Задача 1.1. Розглянемо круговий конус F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = r\,u^2 \cos u^1 \\ x^2 = r\,u^2 \sin u^1, \\ \quad x^3 = h\,u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор конуса F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^2 \end{pmatrix}$

Підставивши $u^1 = \frac{\pi}{2}, u^2 = 1$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

Далі, обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -ru^2 \sin u^1 \\ ru^2 \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \\ r\sin u^1 \\ h \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх значення в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

Це вектори, які утворюють базис в дотичній площині $T_P F$. Знайдемо їх векторний добуток – це буде вектор нормалі дотичної площини:

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$0 \cdot (x^1 - 0) + rh \cdot (x^2 - r) - r^2 \cdot (x^3 - h) = 0,$$

тобто,

$$h\, x^2 - r\, x^3 = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

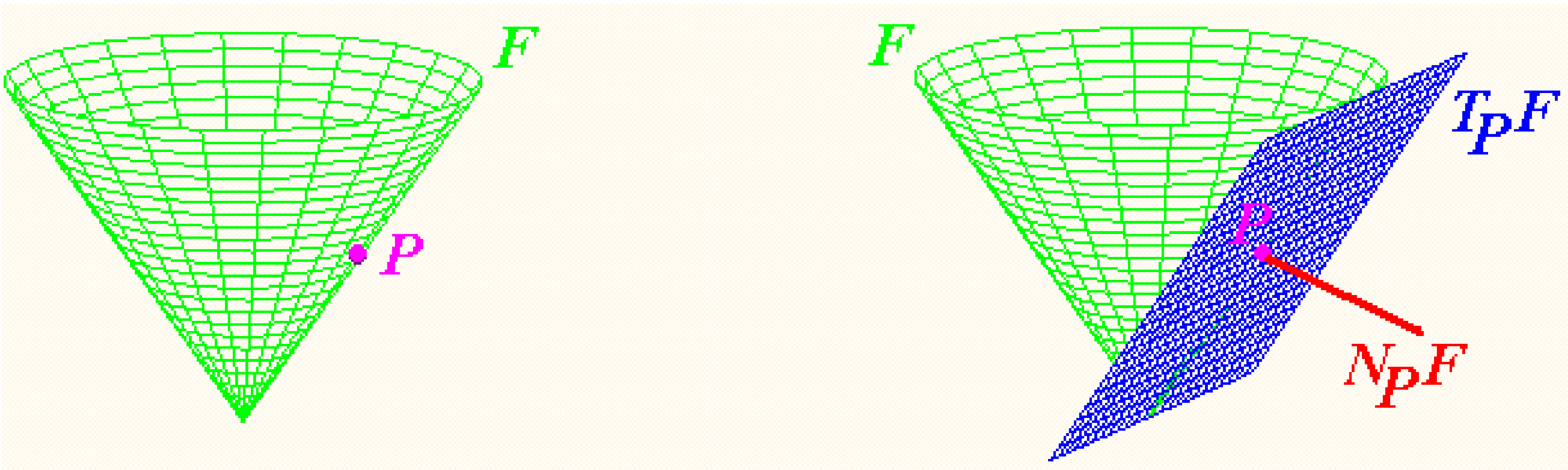
$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x^1 - 0}{0} = \dfrac{x^2 - r}{rh} = \dfrac{x^3 - h}{-r^2}$.

Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $h\,x^2 - r\,x^3 = 0$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $$\frac{x^1 - 0}{0} = \frac{x^2 - r}{h} = \frac{x^3 - h}{-r}$$



Задача 1.2. Розглянемо круговий гіперболоїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ x^2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1, \\ x^3 = h\, u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Перевірте регулярність поверхні F. Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої гіперболоїда F в точці $P\,(\pi,-2)$.

** Доведіть, що коли точка Q рухається по довільній фіксованій твірній гіперболоїда F, дотична площина $T_Q F$ ковзає по цій твірній, обертаючись навколо неї. На який повний кут повернеться дотична площина, коли точка Q пробіжить усю твірну пряму?

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор гіперболоїда F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ \sin u^1 + u^2 \cos u^1 \\ h\, u^2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -\sin u^1 - u^2 \cos u^1 \\ \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\sin u^1 \\ \cos u^1 \\ h \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} h(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ h(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_Q F$ в довільній точці $Q(u_0^1, u_0^2)$:

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)(x^1 - (\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)) +$$

$$+ h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)(x^2 - (\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)) - u_0^2 (x^3 - h\, u_0^2) = 0$$

