gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 12. Дотичні вектори – тензорний закон зміни координат. Відображення поверхонь.

12.1. Дотична площина поверхні – базис, дотичні вектори і їх координати

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

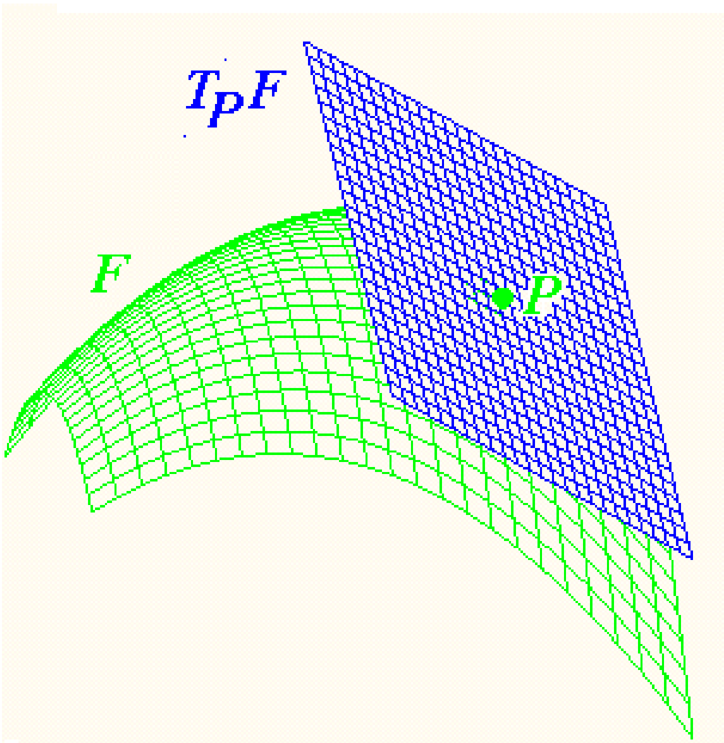
За умовою регулярності, вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ є неперервно диференційовною, і при цьому $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ лінійно незалежні в кожній точці:

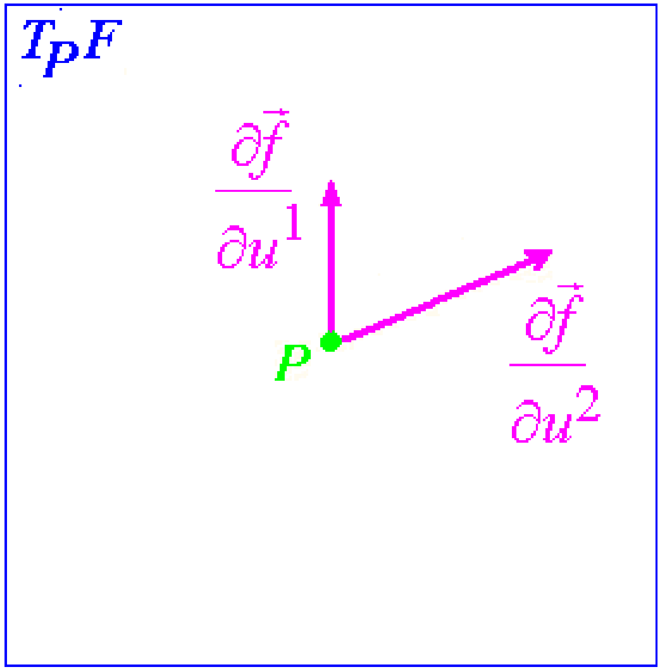
$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] \neq \vec{0}.$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F і розглянемо дотичну площину $T_P F$. Ця площина проходить через точку P і натягнута на лінійно незалежні вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

які називають *канонічним базисом* в дотичній площині $T_P F$, породженим локальними координатами на поверхні F.





Розглядаємо дотичну площину T_PF як двомірний векторний простір.

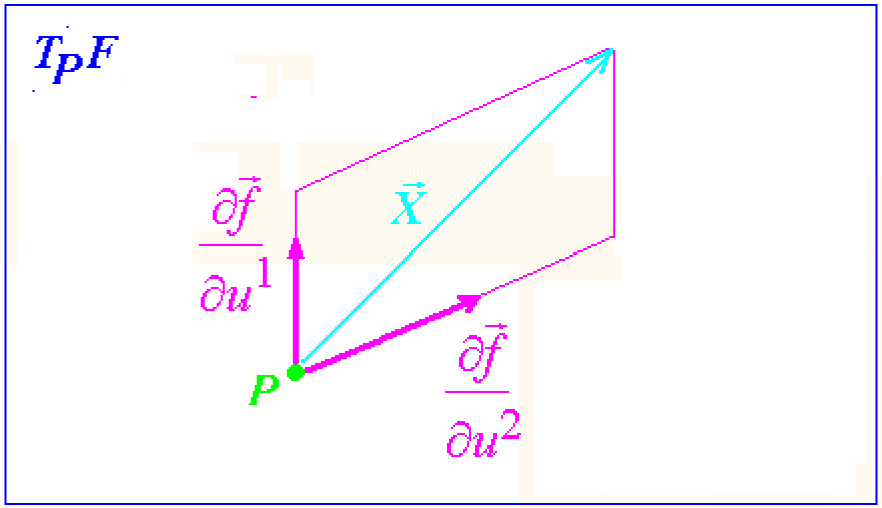
Як тільки в околі точки P на поверхні F вводяться локальні координати (u^1, u^2), то в дотичній площині T_PF виникає канонічний базис

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)\ ,\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

і будь-який елемент T_PF – *дотичний вектор* $\vec{X}$ поверхні F в точці P – записується як лінійна комбінація базисних векторів:

$$\vec{X} = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2).$$

Величини (X^1, X^2) називаються *координатами* дотичного вектора $\vec{X} \in T_PF$



Приклад – вектор швидкості кривої на поверхні

Розглянемо криву γ на поверхні F, що проходить через точку P.

