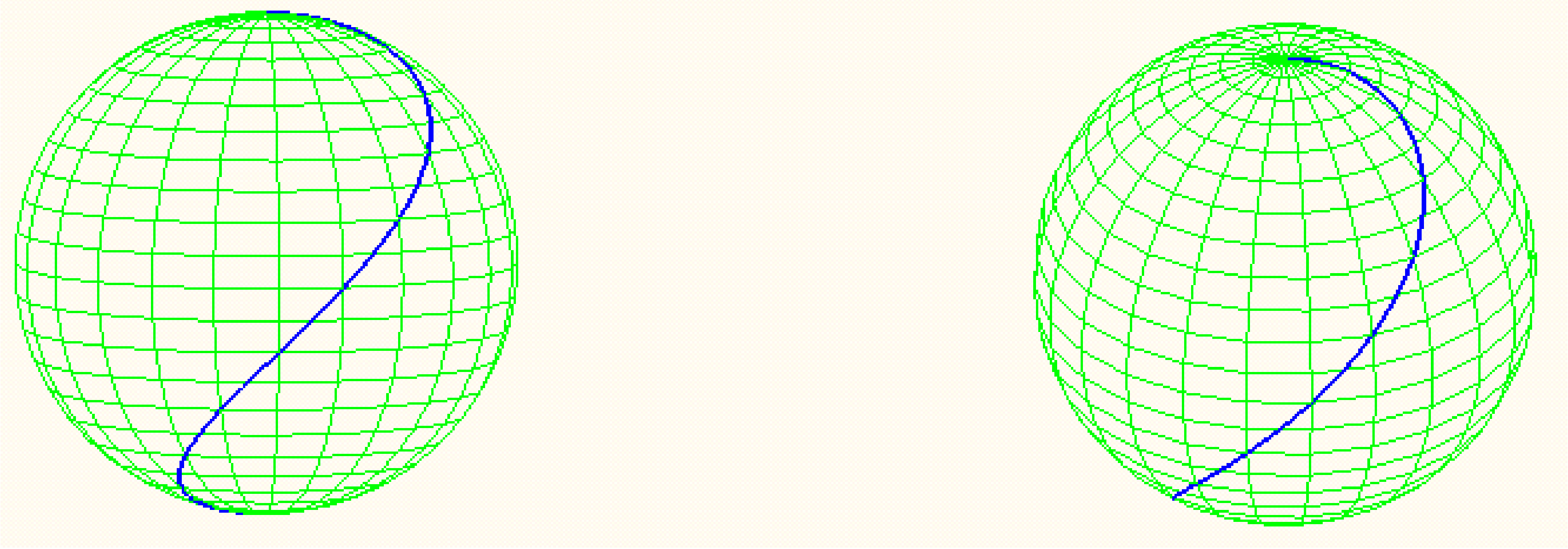
$$L = R\int_{0}^{2\pi} \sqrt{(0)^2 + \cos^2 \beta\,(1)^2}\,dt = 2\pi\,R\cos\beta$$

Довжина кривої γ, заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

на сфері F, дорівнює

$$L = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + \cos^2 t \cdot (1)^2}\; dt = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t}\; dt$$

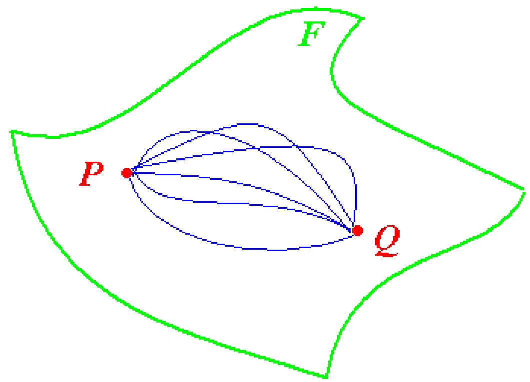


13.4. Регулярні поверхні як метричні простори

Нехай F – регулярна поверхня в $\mathbb{R}^3$.

Визначення. *Відстанню* (*внутрішньою відстанню*) між точками P і Q на поверхні F називається

$$d(P,Q) = \inf L(\gamma) \;,$$



де інфімум береться по множині усіх кусково-регулярних кривих γ, що розташовані на поверхні F і поєднують точки P і Q.

Твердження. *Внутрішня відстань d, як функція $F \times F \to \mathbb{R}$, має наступні властивості*:

1) $d(P,Q) \geq 0 \;\; \forall P,Q \in F$, при цьому $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P=Q$

2) $d(P,Q) = d(Q,P) \;\; \forall P,Q \in F$

3) $d(P,M) + d(M,Q) \geq d(P,Q) \;\; \forall P,Q,M \in F$

Отже, кожна регулярна поверхня F з внутрішньою відстанню d представляє собою приклад метричного простору.