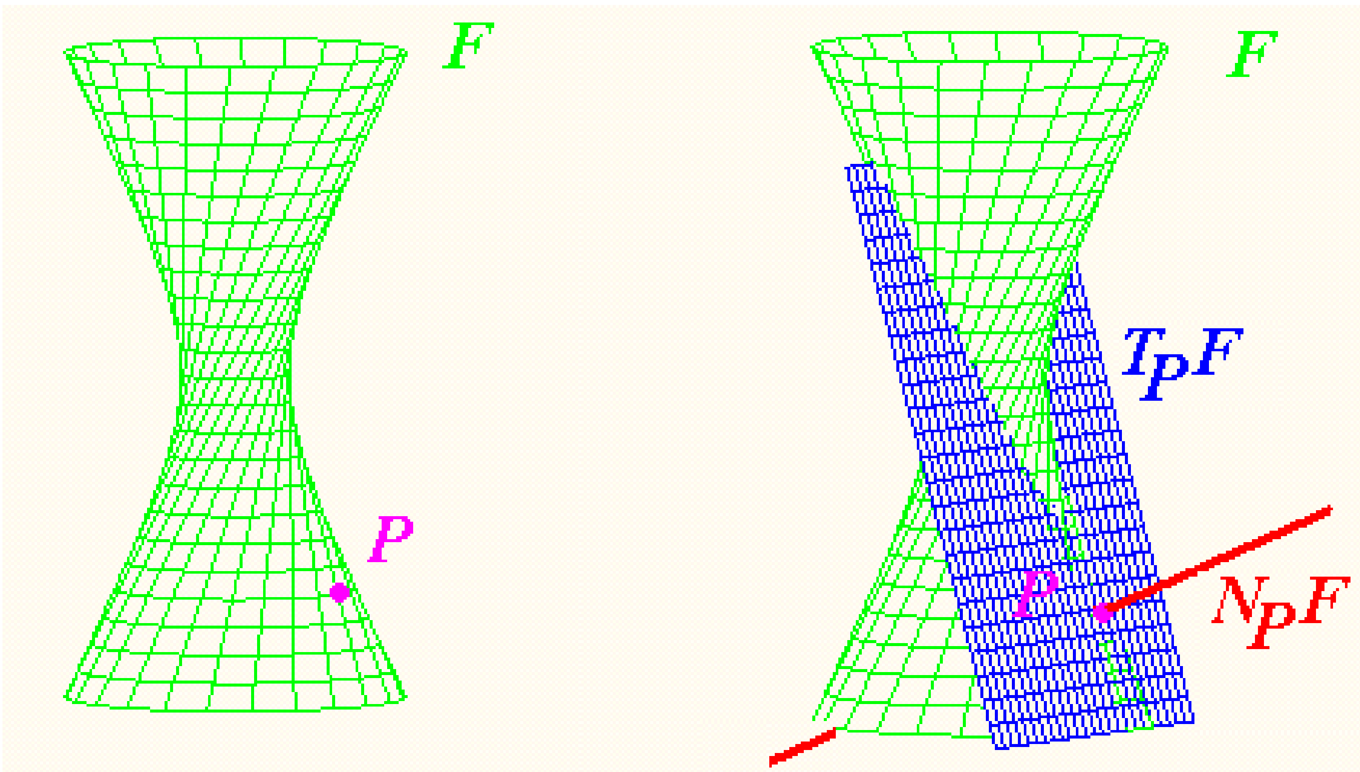
тобто,

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1) x^1 + h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1) x^2 - u_0^2 x^3 - h = 0$$

Зокрема, в точці P $(\pi,-2)$ маємо: $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2h \end{pmatrix}$, $\vec{N}_P = \begin{pmatrix} -h \\ 2h \\ 2 \end{pmatrix}$

Рівняння дотичної площини T_PF: $\quad -hx^1 + 2hx^2 + 2x^3 - h = 0$

Рівняння нормальної прямої N_PF: $\quad \dfrac{x^1+1}{-h} = \dfrac{x^2-2}{2h} = \dfrac{x^3+2h}{2}$



* Проаналізуємо поведінку дотичної площини

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)x^1 + h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)x^2 - u_0^2 x^3 - h = 0$$

і вектора нормалі

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} h(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ h(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix}$$

при $u^1 = c = const$, $u^2 = t$, тобто, коли точка рухається по прямолінійній твірній гіперболоїда.

Маємо рівняння дотичної площини:

$$h(\cos c - t \sin c)x^1 + h(\sin c + t \cos c)x^2 - tx^3 - h = 0$$

Підставимо в нього координати довільної точки на твірній:

$$x^1 = \cos c - w \sin c, x^2 = \sin c + w \cos c, x^3 = h\, w, \quad -\infty < w < \infty$$

Отримаємо:

$$h(\cos c - t\sin c)(\cos c - w\sin c) + h(\sin c + t\cos c)(\sin c + w\cos c) - thw - h = 0$$

$$(\cos c - t\sin c)(\cos c - w\sin c) + (\sin c + t\cos c)(\sin c + w\cos c) - tw - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Таким чином, якщо в довільній точці фіксованої прямолінійної твірної гіперболоїда F розглянути дотичну площину, то ця площина міститиме усю прямолінійну твірну.

Далі проаналізуємо поведінку вектора нормалі

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} h(\cos c - t\sin c) \\ h(\sin c + t\cos c) \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\cos c \\ h\sin c \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\sin c \\ \cos c \\ -1 \end{pmatrix},$$

коли t пробігає від $-\infty$ до $+\infty$, тобто, коли точка дотику рухається по фіксованій прямолінійній твірній.

Застосуємо поворот на кут $-c$ навколо координатної осі x^3,

$$\vec{N}^*(t) = \begin{pmatrix} \cos c & \sin c & 0 \\ -\sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

і пронормуємо:

$$\vec{n}^*(t) = \frac{\vec{N}^*(t)}{|\vec{N}^*(t)|} = \frac{1}{\sqrt{h^2+2t^2}} \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{h^2+2t^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Коли t пробігає від $-\infty$ до $+\infty$, кінець вектора $\vec{n}^*(t)$ пробігає півколо одиничного радіусу з центром в початку координат O, яке розташоване у вертикальній площині $x^1+x^3=0$.