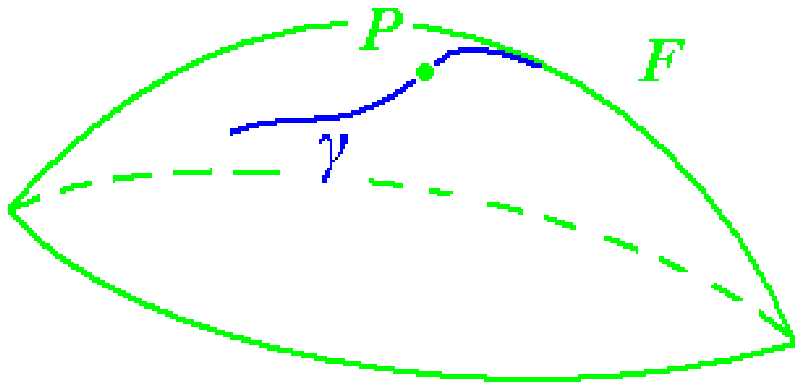
У внутрішніх координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b$$

так, що $u_0^1 = h^1(t_0)$, $u_0^2 = h^2(t_0)$.

В обхопному просторі $I\!R^3$ крива γ задається вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)) = \vec{f}_\gamma(t)$$



Для напрямного вектора дотичної прямої кривої γ в точці P маємо:

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)\cdot\frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)\cdot\frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0).$$

Отже, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$ є лінійною комбінацією векторів $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$, $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ і має координати $(\frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0), \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0))$.

Крива γ на поверхні F:	Вектор швидкості кривої γ в T_PF:
$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases},\quad a < t < b$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) \\ \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0) \end{pmatrix}$

Зауваження. Базисні вектори *канонічного базису* в T_PF – це вектори швидкості (дотичні вектори) пари *координатних ліній*, що проходять через точкуP, на поверхні F.

Дотичні векторні поля на регулярній поверхні

Якщо на регулярній поверхні F в $\mathbb{R}^3$ задати в кожній її точці $P \in F$ якийсь вектор в дотичній площині $T_P F$, то отримаємо *дотичне векторне поле* $\vec{X}$ на поверхні F.

Коли поверхня F задається вектор-функцією

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2),$$

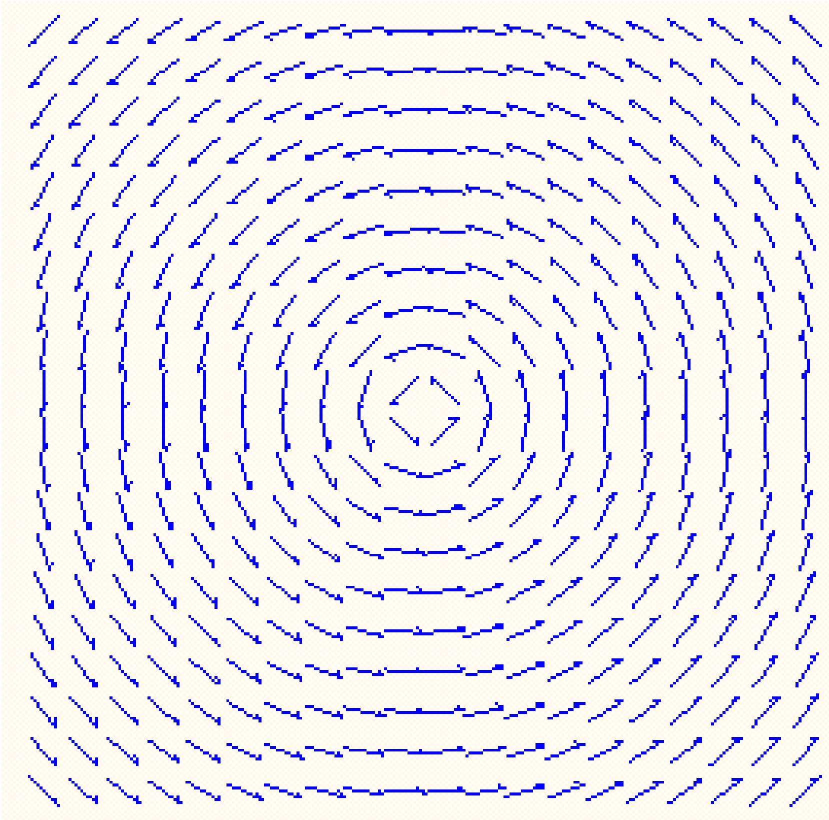
то дотичне векторне поле представляється у вигляді

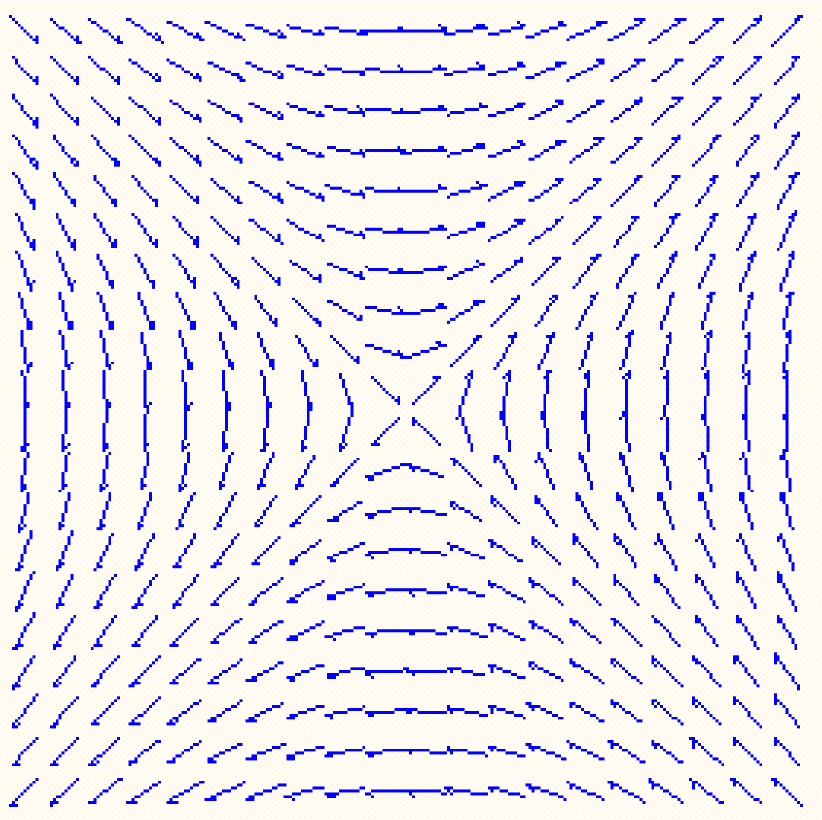
$$\vec{X} = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2},$$

де $X^1 = X^1(u^1, u^2)$, $X^2 = X^2(u^1, u^2)$ – координати векторного поля $\vec{X}$.

