Варіант 1

1. Довести, що будь-який ретракт стяжного простору стяжний.

2. Встановити, чи може пляшка Клейна накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).

3. Довести, що комплексний проективний простір $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ однозв'язний. Тут S^{2n+1} – одинична сфера у просторі $\mathbb{C}^{n+1}$, що ототожнюється з $\mathbb{R}^{2n+2}$, і група S^1 комплексних чисел модуля 1 діє обертаннями: $\lambda \cdot x = \lambda x$.

Варіант 2

1. Говорять, що топологічний простір X має властивість нерухомої точки, якщо для будь-якого неперервного $f\colon X \to X$ існує така $x \in X$, що $f(x) = x$. Довести, що якщо X має властивість нерухомої точки, то таку властивість має й будь-який його ретракт.

2. Довести, що якщо (X, Y, p) – накриття, простори X та Y хаусдорфові та задовольняють другій аксіомі зліченності і один з них – многовид, то інший є многовидом тієї ж вимірності.

3. Знайти фундаментальну групу простору $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m$.

Варіант 3

1. Нехай відображення $f, g\colon GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(2n, \mathbb{R})$ задані формулами

$$f(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad g(A, B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де E – одинична матриця порядка n. Довести, що $f \sim g$.

2. Довести, що будь-яке дволистове (тобто таке, всі шари якого складаються з двох точок) накриття з лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними базою і простором є регулярним.

3. Довести, що не існує ретракції замкненого листа Мебіуса на його межу.

Варіант 4

1. Довести, що у гомотопічно еквівалентних просторів рівна кількість компонент зв'язності.

2. Нехай (X, Y, p) – накриття з компактним хаусдорфовим Y. Довести, що X компактний тоді й тільки тоді, коли p скінченнолистове (тобто шар над будь-якою точкою скінченний). Для якої з двох імплікацій тут використовується хаусдорфовість?

3. Довести, що не існує ретракції проективної площини на проективну пряму.

Варіант 5

1. Нехай X – топологічний простір, $f, g \in C(I, X)$ – шляхи, $f(1) = g(0)$. Нехай $r \in (0, 1)$. Визначимо шлях $h \in C(I, X)$ наступним чином:

$$h(t) = \begin{cases} f\left(\frac{t}{r}\right), & t \in [0, r]; \\ g\left(\frac{t-r}{1-r}\right), & t \in [r, 1]. \end{cases}$$

Довести, що $h \sim f * g$ (як шляхи).

2. Нехай $p\colon X \to Y$ і $q\colon Y \to Z$ – накриття з лінійно зв'язними базами і просторами. Довести, що якщо q – скінченнолистове (тобто шар над будь-якою точкою скінченний) то і $q \circ p\colon X \to Z$ – накриття.

3. Знайти фундаментальну групу об'єднання кола $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ і відрізка $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, -1 < y < 1\}$.

Варіант 6

1. Довести, що об'єднання кола $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ і відрізка $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ гомотопічно еквівалентне, але негомеоморфне S^1.

2. Довести, що якщо (X, Y, p) і (X', Y', p') –накриття, то й $(X \times X', Y \times Y', p \times p')$ – накриття.

3. Нехай X – топологічний простір, $x, y \in X$, $f, g \in C(I, X)$ – шляхи, $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Довести, що ізоморфізми фундаментальних груп $\pi_1(X, x)$ и $\pi_1(X, y)$, що визначені шляхами f і g, збігаються тоді і тільки тоді, коли $[f * \overline{g}]$ належить до центру $\pi_1(X, x)$.

Варіант 7

1. Нехай X – топологічний простір, $f \in C(I, X)$ – шлях, $r \in I$. Визначимо шляхи $f_1, f_2 \in C(I, X)$ наступним чином: $f_1(t) = f(rt)$, $f_2(t) = f((1 - r)t + r)$. Довести, що $f \sim f_1 * f_2$ (як шляхи).

2. Встановити, чи може проективна площина накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).

3. Нехай X – підпростір однозв'язного Y. Довести, що якщо неперервне $f\colon X \to Z$ можна продовжити на Y, то для будь-якої $x \in X$ гомоморфізм $f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, f(x))$ тривіальний (тобто відображає будь-який елемент групи в одиницю).