Це означає, що коли точка дотику рухається по фіксованій прямолінійній твірній гіперболоїда F, то дотична площина поверхні ковзає і обертається навколо твірної, при цьому повний кут обороту дорівнює π.

Задача 1.3. Розглянемо катеноїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \cosh u^1 \sin u^2, \\ \quad x^3 = u^1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда F в точці $P\ (0, \frac{\pi}{3})$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор катеноїда F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \cos u^2 \\ \cosh u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \sinh u^1 \cos u^1 \\ \sinh u^1 \sin u^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\cosh u^1 \sin u^2 \\ \cosh u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = \cosh u^1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos u^2 \\ -\sin u^2 \\ \sinh u^1 \end{pmatrix}$$

Підставивши $u^1 = 0, u^2 = \frac{\pi}{3}$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і вектор нормалі

$$\vec{N}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $(x^1 - \frac{1}{2}) + \sqrt{3}(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 0(x^3 - 0) = 0$,

тобто,

$$x^1 + \sqrt{3}x^2 - 2 = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

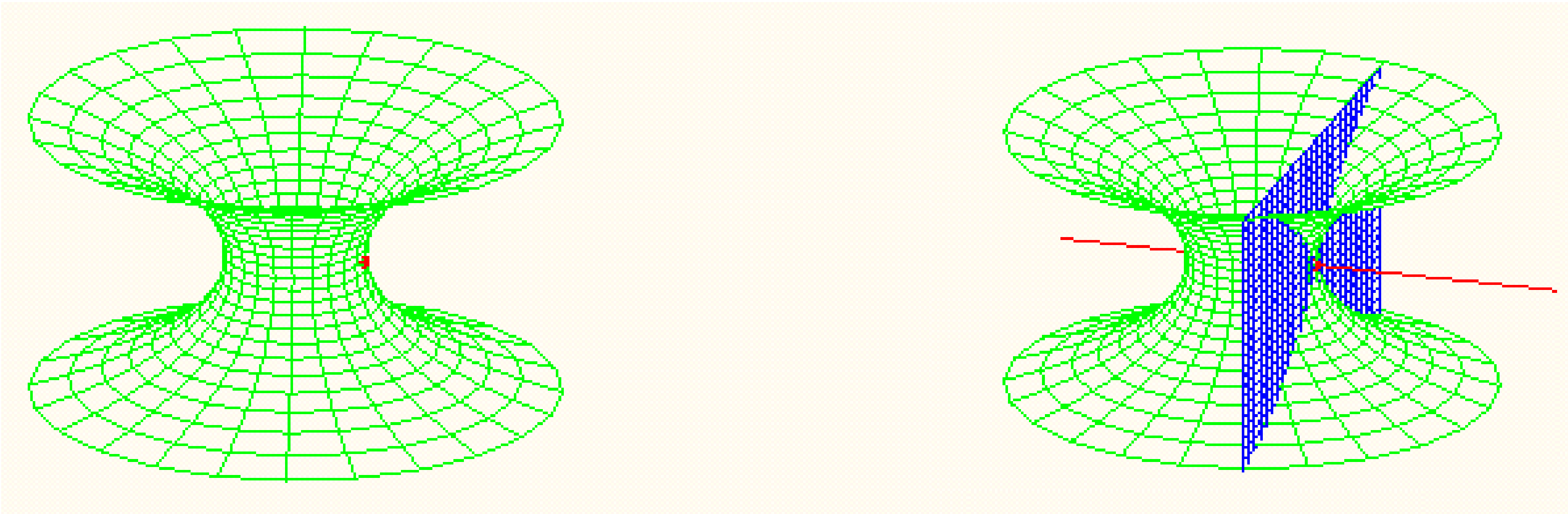
$$\vec{N}_P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x^1 - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3 - 0}{0}$.

Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $x^1 + \sqrt{3}x^2 - 2 = 0$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $\dfrac{x^1 - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3 - 0}{0}$



*__Задача 2__. Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні F в $\mathbb{R}^3$ дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка P рухається по фіксованій твірній на циліндричні поверхні F, то її дотична площина $T_P F$ не змінюється (ковзає сама по собі).

Доведіть, що те саме твердження вірне для будь-якої конічної поверхні і будь-якої торсової поверхні (розглядаються регулярні частини цих поверхонь).

Розвязання.