Дотичне векторне поле $\vec{X}$ на поверхні F називається *регулярним*, якщо $\vec{X}$ не приймає нульового значення в жодній точці на поверхні, а його координати $X^1 = X^1(u^1, u^2)$, $X^2 = X^2(u^1, u^2)$ є неперервно диференційованими функціями.

Ілюстрація





* *Дотичне розшарування*

Дотичним розшаруванням на поверхні F називається

$$TF = \{\ (P,\ \vec{X}_P\ )\mid\ \ P \in M\ ,\ \vec{X}_P \in T_P M\ \ \}$$

Відображення проекції $\Pi\colon TF \to F, \quad \Pi(P, \vec{X}_P) = P$.

Дотичне векторне поле – відображення

$$\vec{X}:\ F \to TF$$

таке, що

$$\Pi \circ \vec{X} = Id:\ F \to TF$$

Ямпольский О.Л., *Геометрія розшарувань* (geometry.karazin.ua)

Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения*

12.2. Тензорний закон зміни координат дотичних векторів

На регулярній параметрично заданій поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

зробимо регулярну заміну координат в околі точки P,

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

і запишемо радіус-вектор поверхні в новій системі координат:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2).$$

Продиференціювавши, отримаємо (в точці *P)*:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} = \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} = \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2}$$

Таким чином, заміна координат в околі точки P на поверхні F породжує заміну канонічного базису в дотичній площині $T_P F$:

$$\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\right)_{(u_0^1,u_0^2)}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u^1}{\partial\widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial\widetilde{u}^2}\\ \dfrac{\partial u^2}{\partial\widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial\widetilde{u}^2}\end{pmatrix}_{(\widetilde{u}_0^1,\widetilde{u}_0^2)}=\left(\frac{\partial\vec{\widetilde{f}}}{\partial\widetilde{u}^1},\frac{\partial\vec{\widetilde{f}}}{\partial\widetilde{u}^2}\right)_{(\widetilde{u}_0^1,\widetilde{u}_0^2)}.$$

Як при цьому зміняться координати дотичних векторів?

Маємо (все – в точці P):

$$\vec{X}=\widetilde{X}^1\frac{\partial\vec{\widetilde{f}}}{\partial\widetilde{u}^1}+X^2\frac{\partial\vec{\widetilde{f}}}{\partial\widetilde{u}^2}=$$

$$=\widetilde{X}^1\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial\widetilde{u}^1}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial\widetilde{u}^1}\right)+X^2\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial\widetilde{u}^2}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial\widetilde{u}^2}\right)=$$

$$=\left(\widetilde{X}^1\frac{\partial u^1}{\partial\widetilde{u}^1}+\widetilde{X}^2\frac{\partial u^1}{\partial\widetilde{u}^2}\right)\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}+\left(\widetilde{X}^1\frac{\partial u^2}{\partial\widetilde{u}^1}+\widetilde{X}^2\frac{\partial u^2}{\partial\widetilde{u}^2}\right)\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}=X^1\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}+X^2\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}$$

Отримуємо наступні формули – тензорний закон зміни координат дотичних векторів в $T_P F$ при заміні координат на поверхні F:

$$\begin{cases} X^1 = \tilde{X}^1 \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ X^2 = \tilde{X}^1 \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} + \tilde{X}^2 \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

Зауваження. Вказаний закон використовується, наприклад, при побудові дотичних векторних полів на простих регулярних поверхнях, атлас яких містить більше ніж одну карту.

12.3. Диференціальні лінійні форми на регулярних поверхнях

Розглянемо лінійну форму $\omega\colon T_P F \to \mathbb{R}$

Маємо:

$$\omega(\vec{X}) = \omega\left(X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\right) = X^1 \omega\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\right) + X^2 \omega\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right) = X^1 \omega_1 + X^2 \omega_2$$

Вектор	Лінійна форма
$\vec{X} = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$	$\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$$\omega(\vec{X}) = (\omega_1, \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

Лінійні форми утворюють спряжений векторний простір, що називається *кодотичною площиною* T_P^*F поверхні F в точці P.

В якості базисних лінійних форм в T_P^*F розглянемо

$$\varepsilon^1 : T_PF \to \mathbb{R} \quad , \qquad \varepsilon^2 : T_PF \to \mathbb{R}$$

такі, що

$$\varepsilon^1 (\vec{X}) = X^1 \quad , \quad \varepsilon^2 (\vec{X}) = X^2,$$

тобто, $\varepsilon^i (\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j}) = \delta^i_j$. Тоді можемо записати

$$\omega (\vec{X}) = \omega_1 \varepsilon^1 (\vec{X}) + \omega_2 \varepsilon^2 (\vec{X}), \qquad \forall \vec{X} \in T_PF$$

Тобто, отримуємо:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \omega_2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 .$$

Лінійні форми ε^1 і ε^2 назвемо *канонічним базисом* в кодотичній площині T_P^*F. Цей базис породжується канонічним базисом $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ в дотичній площині T_PF.

Як зміниться канонічний базис ε^1, ε^2 в T_P^*F, якщо змінити локальні координати в околі точки P на поверхні F і, як наслідок, змінити канонічний базис $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ в дотичній площині T_PF ?

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \end{cases}$$

Заміна канонічного базиса в дотичному просторі T_PF:

$$\frac{\partial \vec{\widetilde{f}}}{\partial \widetilde{u}^1} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1}$$

$$\frac{\partial \vec{\widetilde{f}}}{\partial \widetilde{u}^2} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2}$$

Заміна канонічного базиса в кодотичному просторі T_P^*F:

$$\widetilde{\varepsilon}^1 = A_1^1\, \varepsilon^1 + A_2^1\, \varepsilon^2$$

$$\widetilde{\varepsilon}^2 = A_1^2\, \varepsilon^1 + A_2^2\, \varepsilon^2$$

Маємо (при будь-яких $1 \leq i\ , j \leq 2$):

$$\delta^i_j = \tilde{\varepsilon}^i(\frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^j}) = \tilde{\varepsilon}^i(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j}) = \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j}\cdot\tilde{\varepsilon}^i(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}) + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j}\cdot\tilde{\varepsilon}^i(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}) =$$

$$= \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j}\cdot\left(A^i_1\varepsilon^1(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}) + A^i_2\varepsilon^2(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1})\right) + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j}\cdot\left(A^i_1\varepsilon^1(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}) + A^i_2\varepsilon^2(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2})\right) =$$

$$= \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j}\cdot\left(A^i_1\delta^1_1 + A^i_2\delta^2_1\right) + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j}\cdot\left(A^i_1\delta^1_2 + A^i_2\delta^2_2\right) = \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j}\cdot A^i_1 + \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j}\cdot A^i_2$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