1) Радіус-вектор довільної циліндричної поверхні:

$$\vec{x} = \vec{\rho}(s) + t\vec{e}$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau}(s)\ , \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{e}$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau}(s), \vec{e}]$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$<\vec{x}-(\vec{\rho}(s_0)+t_0\vec{e}),[\vec{\tau}(s_0),\vec{e}]>=0$$

тобто,

$$<\vec{x}-\vec{\rho}(s_0),[\vec{\tau}(s_0),\vec{e}]>=0 \ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на циліндричній поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{e}$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній циліндричної поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

2) Радіус-вектор довільної конічної поверхні:

$$\vec{x} = t\vec{\rho}(s)$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = t\vec{\tau}(s)\ ,\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\rho}(s)$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [t\vec{\tau}(s), \vec{\rho}(s)] = t[\vec{\tau}(s), \vec{\rho}(s)]$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$< \vec{x} - t\vec{\rho}(s_0), [\vec{\tau}(s_0), \vec{\rho}(s_0)] >= 0$$

тобто,

$$< \vec{x}, [\vec{\tau}(s_0), \vec{\rho}(s_0)] >= 0\ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на конічній поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{\rho}(s_0)$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній конічної поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

3) Радіус-вектор довільної торсові поверхні:

$$\vec{x} = \vec{\rho}(s) + t\vec{\tau}(s)$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau}(s) + tk\vec{\nu}(s)\ , \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\tau}(s)$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau}(s) + tk\vec{\nu}(s), \vec{\tau}(s)] = tk[\vec{\nu}(s), \vec{\tau}(s)] = -tk\vec{\beta}(s)$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$< \vec{x} - \vec{\rho}(s_0) + t\vec{\tau}(s_0), \vec{\beta}(s_0) >= 0$$

тобто,

$$< \vec{x} - \vec{\rho}(s_0), \vec{\beta}(s_0) >= 0\ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на торсовій поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{\tau}(s)$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній торсової поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

***Задача 3.** Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні перетинає вісь обертання.

Розв'язання.

Запишемо радіус-вектор довільної поверхні обертання F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos u^2 \\ r(u^1)\sin u^2 \\ h(u^1) \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} r'\cos u^2 \\ r'\sin u^2 \\ h' \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -r(u^1)\sin u^2 \\ r(u^1)\cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = r \cdot \begin{pmatrix} -h' \cos u^2 \\ -h' \sin u^2 \\ r' \end{pmatrix}$$

Рівняння дотичної площини поверхні F в довільній точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$-h'(u_0^1)\cos u_0^2 \cdot (x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2) - h'(u_0^1)\sin u_0^2 \cdot (x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2) +$$

$$+ r'(u_0^1) \cdot (x^3 - h(u_0^1)) = 0$$

тобто,

$$-h'(u_0^1)\cos u_0^2 \cdot x^1 - h'(u_0^1)\sin u_0^2 \cdot x^2 + r'(u_0^1) \cdot x^3 + h'(u_0^1) r(u_0^1) - r'(u_0^1) h(u_0^1) = 0$$

Рівняння нормальної прямої поверхні F в довільній точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$\frac{x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2}{-h'(u_0^1)\cos u_0^2} = \frac{x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2}{-h'(u_0^1)\sin u_0^2} = \frac{x^3 - h(u_0^1)}{r'(u_0^1)}$$

Точки перетину нормальної прямої поверхні F в точці P з координатною віссю x^3 – віссю обертання поверхні F – визначаються з системи

$$\begin{cases} \dfrac{x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2}{-h'(u_0^1)\cos u_0^2} = \dfrac{x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2}{-h'(u_0^1)\sin u_0^2} = \dfrac{x^3 - h(u_0^1)}{r'(u_0^1)}, \\ x^1 = x^2 = 0 \end{cases}$$

тобто,

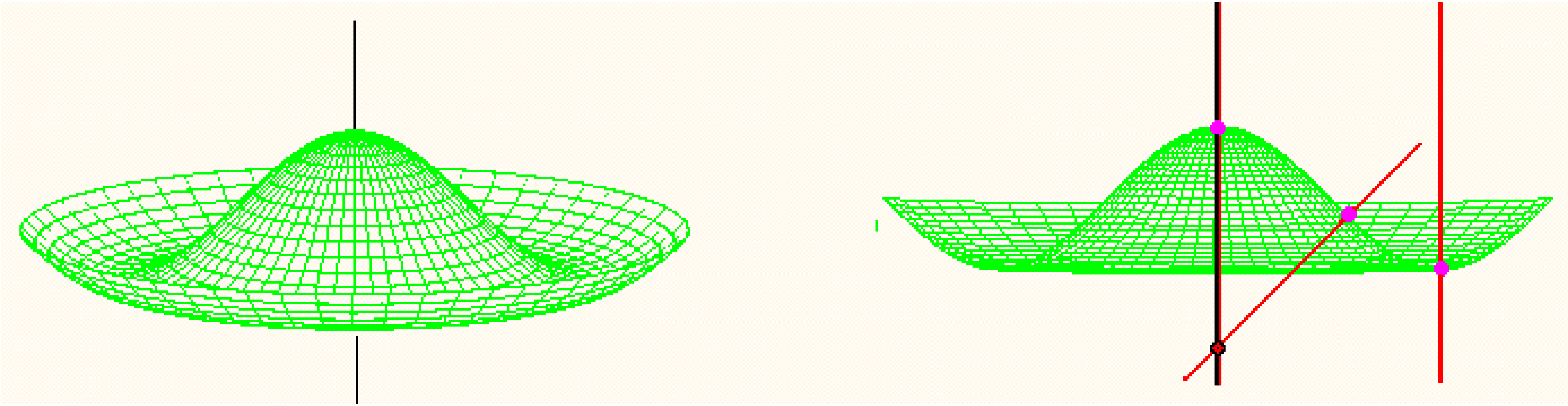
$$\begin{cases} h'(u_0^1)x^3 = h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) \\ x^1 = x^2 = 0 \end{cases}$$

Якщо $h'(u_0^1) \neq 0$, то система має єдиний розв’язок.

Якщо ж $h'(u_0^1) = 0$, то система або не має розв’язків (коли $h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) \neq 0$), або навпаки – перетворюється в тотожність (коли $h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) = 0$).

Умова $h'(u_0^1) \neq 0$ або $h'(u_0^1) = 0$ означає що нормальна пряма поверхні F в точці P не є вертикальною або є вертикальною відповідно. А вертикальність прямої означає паралельність з віссю обертання.

Таким чином, маємо: або нормальна пряма поверхні обертання F в точці P не є паралельною осі обертання, і тоді вона обов'язково перетинає вісь обертання в якійсь точці, або вона є паралельною чи співпадає з віссю обертання.



Задача 4. Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(1,0,0)$.

*Запишіть рівняння дотичної площини поверхні F, що проходить через точку $A(0,0,-1)$.

*Запишіть рівняння нормальної прямої поверхні F, що проходить через точку $B(0,0,1)$.

Розв'язання. Запишемо функцію $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^3 - x^1 x^2$ і обчислимо її градієнт:

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right) = (-x^2, -x^1, 1)$$

Функція $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^3 - x^1 x^2$ є неперервно диференційованою, а її градієнт $\nabla\Phi$ не обертається в нуль. Тому неявно задана поверхня F є регулярною.

Вектор

$$\vec{N}_Q = \nabla\Phi_Q = (-x_Q^2, -x_Q^1, 1)$$

є нормаллю поверхні F в її довільній точці $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$.

Рівняння дотичної площини $T_Q F$:

$$-x_Q^2 \cdot (x^1 - x_Q^1) - x_Q^1 \cdot (x^2 - x_Q^2) + 1 \cdot (x^3 - x_Q^3) = 0,$$

тобто,

$$x^3 = x_Q^2 \cdot (x^1 - x_Q^1) + x_Q^1 \cdot (x^2 - x_Q^2) + x_Q^3.$$

Рівняння нормальної прямої $N_Q F$:

$$\frac{x^1 - x_Q^1}{-x_Q^2} = \frac{x^2 - x_Q^2}{-x_Q^1} = \frac{x^3 - x_Q^3}{1} \quad .$$

Координати точки $P(1,0,0)$ задовольняють рівняння поверхні

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $\quad x^3 - x^2 = 0.$

Рівняння нормальної прямої $N_Q F$: $\quad \dfrac{x^1 - 1}{0} = \dfrac{x^2}{-1} = \dfrac{x^3}{1} \quad .$

Запишемо рівняння дотичної площини поверхні F, що проходить через точку $A(0,0,-1)$. Сама точка $A(0,0,-1)$ не належить поверхні, оскільки її координати не задовольняють рівняння поверхні $x^3 - x^1 x^2 = 0$.

Будемо шукати точку $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$ так, щоб вона лежала на поверхні, а дотична площина $T_Q F$ проходила через точку $A(0,0,-1)$.

Маємо наступну систему:

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ -x_Q^2 \cdot (0 - x_Q^1) - x_Q^1 \cdot (0 - x_Q^2) + 1 \cdot (-1 - x_Q^3) = 0 \end{cases},$$

тобто,

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ 2x_Q^1 x_Q^2 - 1 - x_Q^3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язком буде будь-яка точка $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$, яка належить перетину заданої поверхні F з горизонтальною площиною $x^3 = 1$.

Будемо шукати точку $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$ так, щоб вона лежала на поверхні, а нормальна пряма $N_Q F$ проходила через точку *B(0,0,1)*.

Маємо наступну систему:

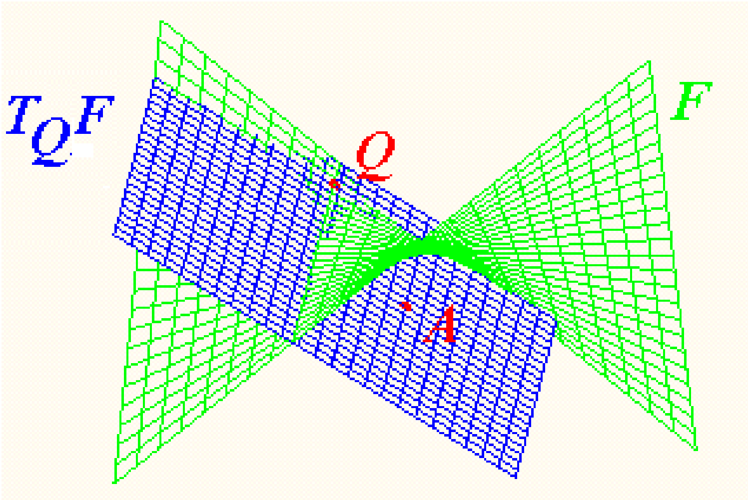
$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ \dfrac{0 - x_Q^1}{-x_Q^2} = \dfrac{0 - x_Q^2}{-x_Q^1} = \dfrac{1 - x_Q^3}{1}, \end{cases}$$