Заміна канонічного базиса в кодотичному просторі T_P^*F:

$$\tilde{\varepsilon}^1 = \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1}\,\varepsilon^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2}\,\varepsilon^2$$

$$\tilde{\varepsilon}^2 = \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1}\,\varepsilon^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}\,\varepsilon^2$$

Згадаємо формулу з математичного аналізу

$$d\tilde{u}^1 = \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1}\,du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2}\,du^2$$

$$d\tilde{u}^2 = \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1}\,du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}\,du^2$$

Тому покладають

$$\varepsilon^1 = du^1\,,\quad \varepsilon^2 = du^2 \qquad \text{та} \qquad \tilde{\varepsilon}^1 = d\tilde{u}^1\,,\quad \tilde{\varepsilon}^2 = d\tilde{u}^2$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \end{cases}$$

Заміна канонічного базиса
в дотичному просторі $T_P F$:

$$\frac{\partial \vec{\widetilde{f}}}{\partial \widetilde{u}^1} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1}$$

$$\frac{\partial \vec{\widetilde{f}}}{\partial \widetilde{u}^2} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2}$$

Заміна канонічного базиса
в кодотичному просторі $T_P^* F$:

$$d\widetilde{u}^1 = \frac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^1}\, du^1 + \frac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^2}\, du^2$$

$$d\widetilde{u}^2 = \frac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^1}\, du^1 + \frac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^2}\, du^2$$

Як змінюються координати лінійної форми при заміні координат на поверхні F ?

$$\omega = \tilde{\omega}_1 d\tilde{u}^1 + \tilde{\omega}_2 d\tilde{u}^2 = \tilde{\omega}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} du^2 \right) + \tilde{\omega}_2 \left(\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} du^2 \right) =$$

$$= \left(\tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \right) du^1 + \left(\tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \right) du^2 = \omega_1 du^1 + \omega_2 du^2$$

Тому
$$\omega_1 = \tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1}$$

$$\omega_2 = \tilde{\omega}_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} + \tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}$$

тобто,

$$(\omega_1, \omega_2) = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)}$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \end{cases}$$

Тензорний закон зміни координат дотичних векторів з $T_P F$:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\widetilde{u}_0^1, \widetilde{u}_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{X}^1 \\ \widetilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

Тензорний закон зміни координат лінійних форм з $T_P^* F$:

$$(\omega_1, \omega_2) = (\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)}$$

Наслідок:

$$\omega\,(\vec{X}) = (\omega_1, \omega_2)\cdot\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2)\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \widetilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \widetilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2} \end{pmatrix}_{(\widetilde{u}_0^1, \widetilde{u}_0^2)} \cdot\begin{pmatrix} \widetilde{X}^1 \\ \widetilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

$$= (\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2)\cdot\begin{pmatrix} \widetilde{X}^1 \\ \widetilde{X}^2 \end{pmatrix}$$

Тобто, значення лінійної диференціальної форми ω з T_P^*F на векторі $\vec{X}$ з T_PF не залежить від вибору локальних координат на поверхні F (від вибору канонічних базисів в дотичній площині T_PF і в кодотичній площині T_P^*F) .

* *Зауваження.*

Разом з лінійними формами $T_P F \to \mathbb{R}$ і векторами, як лінійними відображеннями $T_P^* F \to \mathbb{R}$, розглядають також

білінійні форми $T_P F$ x $T_P F \to \mathbb{R}$

трилінійні форми $T_P F$ x $T_P F$ x $T_P F \to \mathbb{R}$

полілінійні форми $T_P F$ x $T_P F$ x … x $T_P F \to \mathbb{R}$

оператори $T_P F$ x $T_P^* F \to \mathbb{R}$

…

і інші лінійні (по кожному аргументу) відображення

$$T_P F \times T_P F \times \ldots \times T_P F \times T_P^* F \times T_P^* F \times \ldots\ldots \times T_P^* F \to \mathbb{R},$$

що називаються *тензорами* в точці P на поверхні F.

Якщо задати тензор (білінійну форму, оператор і т.д.) в кожній точці на поверхні F, то отримаємо *тензорне поле* (*білінійну диференціальну форму*, *полілінійну диференціальну форму*, *поле операторів*, і т.д.)

Н.В. Ефимов *Внешние дифференциальные формы*
Б. Розенфельд *Многомерные пространства*

12.4. Відображення поверхонь

Розглянемо дві прості поверхні F і M в $I\!R^3$ та неперервне відображення між ними

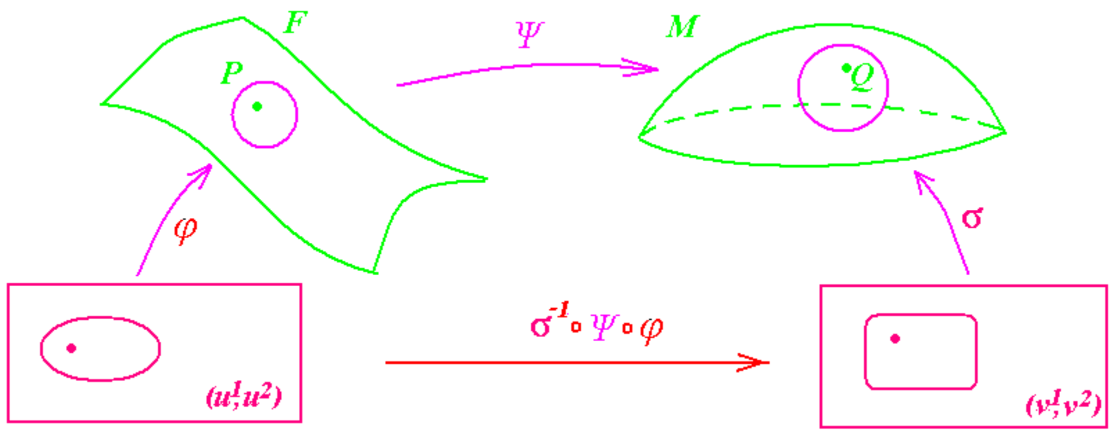
$$\Psi : F \rightarrow M$$

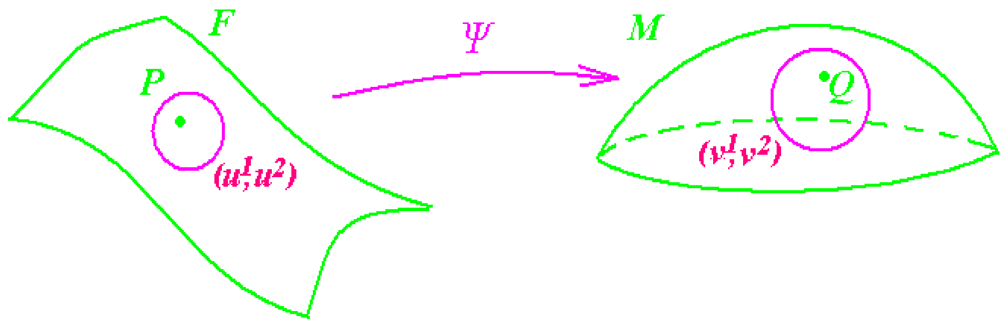
Зафіксуємо точку P на поверхні F та її образ $\Psi(P) = Q$ на поверхні M.

Введемо локальні координати (u^1, u^2) в околі точки P на поверхні F і локальні координати (v^1, v^2) в околі точки Q на поверхні M.

Тоді в локальних координатах відображення Ψ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

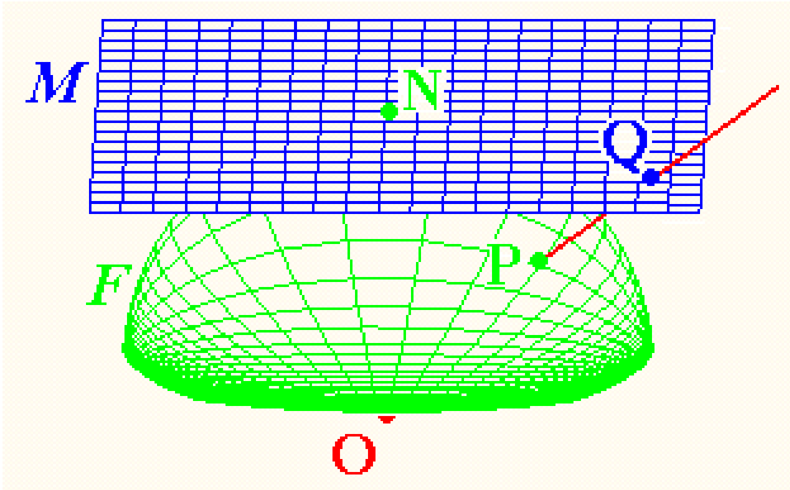




Приклади

1. Центральна проекція відкритої півсфери на площину

Півсфера: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}$, $\quad 0 < u^1 < \dfrac{\pi}{2}$, $\quad 0 < u^2 < 2\pi$



Площина: $\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = r \end{cases}$, $\quad -\infty < v^1 < \infty$, $\quad -\infty < v^2 < \infty$

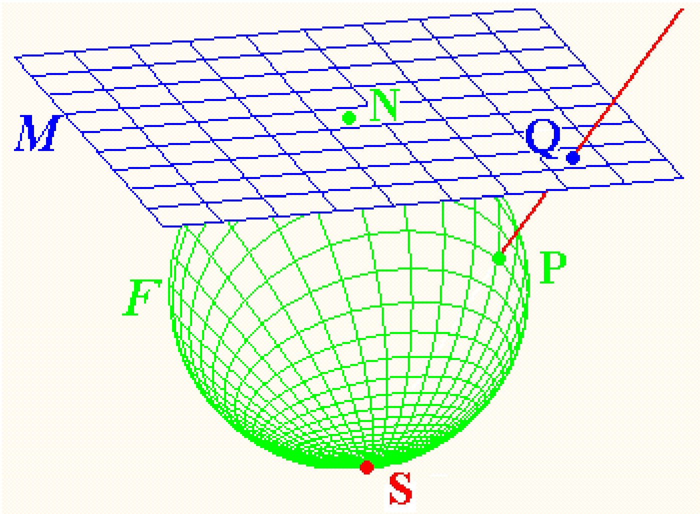
Відображення: $\begin{cases} v^1 = r\cot u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r\cot u^1 \sin u^2 \end{cases}$

2. Стереографічна проекція сфери (з виколотою точкою) на площину

Сфера: $$\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Площина: $$\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$$

Відображення: $$\begin{cases} v^1 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\cos u^2 \\ v^2 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\sin u^2 \end{cases}$$

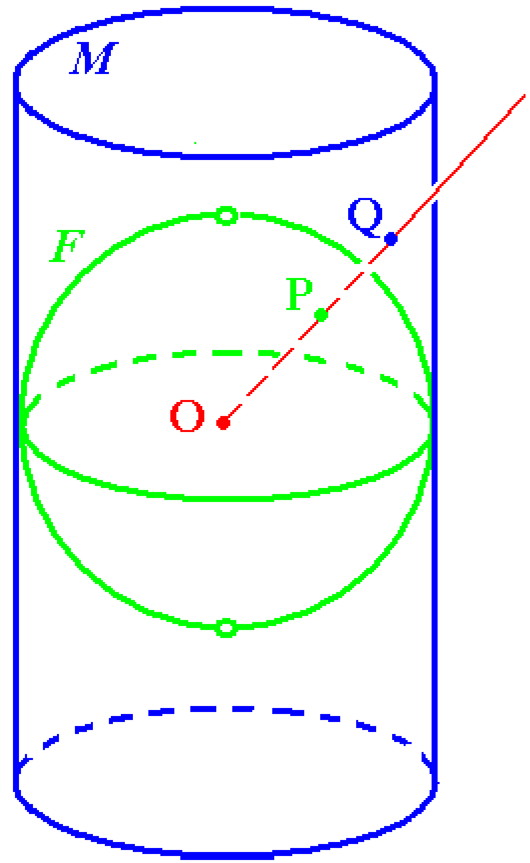


3. Проекція Меркатора

Сфера: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 < u^2 < 2\pi$

Циліндр: $\begin{cases} x^1 = r\cos v^1 \\ x^2 = r\sin v^1 \\ x^3 = v^2 \end{cases}$, $\quad 0 < v^1 < 2\pi, \quad -\infty < v^2 < \infty$