тобто,

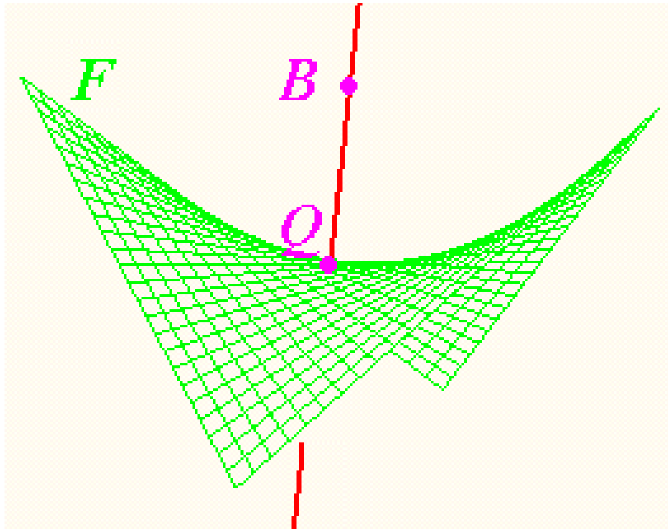
$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ (x_Q^1)^2 = (x_Q^2)^2,\ (1 - x_Q^3) x_Q^2 = x_Q^1,\ (1 - x_Q^3) x_Q^1 = x_Q^2 \end{cases}$$

Розв'язком буде точка $Q(0,0,0)$.

Рівняння нормальної прямої в цій точці: $\dfrac{x^1}{0} = \dfrac{x^2}{0} = \dfrac{x^3}{1}$



T_QF
Q
F
A



F
B
Q

***Задача 5.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в $\mathbb{R}^3$ точку $A(a^1,a^2,a^3)$, що не лежить на поверхні F.

Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $P(p^1,p^2,p^3)$ на поверхні F є найближчою або найдальшою серед усіх точок поверхні F по відношенню до точки A, то тоді пряма AP є нормальною прямою поверхні F в точці P.

Розв'язання. Розглянемо функцію відстані від точки $A(a^1,a^2,a^3)$ до точок поверхні F:

$$d = \sqrt{(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2}, \;\; \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Щоб знайти екстремуми функції $d(x^1,x^2,x^3)$ за умови $\Phi(x^1, x^2, x^3)= 0$, розглянемо відповідну функцію Лагранжа:

$$L = d(x^1,x^2,x^3) + \lambda\, \Phi(x^1, x^2, x^3)$$

і запишемо умови екстремальності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^1} = \dfrac{\partial L}{\partial x^2} = \dfrac{\partial L}{\partial x^3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} 2(x^1 - a^1) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \quad 2(x^2 - a^2) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad 2(x^3 - a^3) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{cases} (x^1 - a^1, x^2 - a^2, x^3 - a^3) = -\dfrac{\lambda}{2} \cdot (\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3}), \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Звідси випливає, що в екстремальній точці P пряма AP, що проходить через точку P і направлена вздовж вектора $(x^1 - a^1, x^2 - a^2, x^3 - a^3)$, співпаде з нормальною прямою $N_P F$, що проходить через точку P і направленою вздовж вектора $(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3})$.

Задача 3.6. Трубчата поверхня радіуса R навколо регулярної кривої ρ має параметризацію

$$r(s,\varphi) = \rho(s) + R\cos\varphi\,\nu(s) + R\sin\varphi\,\beta(s),$$

де радіус $R > 0$, а $\{\tau, \nu, \beta\}$ – репер Френе кривої ρ. Параметр s на ній будемо вважати натуральним. Тоді з формул Френе випливає, що

$$r_s = \rho' + R\cos\varphi\,\nu' + R\sin\varphi\,\beta' = \tau + R\cos\varphi(-k\,\tau + \varkappa\,\beta) + R\sin\varphi(-\varkappa\,\nu),$$

$$r_\varphi = -R\sin\varphi\,\nu + R\cos\varphi\,\beta,$$

де, як завжди, k і $\varkappa$ – це кривина і скрут ρ відповідно (ці ж стандартні позначення з теорії кривих будемо використовувати і в подальших задачах). Оскільки репер Френе є ортонормованим додатно орієнтованим базисом, вектор нормалі до цієї поверхні можна знайти за формулою

$$[r_s, r_\varphi] = \begin{vmatrix} \tau & \nu & \beta \\ 1 - Rk\cos\varphi & -R\varkappa\sin\varphi & R\varkappa\cos\varphi \\ 0 & -R\sin\varphi & R\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 - Rk\cos\varphi)R\cos\varphi\,\nu - (1 - Rk\cos\varphi)R\sin\varphi\,\beta.$$

Бачимо, що тут регулярність порушується в точках, де $Rk\cos\varphi = 1$, а в інших одиничний нормальний вектор з точністю до знака дорівнює $\cos\varphi\,\nu + \sin\varphi\,\beta$. Для довільної кривої ρ він не буде ортогональним ніякому фіксованому напрямку. У якості контрприклада можна взяти пласке коло

$$\rho = (\cos s,\, \sin s,\, 0),$$

трубчатою поверхнею якого є тор (до речі, коли це буде проста поверхня і чи пов'язане це з умовою регулярності вище?). Неважко встановити, що у цьому випадку

$$\nu = (-\cos s,\, -\sin s,\, 0), \quad \beta = (0,\, 0,\, 1).$$

Тому одиничний нормальний вектор відповідної трубчатої поверхні (з точністю до знака) дорівнює

$$n = \cos\varphi\,\nu + \sin\varphi\,\beta = (-\cos\varphi\cos s,\, -\cos\varphi\sin s,\, \sin\varphi).$$