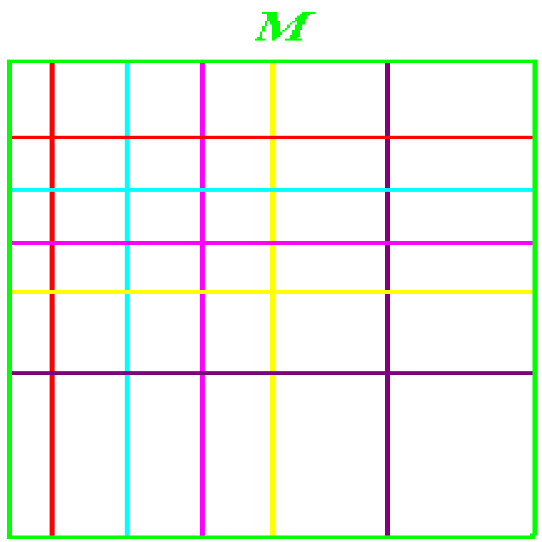
Відображення: $\begin{cases} v^1 = u^2 \\ v^2 = r\tan u^1 \end{cases}$

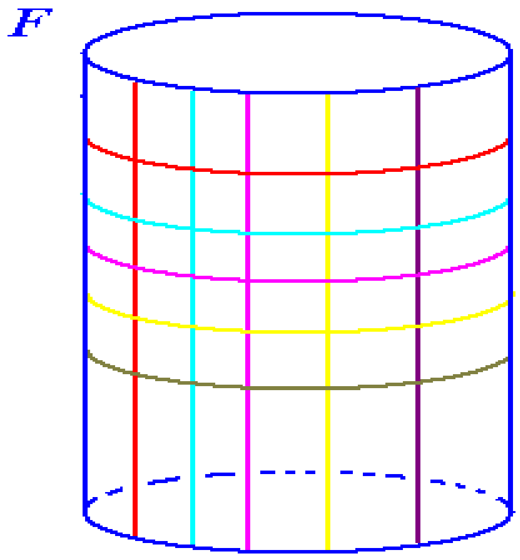


4. Площина накриває циліндр

Площина: $\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = u^2 \end{cases}$, $\begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{matrix}$ Циліндр: $\begin{cases} x^1 = r\cos v^1 \\ x^2 = r\sin v^1 \\ x^3 = v^2 \end{cases}$, $\begin{matrix} 0 < v^1 < 2\pi \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$

Відображення: $\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$





Припустимо, що поверхні F і M є регулярними.

Відображення $\Psi : F \to M$ назвемо *регулярним* в точці $P \in F$, якщо в локальних координатах (u^1, u^2) в околі точки P на поверхні F і в локальних координатах (v^1, v^2) в околі точки Q на поверхні M відображення Ψ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

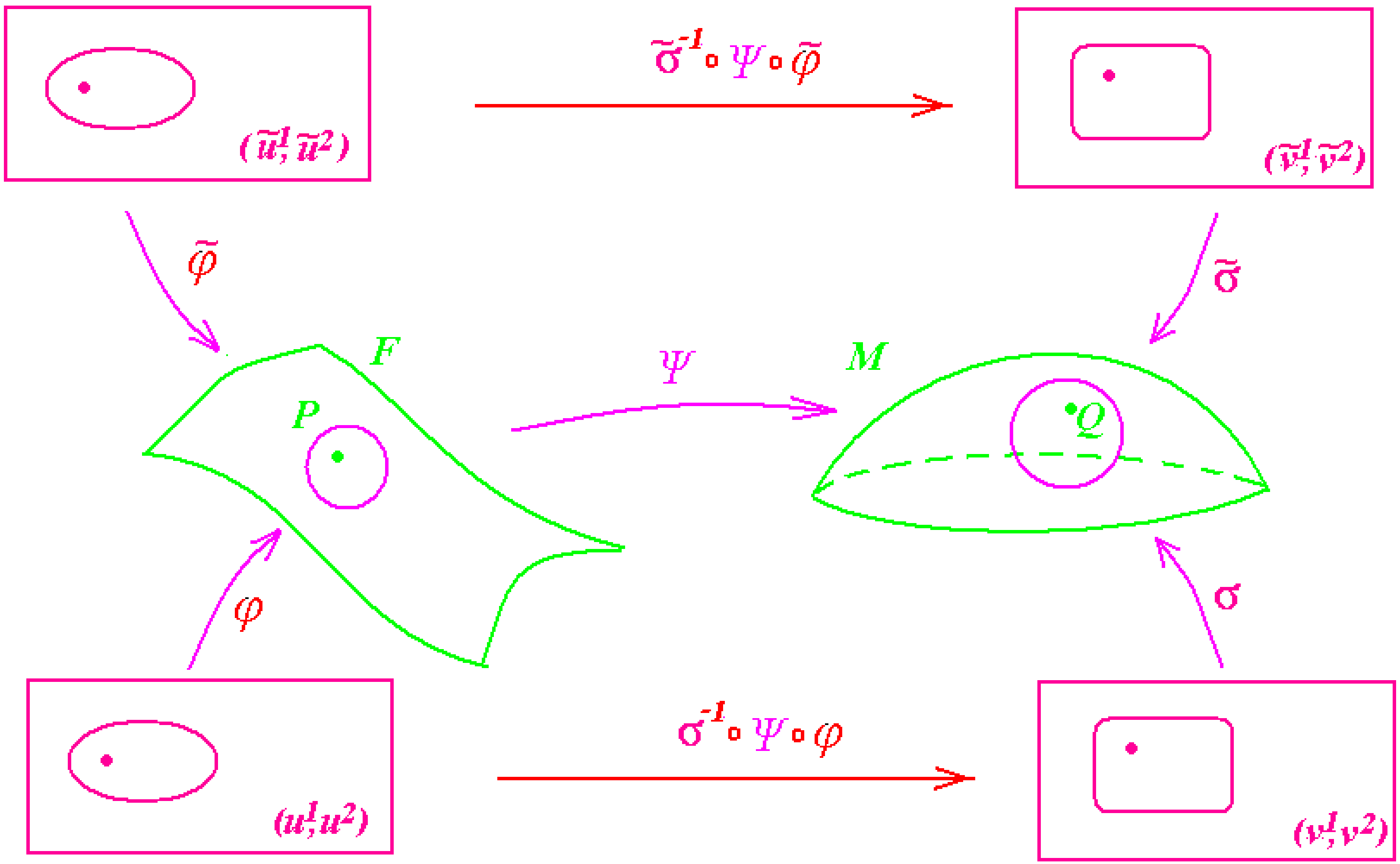
так, що

1) функції $\xi^1(u^1, u^2)$, $\xi^2(u^1, u^2)$ є неперервно диференційованими,

2) $$\left. \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} \end{vmatrix} \right|_P \neq 0$$

Визначення регулярності відображення є коректним – воно не залежить від вибору локальних координат.