Припустимо, що дотичні площини цієї поверхні паралельні фіксованому напрямку, що заданий вектором $a = (\lambda, \mu, \nu) \neq 0$. Тоді нормальні вектори йому ортогональні:

$$0 = \langle a, n\rangle = -\lambda\,\cos\varphi\cos s - \mu\,\cos\varphi\sin s + \nu\,\sin\varphi.$$

Ця умова повинна виконуватися для будь-яких значень s та φ. Підставивши $s = \varphi = 0$, отримаємо, що $\lambda = 0$, при $s = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$ маємо $\mu = 0$, а $s = \varphi = \frac{\pi}{2}$ дають $\nu = 0$, тобто $a = 0$, протиріччя.

З іншого боку, у загальному випадку вектор нормалі, очевидно, ортогональний до дотичного вектора τ. Зокрема, у точках координатних ліній $s = s_0$ (колах, що утворюють трубчату поверхню), напрямок цього вектора постійний, і тому дійсно можна говорити про те, що дотичні площини паралельні постійному напрямку. Також це буде так на проміжках s, де τ зберігається, тобто крива ρ є прямою (а поверхня – прямим круговим циліндром).

Задача 3.15. Узагальнимо спостереження з минулої задачі про дотичні площини, що не змінюються уздовж прямолінійних твірних, розглянувши тепер загальну лінійчату поверхню (до речі, всі поверхні у попередніх задачах крім 3.6 були лінійчатими, переконайтеся у цьому самостійно). Довільна лінійчата поверхня має параметризацію

$$r(u, v) = \rho(u) + v\, a(u),$$

де напрямна ρ – регулярна крива, а вектор-функція $a \neq 0$ задає поле напрямних векторів прямолінійних твірних. Часто вважають $|a| = 1$, але тут це нам не знадобиться, також ми не будемо вважати параметр u кривої ρ натуральним. Маємо

$$r_u = \rho' + v\, a',$$

$$r_v = a,$$

$$[r_u, r_v] = [\rho', a] + v\, [a', a].$$

Спробуйте самостійно дослідити (аналогічно до міркувань у попередній задачі), за яких умов $[r_u, r_v] \neq 0$, тобто які точки є регулярними. Далі вважаємо, що маємо справу лише з такими точками. Отже, нехай дотична площина зберігається уздовж кожної прямолінійної твірної поверхні, тобто координатної лінії $u = u_0$ (у цьому випадку також говорять, що ця лінійчата поверхня розгортається). З цього випливає, що напрямок її нормального вектора $[r_u, r_v]$ при фіксованому u не залежить від v. І навпаки, якщо напрямок цього вектора зберігається, то, оскільки дотичні площини при різних v повинні містити цю прямолінійну твірну (див. зауваження наприкінці попередньої задачі), вони всі співпадають.

Отже, умова збереження дотичної площини уздовж прямолінійних твірних еквівалентна збереженню напрямку вектор-функції $v \mapsto [r_u, r_v] \neq 0$ для кожного фіксованого u. У задачі 1.5 з теорії кривих встановлено, що ця умова, в свою чергу, еквівалентна тому, що

$$0 = [[r_u, r_v], [r_u, r_v]_v] = [[\rho', a] + v\, [a', a], [a', a]] = [[\rho', a], [a', a]] =$$

$$= \langle [\rho', a], a \rangle a' - \langle [\rho', a], a' \rangle a = -(\rho', a, a') a.$$

де у передостанній рівності використано формулу подвійного векторного добутку. Таким чином, оскільки $a \neq 0$, наша лінійчата поверхня розгортається тоді й тільки тоді, коли $(\rho', a, a') = 0$, тобто вектори ρ', a і a' компланарні (це можна було встановити і з чисто геометричних міркувань – спробуйте це зробити). Це і потрібно було довести.

Зокрема, для поверхні дотичних з попередньої задачі ця умова виконується, бо ρ' і a колінеарні, а для циліндричних поверхонь (зокрема площин) – бо $a' = 0$. Ще один клас таких поверхонь складають конічні (перевірте це, використавши параметризацію, що була знайдена в задачі 2.11). Виявляється, що локально (тобто в деякому околі кожної точки) будь-яка лінійчата поверхня, що розгортається, відноситься до одного з перелічених класів, (див., наприклад, П.К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, 3-е изд., с. 294-307).

Задача 3.13. Розглянемо довільну поверхню обертання. Для цієї задачі можна, не обмежуючи загальність, вважати, що її віссю є Oz, тому використаємо параметризацію з задачі 2.4:

$$r(u, v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u)).$$

Для неї

$$r_u = (f'\cos v,\ f'\sin v,\ g'),$$

$$r_v = (-f\sin v,\ f\cos v,\ 0),$$

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f'\cos v & f'\sin v & g' \\ -f\sin v & f\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-fg'\cos v,\ -fg'\sin v,\ ff'),$$

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{(-fg'\cos v)^2 + (-fg'\sin v)^2 + (ff')^2} = |f|\sqrt{f'^2 + g'^2}.$$

При цьому $f \neq 0$, бо інакше напрямна крива $\rho = (f, 0, g)$ поверхні перетинала б її вісь Oz (можна, не обмежуючи загальність, вважати, що $f > 0$, тобто що ця крива лежить у напівплощині $x > 0$ площини Oxz). Також $f'^2 + g'^2 > 0$, бо напрямна крива регулярна. Таким чином, поверхня регулярна. Скорочуючи вектор нормалі на $f \neq 0$, отримаємо рівняння нормалі у довільній точці:

$$\frac{x - f(u)\cos v}{-g'(u)\cos v} = \frac{y - f(u)\sin v}{-g'(u)\sin v} = \frac{z - g(u)}{f'(u)}.$$

Перш за все, помітимо, що після підстановки $x = y = 0$ ми отримаємо тут сумісну систему:

$$\frac{f}{g'} = \frac{f}{g'} = \frac{z - g}{f'},$$

з якої можна знайти

$$z = g + \frac{ff'}{g'}.$$

Таким чином, всі нормалі перетинають вісь обертання Oz, що є одним із завдань цієї задачі. Цікаво, що вірне і обернене: якщо усі нормалі деякої регулярної поверхні перетинають деяку фіксовану пряму, то поверхня є областю на поверхні обертання, віссю якої є ця пряма (див. задачу 3.14 та пояснення до неї у посібнику).

Паралелями і меридіанами поверхні обертання звуться координатні лінії $u = u_0$ і $v = v_0$ відповідно. Таким чином, меридіан – це крива

$$\gamma(u) = (f(u)\cos v_0,\ f(u)\sin v_0,\ g(u)).$$

Для неї
$$\gamma' = r_u = (f'\cos v_0,\ f'\sin v_0,\ g'),$$
$$|\gamma'| = \sqrt{(f'\cos v_0)^2 + (f'\sin v_0)^2 + g'^2} = \sqrt{f'^2 + g'^2}.$$
Ми можемо без обмеження загальності вважати, що для напрямної кривої $\rho = (f, 0, g)$ поверхні параметр u був натуральним (бо факт, що треба встановити, не залежить від параметризації), тобто $f'^2 + g'^2 = 1$. Тоді він буде натуральним і для кожного меридіана, і ми можемо знайти вектор головної нормалі цієї кривої, використавши спрощену формулу:
$$\nu = \frac{\gamma''}{|\gamma''|} = \frac{1}{\sqrt{f''^2 + g''^2}}(f''\cos v_0,\ f''\sin v_0,\ g'').$$
Нам треба перевірити, що головна нормаль у кожній точці меридіана співпадає з нормаллю до поверхні у цій точці. Для цього достатньо, щоб їхні напрямні вектори були колінеарні, тобто щоб нулю дорівнював векторний добуток
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ f''\cos v_0 & f''\sin v_0 & g'' \\ -g'\cos v_0 & -g'\sin v_0 & f' \end{vmatrix} = ((f'f'' + g'g'')\sin v_0,\ -(f'f'' + g'g'')\cos v_0,\ 0).$$
Це дійсно так, бо, диференціюючи умову натуральності $f'^2 + g'^2 = 1$, отримуємо
$$f'f'' + g'g'' = 0.$$
Звичайно, вектор головної нормалі меридіана можна було шукати і за алгоритмом для загальної параметризації.

Задача 3.17. Нехай усі нормалі деякої поверхні, що параметризована вектор-функцією
$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$
проходять через фіксовану точку $(x_0, y_0, z_0) = r_0$. Як ми бачили, рівняння цих нормалей мають вигляд
$$\frac{x - x(u,v)}{[r_u, r_v]^1(u,v)} = \frac{y - y(u,v)}{[r_u, r_v]^2(u,v)} = \frac{z - z(u,v)}{[r_u, r_v]^3(u,v)},$$
отже за умовою в усіх точках поверхні маємо
$$\frac{x_0 - x(u,v)}{[r_u, r_v]^1(u,v)} = \frac{y_0 - y(u,v)}{[r_u, r_v]^2(u,v)} = \frac{z_0 - z(u,v)}{[r_u, r_v]^3(u,v)}.$$
Це означає, що вектор $r_0 - r$ колінеарний $[r_u, r_v]$. Тому
$$\frac{\partial}{\partial u}\langle r_0 - r, r_0 - r\rangle = -2\langle r_u, r_0 - r\rangle = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle r_0 - r, r_0 - r\rangle = -2\langle r_v, r_0 - r\rangle = 0.$$

Оскільки r задана на зв'язній множині, звідси випливає, що функція $|r-r_0|^2 = \langle r-r_0, r-r_0\rangle$ постійна і дорівнює якомусь $R^2 \geqslant 0$ (можемо вважати, що $R > 0$, бо інакше поверхня вироджується в точку r_0 і не буде регулярною). Це означає, що поверхня є областю на сфері з центром у r_0 радіуса R (у т.ч. всією сферою). Обернене, звичайно, також вірне: нормалі поверхні, що є областю на сфері, перетинаються у центрі цієї сфери.