Ілюстрація-пояснення:



Відображення $F \to M$ в старих координатах

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні M

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(v^1, v^2) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(v^1, v^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Відображення $F \to M$ в нових координатах

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \end{cases}$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Як наслідок, при регулярних замінах координат на поверхнях F і M:

1) зберігається неперервна диференційованість функцій, що представляють відображення, як композицій неперервно диференційованих функцій;

2) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0$

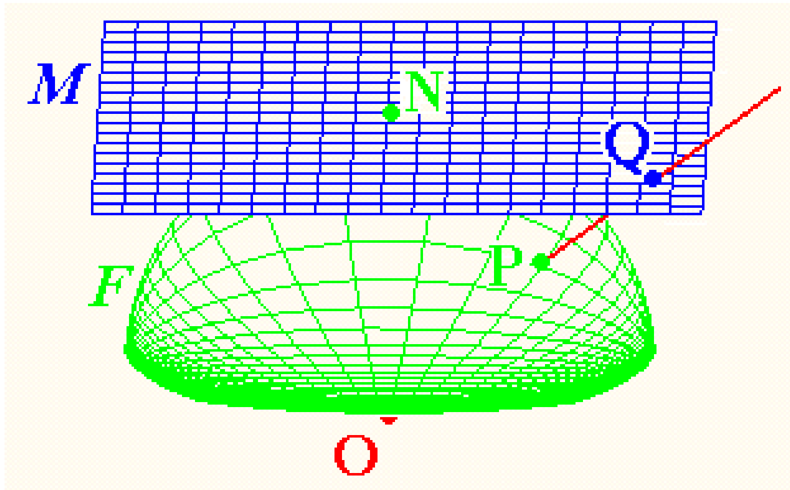
Зауваження 1. Регулярне відображення регулярних простих поверхонь є локальним гомеоморфізмом.

Зауваження 2. Якщо в нас є регулярне відображення регулярних простих поверхонь $F \to M$, то його можна застосовувати для регулярної заміни локальних координат на поверхні F (або на поверхні M) так, щоб в нових координатах відображення задавалось за відповідністю координат – відповідні за відображенням точки на поверхнях F і M мають однакові координати.

Приклади

1. Центральна проекція відкритої півсфери на площину

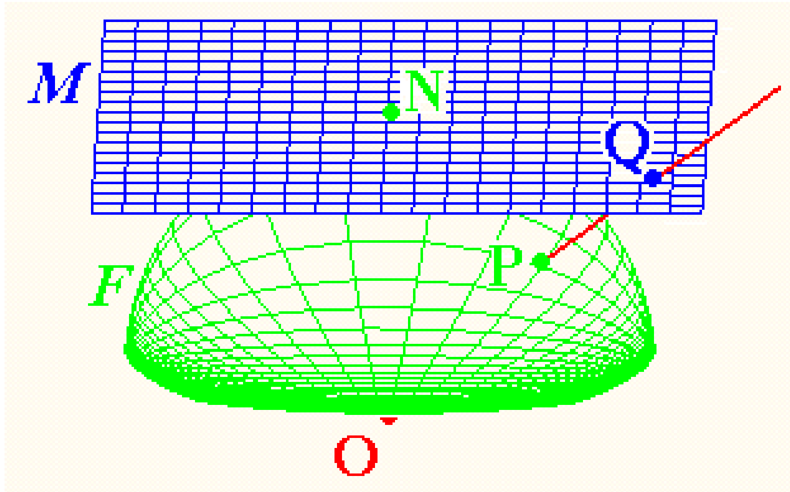
Півсфера: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$



Площина: $\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$

Відображення: $\begin{cases} v^1 = r\cot u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r\cot u^1 \sin u^2 \end{cases}$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \cos u^2 \\ r\cos u^1 \sin u^2 \\ r\sin u^1 \end{pmatrix} \qquad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ r \end{pmatrix}$$



Колінеарність $\vec{OP} \parallel \vec{OQ}$:

$$\frac{r\cos u^1 \cos u^2}{v^1} = \frac{r\cos u^1 \sin u^2}{v^2} = \frac{r\sin u^1}{r}$$

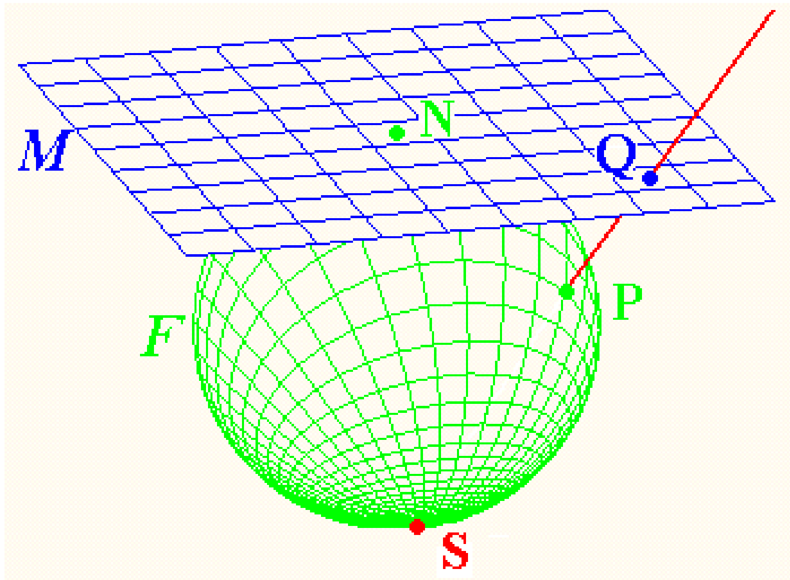
$$\begin{cases} v^1 = r\cot u^1 \cos u^2 \\ v^2 = r\cot u^1 \sin u^2 \end{cases}$$

2. Стереографічна проекція сфери (з виколотою точкою) на площину

Сфера: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$

Площина: $\begin{cases} x^1 = v^1 \\ x^2 = v^2 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$

Відображення: $\begin{cases} v^1 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\cos u^2 \\ v^2 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\sin u^2 \end{cases}$

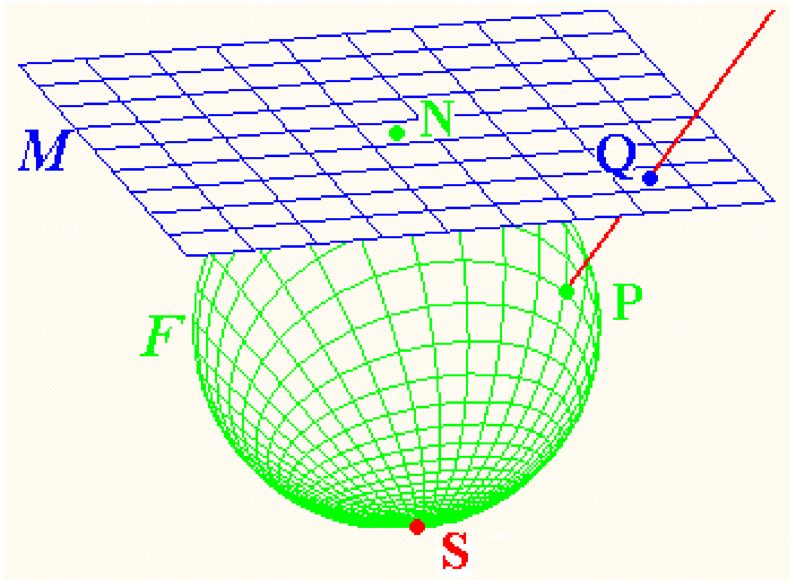


$$\vec{SP} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \cos u^2 \\ r\cos u^1 \sin u^2 \\ r\sin u^1 + r \end{pmatrix} \qquad \vec{SQ} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ r + r \end{pmatrix}$$

Колінеарність $\vec{SP} \parallel \vec{SQ}$:

$$\frac{r\cos u^1 \cos u^2}{v^1} = \frac{r\cos u^1 \sin u^2}{v^2} = \frac{r + r\sin u^1}{2r}$$

$$\begin{cases} v^1 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\cos u^2 \\ v^2 = 2r\dfrac{\cos u^1}{1+\sin u^1}\sin u^2 \end{cases}$$

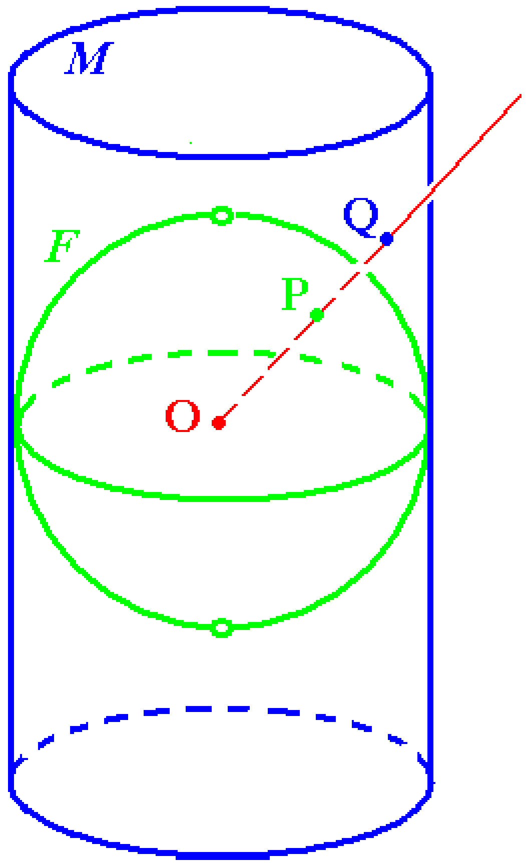


3. Проекція Меркатора

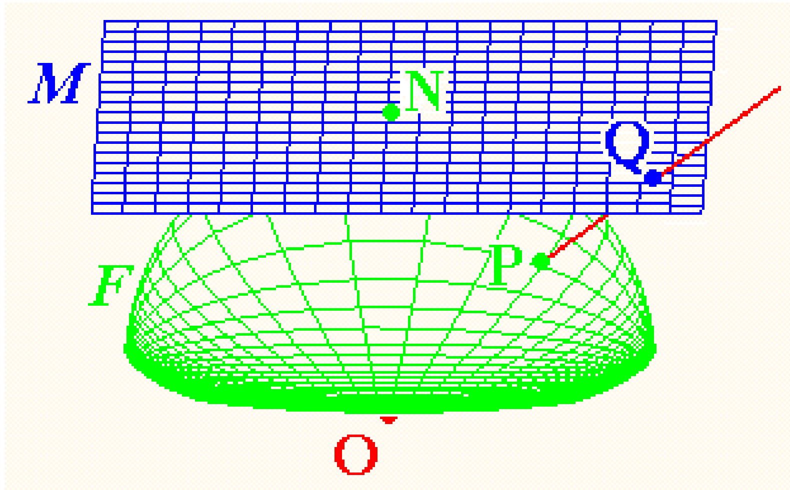
Сфера: $\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$

Циліндр: $\begin{cases} x^1 = r\cos v^1 \\ x^2 = r\sin v^1 \\ x^3 = v^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 < v^1 < 2\pi \\ -\infty < v^2 < \infty \end{matrix}$

Відображення: $\begin{cases} v^1 = u^2 \\ v^2 = r\tan u^1 \end{cases}$



$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} r\cos u^1 \cos u^2 \\ r\cos u^1 \sin u^2 \\ r\sin u^1 \end{pmatrix} \qquad \vec{OQ} = \begin{pmatrix} r\cos v^1 \\ r\sin v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$



Колінеарність $\vec{OP} \parallel \vec{OQ}$:

$$\frac{r\cos u^1 \cos u^2}{r\cos v^1} = \frac{r\cos u^1 \sin u^2}{r\sin v^1} = \frac{r\sin u^1}{v^2}$$

$$\frac{\cos u^2}{\cos v^1} = \frac{\sin u^2}{\sin v^1} = \frac{r\tan u^1}{v^2}$$

$$\begin{cases} v^1 = u^2 \\ v^2 = r\tan u^1 \end{cases}$$